MT404 **Examen partiel du 17 novembre 2001**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé.

Exercice I

On désigne par μ la probabilité $dx/(2\pi)$ sur l'intervalle $[0,2\pi]$, et par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0,2\pi],\mu)$; on désigne par α un nombre réel tel que $0<\alpha<2\pi$ et tel que α/π soit irrationnel. Pour toute fonction $f\in\mathrm{H}$ on définit une nouvelle fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0,2\pi]$ par $(\mathrm{T}f)(x)=f(2\pi+x-\alpha)$ si $0\le x<\alpha$ et $(\mathrm{T}f)(x)=f(x-\alpha)$ si $\alpha\le x\le 2\pi$.

a. Montrer que $\|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}}=\|f\|_{\mathrm{H}}$ pour toute fonction $f\in\mathrm{H}$. Vérifier que T est une application linéaire de H dans H.

b. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on désigne par e_n la fonction définie par $e_n(x)=\mathrm{e}^{inx}$ pour $0\le x\le 2\pi$. Calculer $\mathrm{T}e_n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

c. Pour tout entier $\mathrm{K}\ge 1$ on pose $\mathrm{S_K}=\frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1}\mathrm{T}^k\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$; vérifier que $\|\mathrm{S_K}\|\le 1$. Montrer que $\lim_{\mathrm{K}\to+\infty}(\mathrm{S_K}e_n)=0_{\mathrm{H}}$ pour tout entier n non nul de $\mathbb{Z}$.

d. Montrer que pour toute fonction $f\in\mathrm{H}$, la suite $(\mathrm{S_K}f)_{\mathrm{K}}$ converge dans H vers une fonction constante qu'on déterminera.

Exercice II

1. On désigne par X l'ensemble des fonctions réelles F sur $[0,1]$ telles que $\mathrm{F}(0)=0$ et telles qu'il existe une constante M pour laquelle on ait $|\mathrm{F}(y)-\mathrm{F}(x)|\le \mathrm{M}\,|y-x|$ pour tous $x,y\in[0,1]$. On pose

$$\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{X}}=\sup\Big\{\Big|\frac{\mathrm{F}(y)-\mathrm{F}(x)}{y-x}\Big| : x,y\in[0,1],\ x\ne y\Big\}.$$

1.a. Vérifier que X est un espace vectoriel et que $\mathrm{F}\to\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{X}}$ est une norme sur X. Montrer que X est complet pour cette norme.

1.b. Montrer que les fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ et nulles en 0 forment un sous-espace vectoriel fermé de X (la suite de l'exercice ne dépend pas de cette question).

2. Dans les questions qui suivent, on désigne par F un élément fixé de X, tel que $\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{X}}\le 1$. Pour tout entier $\mathrm{N}\ge 1$ on désigne par $\mathrm{F_N}$ la fonction affine par morceaux telle que $\mathrm{F_N}(i/\mathrm{N})=\mathrm{F}(i/\mathrm{N})$ pour $i=0,\dots,\mathrm{N}$, de pente constante sur chaque intervalle $[i/\mathrm{N},(i+1)/\mathrm{N}]$, pour $i=0,\dots,\mathrm{N}-1$. On note $\|g\|_\infty$ la norme uniforme d'une fonction g continue sur $[0,1]$.

2.a. Montrer que $\|\mathrm{F_N}-\mathrm{F}\|_\infty\le 1/\mathrm{N}$ pour tout $\mathrm{N}\ge 1$.

2.b. Montrer que pour tout entier $\mathrm{N}\ge 1$, il existe une fonction en escalier f_{N} sur $[0,1]$ telle que $\mathrm{F_N}(x)=\int_0^x f_{\mathrm{N}}(t)\,dt$ et $|f_{\mathrm{N}}(x)|\le 1$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer qu'il existe une fonction g_{N} continue sur $[0,1]$ telle que $|g_{\mathrm{N}}|\le 1$ et $\int_0^1|g_{\mathrm{N}}(t)-f_{\mathrm{N}}(t)|\,dt<1/\mathrm{N}$.

2.c. En déduire que F est limite uniforme d'une suite $(\mathrm{G_N})$ de fonctions de classe C^1 nulles en 0 et telles que $\|\mathrm{G_N}\|_{\mathrm{X}}\le 1$ pour tout $\mathrm{N}\ge 1$.

3. On désigne encore par F un élément fixé de X, tel que $\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{X}}\le 1$. On définit une forme linéaire ℓ sur l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ nulles au point 1, en posant $\ell(\varphi)=-\int_0^1\mathrm{F}(t)\varphi'(t)\,dt$ pour toute fonction φ de classe C^1 telle que $\varphi(1)=0$.

3.a. Montrer en utilisant la question *2.c.* qu'on a $|\ell(\varphi)|\le\int_0^1|\varphi(t)|\,dt$ pour toute fonction φ de classe C^1 nulle au point 1. En déduire que ℓ se prolonge de façon unique en forme linéaire continue sur $\mathrm{L}_1([0,1],dt)$.

3.b. Montrer qu'il existe une fonction $f\in\mathrm{L}_\infty(0,1)$ telle que $\|f\|_\infty\le 1$ et $\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x\in[0,1]$.