Devoir n° 2

Partie I

Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes dans le complémentaire du spectre de T. On note R_λ la résolvante de T, et $T.x$ l'image par T d'un vecteur $x \in \mathcal{H}$.

1. Montrer que $R_{\lambda_n} - R_{\lambda_m} = (\lambda_n - \lambda_m)R_{\lambda_n}R_{\lambda_m}$.
2. On suppose que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ converge vers λ. Montrer que si les normes $\|R_{\lambda_n}\|$ sont uniformément bornées, alors R_{λ_n} est convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, et λ n'est pas dans le spectre de T.

Soit K un opérateur compact de $\mathcal{H}$, de spectre non réduit à $\{0\}$, et $\lambda \in Sp(K)$ tel que $|\lambda|$ soit maximal.

3.a Montrer que λ est limite de nombres complexes situés dans le complémentaire du spectre de K.

3.b Montrer, en utilisant la question 2, qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\lim_{n\to+\infty} K.x_n - \lambda x_n = 0$.

4. En utilisant la compacité de K, montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ a une sous-suite convergente. En déduire l'existence d'un vecteur propre de K pour la valeur λ.

Partie II

Soit K un opérateur compact dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie et soit A_0 un opérateur borné sur $\mathcal{H}$, qui commute avec K.

1. Montrer en utilisant I.4. que si K a un rayon spectral $\rho(K)$ non nul, alors il existe un sous-espace vectoriel fermé E non trivial ($E \neq \{0\}$, $E \neq \mathcal{H}$), invariant par K et A_0.
2. On suppose dorénavant que $\|K\| = 1$. Montrer qu'il existe un vecteur y tel que $\|y\| > 1$ et $\|Ky\| > 1$.

Pour tout vecteur $x \in \mathcal{H}$ non nul, on pose $E_x = \{Ax : A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), AK = KA\}$.

3. Montrer que l'adhérence de E_x est un sous-espace vectoriel fermé non nul, invariant par A_0.

4.a On suppose que E_x est dense pour tout x non nul. En utilisant la compacité de $\overline{K(B(y,1))}$ où $B(y,1)$ est la boule ouverte de centre y et de rayon 1, montrer qu'il existe un nombre fini d'opérateurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui commutent avec K et tels que

$$\forall z \in B(y,1),\ \exists i,\ 1 \leq i \leq n \text{ et } A_iK.z \in B(y,1).$$

4.b En itérant le résultat obtenu en 4.a, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ et, pour tout entier n, un opérateur C_n de norme majorée par c^n tel que $C_nK^n.y \in B(y,1)$.

En déduire que l'hypothèse faite au début de la question 4.a implique $\rho(K) > 0$.

5. Montrer que si K est compact et de rayon spectral nul, alors il existe un sous-espace invariant non trivial pour A_0.