Exercice I

- On considère un espace de Hilbert complexe H.
- 1. Si $P \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien et vérifie $P^2 = P$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $E \subset H$ tel que P soit l'application de projection orthogonale de H sur E.

Bien entendu il faut prendre E = P(H); puisque $P^2 = P$, on sait que P est un projecteur, et $E = \ker(\mathrm{Id}_H - P)$ est un sous-espace vectoriel, fermé puisque P est continu. Soient $x \in H$ et y = P(x); on a pour tout $z \in E$, sachant que z = Pz

$$\langle x - y, z \rangle = \langle x, P(z) \rangle - \langle P(x), z \rangle = 0$$

puisque P est hermitien. On a bien vérifié pour le vecteur y = Px les propriétés caractéristiques de la projection orthogonale de x sur E : le vecteur x - y est orthogonal à E et $y \in E$.

- On suppose que $T \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien, et que l'intervalle ouvert]0,1[est disjoint du spectre Sp(T). On considère la fonction continue f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \min(1, \max(0, t))$.
- 2. Montrer que f(T) est le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé $E_1 \subset H$. Montrer que E_1 est stable par T.

Puisque T est hermitien, on sait que $\operatorname{Sp}(T) \subset \mathbb{R}$; par ailleurs, $K = \operatorname{Sp}(T)$ est compact et non vide. Si t < 0, on a f(t) = 0 et si $t \ge 1$, on a f(t) = 1. Si g désigne la restriction de f au spectre K, on voit que g(t) = 0 ou g(t) = 1 pour tout $t \in K$, donc $g^2 = g$ dans C(K). D'après les propriétés d'homomorphisme du calcul fonctionnel, $f(T) = g(T) = g^2(T) = g(T) \circ g(T)$ est un projecteur; comme g est réelle, g(T) est hermitien. C'est donc un projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé E_1 , égal à l'image de g(T).

Si $y \in E_1$, on a g(T)y = y, donc $Ty = T \circ g(T)y = g(T)(Ty) \in E_1$. Le sous-espace E_1 est donc stable par T (et en fait stable par tout opérateur de la forme h(T), h continue sur K).

- On suppose maintenant que $1 \in Sp(T)$.
- 3. Montrer que $E_1 \neq \{0\}$. Montrer que la restriction de T au sous-espace E_1 définit un opérateur inversible $T_1 \in \mathcal{L}(E_1)$.

Puisque $1 \in K = Sp(T)$ et g(1) = f(1) = 1, on aura $||g||_{C(K)} \ge 1$, donc $||g(T)|| = ||g||_{C(K)} > 0$, ce qui montre que g(T) n'est pas nul, donc $E_1 \ne \{0\}$.

Considérons la fonction continue h définie en posant h(t) = 1 si t < 1 et h(t) = 1/t si $t \ge 1$. On va montrer que E_1 est stable par l'opérateur borné h(T), et que la restriction de h(T) à E_1 est l'inverse de la restriction de T à E_1 .

La stabilité de E_1 par h(T) se montre comme pour $T: si \ y \in E_1$, on a $g(T) \ y = y$, donc $h(T) \ y = h(T) \circ g(T) \ y = g(T) \ (h(T) \ y) \in E_1$. On remarque ensuite que $g \ i_K \ h = g$ dans C(K) (on a posé $i_K(t) = t$ pour tout $t \in K$); on aura donc $g(T) \circ T \circ h(T) = g(T)$ dans $\mathcal{L}(H)$, et pour tout y dans E_1

$$(T \circ h(T)) y = (T \circ h(T)) (g(T) y) = g(T) \circ T \circ h(T) y = g(T) y = y,$$

et de même dans l'autre sens

$$(h(T) \circ T) y = g(T) \circ T \circ h(T) y = g(T) y = y.$$

Si $S_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ désigne la restriction de h(T) et $T_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ celle de T, on aura pour $y \in E_1$, d'abord $S_1 y = h(T) y \in E_1$, puis $T_1(S_1 y) = T(S_1 y) = T(h(T) y) = y$; on a donc $T_1S_1 = Id_{E_1}$ et de même on montrerait que $S_1T_1 = Id_{E_1}$.

Exercice II

— On désigne par E l'espace de Hilbert complexe $E = L_2([0,1],dt)$ et on pose pour toute $f \in E$

$$\forall x \in [0, 1], \quad (Tf)(x) = i e^{i\pi x} \left(\int_0^x e^{-i\pi t} f(t) dt - \int_x^1 e^{-i\pi t} f(t) dt \right).$$

1. Vérifier que pour toute $f \in E$, la fonction Tf est continue sur [0,1], bornée par $||f||_E$; vérifier que $T \in \mathcal{L}(E)$.

La fonction $t \to e^{-i\pi t} f(t)$ est intégrable sur [0,1], donc $x \to \int_0^x e^{-i\pi t} f(t) dt$ (et l'autre intégrale $x \to \int_x^1 e^{-i\pi t} f(t) dt$ aussi) est continue en $x \in [0,1]$, donc Tf aussi. En majorant par les modules on voit que

$$|(\mathrm{T}f)(x)| \le \int_0^x |f(t)| \, dt + \int_x^1 |f(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t)| \, dt \le ||f||_{\mathrm{E}}$$

pour tout $x \in [0,1]$. Il est à peu près évident que T est linéaire en f (linéarité de l'intégrale); l'inégalité précédente donne la continuité de T, avec de plus l'estimation $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

2. Montrer que pour toute suite (f_n) dans la boule unité de E qui converge faiblement vers une fonction $f \in E$, la suite de fonctions (Tf_n) converge simplement vers Tf sur [0,1]. En déduire que $\lim_n ||Tf_n - Tf||_E = 0$.

Désignons par **e** la fonction $t \to \mathbf{e}(t) = e^{i\pi t}$. On peut écrire avec les produits scalaires dans E, pour tout $x \in [0,1]$

$$(\mathbf{T}f_n)(x) = i e^{i\pi x} \left(\langle f_n, \mathbf{1}_{(0,x)} \mathbf{e} \rangle - \langle f_n, \mathbf{1}_{(x,1)} \mathbf{e} \rangle \right)$$

qui tend par définition de la convergence faible vers

$$i e^{i\pi x} \left(\langle f, \mathbf{1}_{(0,x)} \mathbf{e} \rangle - \langle f, \mathbf{1}_{(x,1)} \mathbf{e} \rangle \right) = (\mathrm{T}f)(x).$$

On a aussi $|(Tf_n)(x)| \le ||f_n||_E \le 1$ pour tout n, et donc $|(Tf)(x)| \le 1$ à la limite; la suite des fonctions $x \to |(Tf_n)(x) - (Tf)(x)|^2$ tend simplement vers 0 sur [0,1], en étant majorée par $(1+1)^2 = 4$; d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que

$$\|(\mathbf{T}f_n) - (\mathbf{T}f)\|_{\mathbf{E}}^2 = \int_0^1 |(\mathbf{T}f_n)(x) - (\mathbf{T}f)(x)|^2 dx$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que T est un opérateur compact de E dans E. Montrer que T est hermitien. Il nous faut montrer que toute suite (g_n) dans l'image $T(B_E)$ de la boule unité fermée B_E admet des sous-suites convergentes (en norme); une telle suite est de la forme $g_n = Tf_n$, où (f_n) est une suite dans B_E . On sait qu'on peut trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui converge faiblement vers une limite $f \in B_E$; d'après la question précédente, la sous-suite (Tf_{n_j}) converge en norme vers Tf. On a ainsi montré la compacité de T.

Posons $k(x,t) = \mathbf{1}_{(0,x)}(t) - \mathbf{1}_{(x,1)}(t)$ et calculons, en utilisant Fubini et l'antisymétrie de la fonction k

$$\begin{split} \langle \mathrm{T}f,g\rangle &= \int_0^1 (\mathrm{T}f)(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \\ \int_0^1 \Big(i\,\mathrm{e}^{i\pi x}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi t}\,k(x,t)f(t)\,dt\Big)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 \int_0^1 i\,\mathrm{e}^{i\pi x - i\pi t}\,k(x,t)f(t)\overline{g(x)}\,dt\,dx = \\ \int_0^1 f(t)\left(\overline{-i\,\mathrm{e}^{i\pi t}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi x}\,k(x,t)g(x)\,dx}\right)\,dt = \\ \int_0^1 f(t)\left(\overline{i\,\mathrm{e}^{i\pi t}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi x}\,k(t,x)g(x)\,dx}\right)\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{(\mathrm{T}g)(t)}\,dt. \end{split}$$

L'utilisation de Fubini est justifiée par l'intégrabilité sur $[0,1]^2$ de la fonction

$$F(x,t) = i e^{i\pi x - i\pi t} k(x,t) f(t) \overline{g(x)}.$$

4. Montrer que lorsque f est continue sur [0,1], la fonction Tf est dérivable et vérifie une équation différentielle simple. Comparer (Tf)(0) et (Tf)(1). Déterminer les valeurs propres non nulles de T, et en déduire le spectre de T.

La fonction $t \to e^{-i\pi t} f(t)$ est continue, donc $x \to \int_0^x e^{-i\pi t} f(t) dt$ (et l'autre intégrale aussi) est dérivable en $x \in [0, 1]$, donc Tf aussi. De plus le calcul de la dérivée donne

$$(\mathrm{T}f)'(x) = i\pi (\mathrm{T}f)(x) + i e^{i\pi x} (e^{-i\pi x} f(x)) - i e^{i\pi x} (-e^{-i\pi x} f(x)) = i\pi (\mathrm{T}f)(x) + 2i f(x).$$

Si $Tf_0 = \lambda f_0$ avec $\lambda \neq 0$ et $f_0 \neq 0_E$, on sait déjà que $\lambda \in Sp(T)$, donc λ est réel. Ensuite $f_0 = \lambda^{-1}Tf_0$ est continue d'après 1. puis dérivable par ce qui précède, et vérifie l'équation

$$f_0' = \lambda^{-1}(Tf_0)' = \lambda^{-1}(i\pi(Tf_0) + 2if_0) = i(\pi + 2\lambda^{-1})f_0.$$

Si on pose $\omega = \pi + 2\lambda^{-1}$ on a $f_0(x) = f_0(0)$ $e^{i\omega x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs,

$$(\mathbf{T}f)(0) = -i e^{i\pi \cdot 0} \int_0^1 e^{-i\pi t} f(t) dt = i e^{i\pi} \int_0^1 e^{-i\pi t} f(t) dt = (\mathbf{T}f)(1)$$

pour toute f, donc $f_0(0) = f_0(1)$ et $e^{i\omega} = 1$. Ceci impose que $\omega = 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda^{-1} = (k-1/2)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut vérifier que réciproquement, chaque $\lambda_k = (k-1/2)^{-1}\pi^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, est valeur propre de T.

Le spectre de T est l'adhérence de l'ensemble de ces valeurs, ce qui ne fait que rajouter le point 0, et donc $Sp(T) = \{0\} \cup \{(k-1/2)^{-1}\pi^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}.$

Exercice III

- On considère les opérateurs S et L sur l'espace de Hilbert complexe $E = \ell_2(\mathbb{N})$, qui associent à chaque vecteur $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E le vecteur $S(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = x_n$ pour tout $n \geq 0$, et le vecteur $L(x) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $z_n = x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
- 1. Vérifier que S est isométrique de E dans E, et que L est l'adjoint de S.

Pour tout $x \in E$ on a, en posant $S(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\|\mathbf{S}x\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Si $x, v \in E$ et $S(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $L(v) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $z_n = v_{n+1}$ pour tout $n \ge 0$, on aura

$$\langle Sx, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \overline{v}_n = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} y_{n+1} \overline{v}_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{z}_n = \langle x, Lv \rangle$$

ce qui montre bien que $L = S^*$.

2. Montrer que Id_E –S est injectif et d'image dense.

Cela équivaut à Id_{E} –S et $(\operatorname{Id}_{E}$ –S)* = Id_{E} –S* injectifs; si $\operatorname{S}(x) = x$, on a d'abord $x_{0} = y_{0} = 0$, puis $x_{n+1} = y_{n+1} = x_{n} = 0$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence. Si $\operatorname{L}(x) = x$, on a $x_{n} = x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, la suite x est constante, donc nulle puisque $\sum |x_{n}|^{2} < +\infty$.

- On considère l'image de l'opérateur $\operatorname{Id}_E S$, notée $D = \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E S)$. Pour tout $x \in D$ on désigne par $(\operatorname{Id}_E S)^{-1}(x)$ l'unique vecteur $y \in E$ tel que $x = (\operatorname{Id}_E S)(y)$. On définit un opérateur non borné T sur E, de domaine $\operatorname{dom}(T) = D$, en posant $Tx = (\operatorname{Id}_E S)^{-1}(x)$ pour tout $x \in D$.
 - 3. Vérifier que T est densément défini, et fermé.

On a dit que l'image de $Id_E - S$ est dense, et c'est le domaine de T. Le graphe de T est obtenu à partir de celui de l'opérateur continu $Id_E - S$ par l'isomorphisme de $E \times E$ qui échange les deux coordonnées, donc Gr(T) est fermé.

4. Montrer que l'opérateur $T_1 = i (Id_E + S) \circ T$ est un opérateur symétrique.

Puisque $\operatorname{Id}_E + S$ est défini partout, on a $\operatorname{dom}(T_1) = \operatorname{dom}(T) = D$. Si on pose $x_j = (\operatorname{Id}_E - S)(y_j)$ pour j = 1, 2, on aura $\operatorname{T} x_j = y_j$ et

$$\langle \mathbf{T}_1 x_1, x_2 \rangle = i \langle (\mathbf{Id_E} + \mathbf{S})(\mathbf{T}x_1), x_2 \rangle = i \langle (\mathbf{Id_E} + \mathbf{S})(y_1), (\mathbf{Id_E} - \mathbf{S})(y_2) \rangle = i \left(\langle y_1, y_2 \rangle - \langle \mathbf{S}y_1, \mathbf{S}y_2 \rangle - \langle y_1, \mathbf{S}y_2 \rangle + \langle \mathbf{S}y_1, y_2 \rangle \right) = i \left(-\langle y_1, \mathbf{S}y_2 \rangle + \langle \mathbf{S}y_1, y_2 \rangle \right)$$

où on a utilisé le fait que l'isométrie S conserve le produit scalaire. De l'autre côté,

$$\langle x_1, \mathcal{T}_1 x_2 \rangle = \langle (\mathcal{I}d_{\mathcal{E}} - \mathcal{S})(y_1), i(\mathcal{I}d_{\mathcal{E}} + \mathcal{S})(y_2) \rangle =$$

$$-i \Big(\langle y_1, y_2 \rangle - \langle \mathcal{S}y_1, \mathcal{S}y_2 \rangle + \langle y_1, \mathcal{S}y_2 \rangle - \langle \mathcal{S}y_1, y_2 \rangle \Big) = i \Big(-\langle y_1, \mathcal{S}y_2 \rangle + \langle \mathcal{S}y_1, y_2 \rangle \Big).$$

5. Montrer que $T_1 + i \operatorname{Id}_E$ est surjectif de D sur E, mais que $(T_1 - i \operatorname{Id}_E)(D) \neq E$. En déduire que T_1 n'admet aucune extension qui soit un opérateur autoadjoint sur E.

Soit $y \in E$ quelconque; posons $x = (Id_E - S)(y)$; on a alors T(x) = y et $T_1(x) = i(Id_E + S)(y)$, donc

$$(T_1 + i \operatorname{Id}_E)(x) = i(\operatorname{Id}_E + S)(y) + i(\operatorname{Id}_E - S)(y) = 2i y.$$

On voit que si on pose $x_1 = -ix/2$, alors $x_1 \in D$ et $(T_1 + iId_E)(x_1) = y$, ce qui montre la surjectivité de $T_1 + iId_E$. On a aussi

$$(T_1 - i Id_E)(x) = i(Id_E + S)(y) - i(Id_E - S)(y) = 2i S(y)$$

qui montre que l'image de $T_1 - i \operatorname{Id}_E$ est contenue dans l'image de S; cette image est différente de E (tous les vecteurs y de Im S vérifient $y_0 = 0$).

Supposons que T_2 soit une extension autoadjointe de T_1 ; alors le spectre de T_2 est contenu dans \mathbb{R} , la valeur -i est régulière pour T_2 et $T_2+i\operatorname{Id}_E$ est donc une bijection de $D_2\supset D$ sur E; mais la restriction de $T_2+i\operatorname{Id}_E$ à D, égale à $T_1+i\operatorname{Id}_E$, est déjà surjective de D sur E: ceci n'est possible que si $D_2=D$.

La seule extension autoadjointe possible serait T_1 lui-même, mais T_1 n'est pas autoadjoint puisque $T_1 - i \operatorname{Id}_E$ n'est pas une bijection de D sur E (la valeur i n'est pas régulière pour T_1 , alors qu'elle l'est pour tout autoadjoint).