MT404 **Examen du 28 janvier 2002**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé.

Exercice I

— On considère un espace de Hilbert complexe H.

1. Si $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est hermitien et vérifie $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}$ tel que P soit l'application de projection orthogonale de H sur E.

— On suppose que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est hermitien, et que l'intervalle ouvert $]0,1[$ est disjoint du spectre $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. On considère la fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \min(1, \max(0,t))$.

2. Montrer que $f(\mathrm{T})$ est le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{H}$. Montrer que E_1 est stable par T.

— On suppose maintenant que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$.

3. Montrer que $\mathrm{E}_1 \neq \{0\}$. Montrer que la restriction de T au sous-espace E_1 définit un opérateur inversible $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1)$.

Exercice II

— On désigne par E l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2([0,1], dt)$ et on pose pour toute $f \in \mathrm{E}$

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{T}f)(x) = i\, \mathrm{e}^{i\pi x}\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t}\, f(t)\, dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-i\pi t}\, f(t)\, dt\Big).$$

1. Vérifier que pour toute $f \in \mathrm{E}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0,1]$, bornée par $\|f\|_{\mathrm{E}}$; vérifier que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2. Montrer que pour toute suite (f_n) dans la boule unité de E qui converge faiblement vers une fonction $f \in \mathrm{E}$, la suite de fonctions $(\mathrm{T}f_n)$ converge simplement vers $\mathrm{T}f$ sur $[0,1]$. En déduire que $\lim_n \|\mathrm{T}f_n - \mathrm{T}f\|_{\mathrm{E}} = 0$.

3. Montrer que T est un opérateur compact de E dans E. Montrer que T est hermitien.

4. Montrer que lorsque f est continue sur $[0,1]$, la fonction $\mathrm{T}f$ est dérivable et vérifie une équation différentielle simple. Comparer $(\mathrm{T}f)(0)$ et $(\mathrm{T}f)(1)$. Déterminer les valeurs propres non nulles de T, et en déduire le spectre de T.

Exercice III

— On considère les opérateurs S et L sur l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{E} = \ell_2(\mathbb{N})$, qui associent à chaque vecteur $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E le vecteur $\mathrm{S}(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = x_n$ pour tout $n \geq 0$, et le vecteur $\mathrm{L}(x) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $z_n = x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Vérifier que S est isométrique de E dans E, et que L est l'adjoint de S.

2. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$ est injectif et d'image dense.

— On considère l'image de l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$, notée $\mathrm{D} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})$. Pour tout $x \in \mathrm{D}$ on désigne par $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})^{-1}(x)$ l'unique vecteur $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})(y)$. On définit un opérateur non borné T sur E, de domaine $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{D}$, en posant $\mathrm{T}x = (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}$.

3. Vérifier que T est densément défini, et fermé.

4. Montrer que l'opérateur $\mathrm{T}_1 = i\,(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + \mathrm{S}) \circ \mathrm{T}$ est un opérateur symétrique.

5. Montrer que $\mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est surjectif de D sur E, mais que $(\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(\mathrm{D}) \neq \mathrm{E}$. En déduire que T_1 n'admet aucune extension qui soit un opérateur autoadjoint sur E.