Exercice I

— *On considère un espace de Hilbert complexe* H.

1. Si $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est hermitien et vérifie* $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$*, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé* $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}$ *tel que* P *soit l'application de projection orthogonale de* H *sur* E.

Bien entendu il faut prendre $\mathrm{E} = \mathrm{P}(\mathrm{H})$; puisque $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$, on sait que P est un projecteur, et $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{H} - \mathrm{P})$ est un sous-espace vectoriel, fermé puisque P est continu. Soient $x \in \mathrm{H}$ et $y = \mathrm{P}(x)$; on a pour tout $z \in \mathrm{E}$, sachant que $z = \mathrm{P}z$

$$\langle x - y, z\rangle = \langle x, \mathrm{P}(z)\rangle - \langle \mathrm{P}(x), z\rangle = 0$$

puisque P est hermitien. On a bien vérifié pour le vecteur $y = \mathrm{P}x$ les propriétés caractéristiques de la projection orthogonale de x sur E : le vecteur $x - y$ est orthogonal à E et $y \in \mathrm{E}$.

— *On suppose que* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est hermitien, et que l'intervalle ouvert* $]0,1[$ *est disjoint du spectre* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$*. On considère la fonction continue* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(t) = \min(1, \max(0,t))$.

2. Montrer que $f(\mathrm{T})$ *est le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé* $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{H}$*. Montrer que* E_1 *est stable par* T.

Puisque T est hermitien, on sait que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}$; par ailleurs, $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ est compact et non vide. Si $t < 0$, on a $f(t) = 0$ et si $t \geq 1$, on a $f(t) = 1$. Si g désigne la restriction de f au spectre K, on voit que $g(t) = 0$ ou $g(t) = 1$ pour tout $t \in \mathrm{K}$, donc $g^2 = g$ dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$. D'après les propriétés d'homomorphisme du calcul fonctionnel, $f(\mathrm{T}) = g(\mathrm{T}) = g^2(\mathrm{T}) = g(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})$ est un projecteur ; comme g est réelle, $g(\mathrm{T})$ est hermitien. C'est donc un projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé E_1, égal à l'image de $g(\mathrm{T})$.

Si $y \in \mathrm{E}_1$, on a $g(\mathrm{T})\, y = y$, donc $\mathrm{T}\, y = \mathrm{T} \circ g(\mathrm{T})\, y = g(\mathrm{T})(\mathrm{T}y) \in \mathrm{E}_1$. Le sous-espace E_1 est donc stable par T (et en fait stable par tout opérateur de la forme $h(\mathrm{T})$, h continue sur K).

— *On suppose maintenant que* $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$.

3. Montrer que $\mathrm{E}_1 \neq \{0\}$*. Montrer que la restriction de* T *au sous-espace* E_1 *définit un opérateur inversible* $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1)$.

Puisque $1 \in \mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ et $g(1) = f(1) = 1$, on aura $\|g\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \geq 1$, donc $\|g(\mathrm{T})\| = \|g\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} > 0$, ce qui montre que $g(\mathrm{T})$ n'est pas nul, donc $\mathrm{E}_1 \neq \{0\}$.

Considérons la fonction continue h définie en posant $h(t) = 1$ si $t < 1$ et $h(t) = 1/t$ si $t \geq 1$. On va montrer que E_1 est stable par l'opérateur borné $h(\mathrm{T})$, et que la restriction de $h(\mathrm{T})$ à E_1 est l'inverse de la restriction de T à E_1.

La stabilité de E_1 par $h(\mathrm{T})$ se montre comme pour T : si $y \in \mathrm{E}_1$, on a $g(\mathrm{T})\, y = y$, donc $h(\mathrm{T})\, y = h(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})\, y = g(\mathrm{T})\, (h(\mathrm{T})\, y) \in \mathrm{E}_1$. On remarque ensuite que $g\, i_\mathrm{K}\, h = g$ dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ (on a posé $i_\mathrm{K}(t) = t$ pour tout $t \in \mathrm{K}$) ; on aura donc $g(\mathrm{T}) \circ \mathrm{T} \circ h(\mathrm{T}) = g(\mathrm{T})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, et pour tout y dans E_1

$$(\mathrm{T} \circ h(\mathrm{T}))\, y = (\mathrm{T} \circ h(\mathrm{T}))\, (g(\mathrm{T})\, y) = g(\mathrm{T}) \circ \mathrm{T} \circ h(\mathrm{T})\, y = g(\mathrm{T})\, y = y,$$

et de même dans l'autre sens

$$(h(\mathrm{T}) \circ \mathrm{T})\, y = g(\mathrm{T}) \circ \mathrm{T} \circ h(\mathrm{T})\, y = g(\mathrm{T})\, y = y.$$

Si $\mathrm{S}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1)$ désigne la restriction de $h(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1)$ celle de T, on aura pour $y \in \mathrm{E}_1$, d'abord $\mathrm{S}_1\, y = h(\mathrm{T})\, y \in \mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{T}_1(\mathrm{S}_1\, y) = \mathrm{T}(\mathrm{S}_1\, y) = \mathrm{T}(h(\mathrm{T})\ y) = y$; on a donc $\mathrm{T}_1\mathrm{S}_1 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_1}$ et de même on montrerait que $\mathrm{S}_1\mathrm{T}_1 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_1}$.

Exercice II

— *On désigne par* E *l'espace de Hilbert complexe* $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2([0,1], dt)$ *et on pose pour toute* $f \in \mathrm{E}$

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{T}f)(x) = i\ \mathrm{e}^{i\pi x}\Bigl(\int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt\Bigr).$$

1. Vérifier que pour toute $f \in \mathrm{E}$*, la fonction* $\mathrm{T}f$ *est continue sur* $[0,1]$*, bornée par* $\|f\|_{\mathrm{E}}$ *; vérifier que* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$*.*

La fonction $t \to \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)$ est intégrable sur $[0,1]$, donc $x \to \int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt$ (et l'autre intégrale $x \to \int_x^1 \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt$ aussi) est continue en $x \in [0,1]$, donc $\mathrm{T}f$ aussi. En majorant par les modules on voit que

$$|(\mathrm{T}f)(x)| \le \int_0^x |f(t)|\,dt + \int_x^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \|f\|_{\mathrm{E}}$$

pour tout $x \in [0,1]$. Il est à peu près évident que T est linéaire en f (linéarité de l'intégrale) ; l'inégalité précédente donne la continuité de T, avec de plus l'estimation $\|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \le 1$.

2. Montrer que pour toute suite (f_n) *dans la boule unité de* E *qui converge faiblement vers une fonction* $f \in \mathrm{E}$*, la suite de fonctions* $(\mathrm{T}f_n)$ *converge simplement vers* $\mathrm{T}f$ *sur* $[0,1]$*. En déduire que* $\lim_n \|\mathrm{T}f_n - \mathrm{T}f\|_{\mathrm{E}} = 0$*.*

Désignons par $\mathbf{e}$ la fonction $t \to \mathbf{e}(t) = \mathrm{e}^{i\pi t}$. On peut écrire avec les produits scalaires dans E, pour tout $x \in [0,1]$

$$(\mathrm{T}f_n)(x) = i\ \mathrm{e}^{i\pi x}\ \bigl(\langle f_n, \mathbf{1}_{(0,x)}\,\mathbf{e}\rangle - \langle f_n, \mathbf{1}_{(x,1)}\,\mathbf{e}\rangle\bigr)$$

qui tend par définition de la convergence faible vers

$$i\ \mathrm{e}^{i\pi x}\ \bigl(\langle f, \mathbf{1}_{(0,x)}\,\mathbf{e}\rangle - \langle f, \mathbf{1}_{(x,1)}\,\mathbf{e}\rangle\bigr) = (\mathrm{T}f)(x).$$

On a aussi $|(\mathrm{T}f_n)(x)| \le \|f_n\|_{\mathrm{E}} \le 1$ pour tout n, et donc $|(\mathrm{T}f)(x)| \le 1$ à la limite ; la suite des fonctions $x \to |(\mathrm{T}f_n)(x) - (\mathrm{T}f)(x)|^2$ tend simplement vers 0 sur $[0,1]$, en étant majorée par $(1+1)^2 = 4$; d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que

$$\|(\mathrm{T}f_n) - (\mathrm{T}f)\|_{\mathrm{E}}^2 = \int_0^1 |(\mathrm{T}f_n)(x) - (\mathrm{T}f)(x)|^2\,dx$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que T *est un opérateur compact de* E *dans* E*. Montrer que* T *est hermitien.*

Il nous faut montrer que toute suite (g_n) dans l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{E}})$ de la boule unité fermée B_{E} admet des sous-suites convergentes (en norme) ; une telle suite est de la forme $g_n = \mathrm{T}f_n$, où (f_n) est une suite dans B_{E}. On sait qu'on peut trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui converge faiblement vers une limite $f \in \mathrm{B}_{\mathrm{E}}$; d'après la question précédente, la sous-suite $(\mathrm{T}f_{n_j})$ converge en norme vers $\mathrm{T}f$. On a ainsi montré la compacité de T.

Posons $k(x,t) = \mathbf{1}_{(0,x)}(t) - \mathbf{1}_{(x,1)}(t)$ et calculons, en utilisant Fubini et l'antisymétrie de la fonction k

$$\langle \mathrm{T}f, g\rangle = \int_0^1 (\mathrm{T}f)(x)\,\overline{g(x)}\,dx =$$

$$\int_0^1 \Bigl(i\,\mathrm{e}^{i\pi x}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi t}\,k(x,t) f(t)\,dt\Bigr)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1\int_0^1 i\,\mathrm{e}^{i\pi x - i\pi t}\,k(x,t) f(t)\overline{g(x)}\,dt\,dx =$$

$$\int_0^1 f(t)\left(\overline{-i\,\mathrm{e}^{i\pi t}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi x}\,k(x,t) g(x)\,dx}\right)dt =$$

$$\int_0^1 f(t)\left(\overline{i\,\mathrm{e}^{i\pi t}\Bigl(\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi x}\,k(t,x) g(x)\,dx}\right)dt = \int_0^1 f(t)\overline{(\mathrm{T}g)(t)}\,dt.$$

L'utilisation de Fubini est justifiée par l'intégrabilité sur $[0,1]^2$ de la fonction

$$\mathrm{F}(x,t) = i\ \mathrm{e}^{i\pi x - i\pi t}\,k(x,t) f(t)\overline{g(x)}.$$

4. Montrer que lorsque f est continue sur $[0,1]$, la fonction $\mathrm{T}f$ est dérivable et vérifie une équation différentielle simple. Comparer $(\mathrm{T}f)(0)$ et $(\mathrm{T}f)(1)$. Déterminer les valeurs propres non nulles de T, et en déduire le spectre de T.

La fonction $t \to \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)$ est continue, donc $x \to \int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt$ (et l'autre intégrale aussi) est dérivable en $x \in [0,1]$, donc $\mathrm{T}f$ aussi. De plus le calcul de la dérivée donne

$$(\mathrm{T}f)'(x) = i\pi\,(\mathrm{T}f)(x) + i\,\mathrm{e}^{i\pi x}\big(\mathrm{e}^{-i\pi x} f(x)\big) - i\,\mathrm{e}^{i\pi x}\big(-\mathrm{e}^{-i\pi x} f(x)\big) = i\pi\,(\mathrm{T}f)(x) + 2i\,f(x).$$

Si $\mathrm{T}f_0 = \lambda f_0$ avec $\lambda \neq 0$ et $f_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$, on sait déjà que $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, donc λ est réel. Ensuite $f_0 = \lambda^{-1}\mathrm{T}f_0$ est continue d'après *1.* puis dérivable par ce qui précède, et vérifie l'équation

$$f_0' = \lambda^{-1}(\mathrm{T}f_0)' = \lambda^{-1}(i\pi(\mathrm{T}f_0) + 2if_0) = i(\pi + 2\lambda^{-1})f_0.$$

Si on pose $\omega = \pi + 2\lambda^{-1}$ on a $f_0(x) = f_0(0)\ \mathrm{e}^{i\omega x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs,

$$(\mathrm{T}f)(0) = -i\,\mathrm{e}^{i\pi\,\cdot\,0}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt = i\,\mathrm{e}^{i\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,dt = (\mathrm{T}f)(1)$$

pour toute f, donc $f_0(0) = f_0(1)$ et $\mathrm{e}^{i\omega} = 1$. Ceci impose que $\omega = 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda^{-1} = (k-1/2)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut vérifier que réciproquement, chaque $\lambda_k = (k-1/2)^{-1}\pi^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, est valeur propre de T.

Le spectre de T est l'adhérence de l'ensemble de ces valeurs, ce qui ne fait que rajouter le point 0, et donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{0\} \cup \{(k-1/2)^{-1}\pi^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice III

— *On considère les opérateurs S et L sur l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{E} = \ell_2(\mathbb{N})$, qui associent à chaque vecteur $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E le vecteur $\mathrm{S}(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = x_n$ pour tout $n \geq 0$, et le vecteur $\mathrm{L}(x) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $z_n = x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.*

1. Vérifier que S est isométrique de E dans E, et que L est l'adjoint de S.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a, en posant $\mathrm{S}(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|\mathrm{S}x\|_{\mathrm{E}}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2 = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{\mathrm{E}}^2.$$

Si $x, v \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{S}(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{L}(v) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $z_n = v_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, on aura

$$\langle \mathrm{S}x, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n\overline{v}_n = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} y_{n+1}\overline{v}_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{z}_n = \langle x, \mathrm{L}v\rangle$$

ce qui montre bien que $\mathrm{L} = \mathrm{S}^*$.

2. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$ est injectif et d'image dense.

Cela équivaut à $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$ et $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}^*$ injectifs ; si $\mathrm{S}(x) = x$, on a d'abord $x_0 = y_0 = 0$, puis $x_{n+1} = y_{n+1} = x_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence. Si $\mathrm{L}(x) = x$, on a $x_n = x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, la suite x est constante, donc nulle puisque $\sum |x_n|^2 < +\infty$.

— *On considère l'image de l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$, notée $\mathrm{D} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})$. Pour tout $x \in \mathrm{D}$ on désigne par $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})^{-1}(x)$ l'unique vecteur $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})(y)$. On définit un opérateur non borné T sur E, de domaine $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{D}$, en posant $\mathrm{T}x = (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S})^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}$.*

3. Vérifier que T est densément défini, et fermé.

On a dit que l'image de $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$ est dense, et c'est le domaine de T. Le graphe de T est obtenu à partir de celui de l'opérateur continu $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{S}$ par l'isomorphisme de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ qui échange les deux coordonnées, donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ est fermé.

4. Montrer que l'opérateur $\mathrm{T}_1 = i\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S}) \circ \mathrm{T}$ *est un opérateur symétrique.*

Puisque $\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S}$ est défini partout, on a $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{D}$. Si on pose $x_j = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y_j)$ pour $j = 1, 2$, on aura $\mathrm{T}x_j = y_j$ et

$$\langle \mathrm{T}_1 x_1, x_2 \rangle = i\langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(\mathrm{T}x_1), x_2 \rangle = i\langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(y_1), (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y_2) \rangle =$$

$$i\Big(\langle y_1, y_2 \rangle - \langle \mathrm{S}y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle - \langle y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle + \langle \mathrm{S}y_1, y_2 \rangle \Big) = i\Big(-\langle y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle + \langle \mathrm{S}y_1, y_2 \rangle \Big)$$

où on a utilisé le fait que l'isométrie S conserve le produit scalaire. De l'autre côté,

$$\langle x_1, \mathrm{T}_1 x_2 \rangle = \langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y_1), i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(y_2) \rangle =$$

$$-i\Big(\langle y_1, y_2 \rangle - \langle \mathrm{S}y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle + \langle y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle - \langle \mathrm{S}y_1, y_2 \rangle \Big) = i\Big(-\langle y_1, \mathrm{S}y_2 \rangle + \langle \mathrm{S}y_1, y_2 \rangle \Big).$$

5. Montrer que $\mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ *est surjectif de* D *sur* E*, mais que* $(\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(\mathrm{D}) \neq \mathrm{E}$*. En déduire que* T_1 *n'admet aucune extension qui soit un opérateur autoadjoint sur* E*.*

Soit $y \in \mathrm{E}$ quelconque ; posons $x = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y)$; on a alors $\mathrm{T}(x) = y$ et $\mathrm{T}_1(x) = i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(y)$, donc

$$(\mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(y) + i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y) = 2i\,y.$$

On voit que si on pose $x_1 = -ix/2$, alors $x_1 \in \mathrm{D}$ et $(\mathrm{T}_1 + i\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x_1) = y$, ce qui montre la surjectivité de $\mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On a aussi

$$(\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{S})(y) - i(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})(y) = 2i\,\mathrm{S}(y)$$

qui montre que l'image de $\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est contenue dans l'image de S ; cette image est différente de E (tous les vecteurs y de $\mathrm{Im}\,\mathrm{S}$ vérifient $y_0 = 0$).

Supposons que T_2 soit une extension autoadjointe de T_1 ; alors le spectre de T_2 est contenu dans $\mathbb{R}$, la valeur $-i$ est régulière pour T_2 et $\mathrm{T}_2 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est donc une bijection de $\mathrm{D}_2 \supset \mathrm{D}$ sur E ; mais la restriction de $\mathrm{T}_2 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ à D, égale à $\mathrm{T}_1 + i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, est déjà surjective de D sur E : ceci n'est possible que si $\mathrm{D}_2 = \mathrm{D}$.

La seule extension autoadjointe possible serait T_1 lui-même, mais T_1 n'est pas autoadjoint puisque $\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est pas une bijection de D sur E (la valeur i n'est pas régulière pour T_1, alors qu'elle l'est pour tout autoadjoint).