MT404 **Corrigé de l'examen partiel du 17 novembre 2001**

Exercice I

On désigne par μ la probabilité $dx/(2\pi)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], \mu)$; on désigne par α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 2\pi$ et tel que α/π soit irrationnel. Pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$ on définit une nouvelle fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, 2\pi]$ par $(\mathrm{T}f)(x) = f(2\pi + x - \alpha)$ si $0 \le x < \alpha$ et $(\mathrm{T}f)(x) = f(x - \alpha)$ si $\alpha \le x \le 2\pi$.

a. Montrer que $\|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}} = \|f\|_{\mathrm{H}}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$. Vérifier que T est une application linéaire de H dans H.

On écrit pour $f \in \mathrm{H}$, avec deux changements de variable faciles,

$$\|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}}^2 = \int_0^\alpha |f(2\pi + x - \alpha)|^2 \, dx + \int_\alpha^{2\pi} |f(x - \alpha)|^2 \, dx =$$

$$\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} |f(y)|^2 \, dy + \int_0^{2\pi-\alpha} |f(y)|^2 \, dy = \|f\|_{\mathrm{H}}^2.$$

Pour la linéarité de T, si $f, g \in \mathrm{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a quand $0 \le x < \alpha$

$$(\mathrm{T}(f + \lambda g))(x) = (f + \lambda g)(2\pi + x - \alpha) = f(2\pi + x - \alpha) + \lambda g(2\pi + x - \alpha) = (\mathrm{T}f)(x) + \lambda(\mathrm{T}g)(x)$$

et de même pour $\alpha \le x \le 2\pi$,

$$(\mathrm{T}(f + \lambda g))(x) = (f + \lambda g)(x - \alpha) = (\mathrm{T}f)(x) + \lambda(\mathrm{T}g)(x),$$

d'où $\mathrm{T}(f + \lambda g) = \mathrm{T}f + \lambda \, \mathrm{T}g$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par e_n la fonction définie par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$ pour $0 \le x \le 2\pi$. Calculer $\mathrm{T}e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Quand $x < \alpha$ on a $(\mathrm{T}e_n)(x) = e_n(2\pi + x - \alpha) = \mathrm{e}^{in(x-\alpha)} = \mathrm{e}^{-in\alpha} \, e_n(x)$, et la même chose quand $x \ge \alpha$, donc $\mathrm{T}e_n = \mathrm{e}^{-in\alpha} \, e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

c. Pour tout entier $\mathrm{K} \ge 1$ on pose $\mathrm{S}_\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} \mathrm{T}^k \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$; vérifier que $\|\mathrm{S}_\mathrm{K}\| \le 1$. Montrer que $\lim_{\mathrm{K}\to+\infty} (\mathrm{S}_\mathrm{K} e_n) = 0_\mathrm{H}$ pour tout entier n non nul de $\mathbb{Z}$.

Puisque T est isométrique, toutes les puissances T^k sont aussi isométriques, donc $\|\mathrm{T}^k\| = 1$ pour tout $k \ge 0$ et

$$\|\mathrm{S}_\mathrm{K}\| = \Big\| \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} \mathrm{T}^k \Big\| \le \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} \|\mathrm{T}^k\| = 1.$$

D'après le calcul précédent on voit que $(\mathrm{T}^k e_n) = (\mathrm{e}^{-in\alpha})^k \, e_n$ pour tout entier $k \ge 0$, donc $\mathrm{S}_\mathrm{K} e_n = s_\mathrm{K} \, e_n$, avec $s_\mathrm{K} \in \mathbb{C}$ défini par

$$s_\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} \mathrm{e}^{-ink\alpha},$$

somme d'une progression géométrique, de raison $\mathrm{e}^{-in\alpha} \ne 1$ (parce que $n \ne 0$ et que α/π est irrationnel, il est impossible que $n\alpha = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$), donc

$$s_\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{e}^{-in\mathrm{K}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{-in\alpha} - 1}.$$

On a donc $|s_\mathrm{K}| \le 2 \, |\mathrm{e}^{-in\alpha} - 1|^{-1}/\mathrm{K}$ qui tend vers 0 quand K tend vers l'infini.

d. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$, la suite $(\mathrm{S_K} f)_\mathrm{K}$ converge dans H vers une fonction constante qu'on déterminera.

La fonction constante $e_0 = 1$ est invariante par T, donc $\mathrm{S_K} e_0 = e_0$ pour tout entier $\mathrm{K} \geq 1$. Si $g = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n \, e_n$ est une combinaison linéaire finie des fonctions de la base de Fourier, on a $\lim_\mathrm{K}(\mathrm{S_K} g) = c_0 \, e_0$, d'après la question précédente et la remarque ci-dessus.

Si $\varepsilon > 0$ est donné et si f est une fonction quelconque dans L_2, on peut trouver g comme ci-dessus, et telle que $\|f - g\|_\mathrm{H} < \varepsilon/2$ en prenant simplement

$$g = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \langle f, e_n \rangle \, e_n$$

pour N assez grand ; on aura pour tout K l'inégalité $\|\mathrm{S_K} f - \mathrm{S_K} g\|_\mathrm{H} \leq \|\mathrm{S_K}\| \, \|f - g\| < \varepsilon/2$, et pour K assez grand, disons $\mathrm{K} \geq \mathrm{K}_0(\varepsilon)$, on aura $\|\mathrm{S_K} g - c_0 \, e_0\|_\mathrm{H} < \varepsilon/2$. On a ici

$$c_0 = \langle f, e_0 \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \, \frac{dt}{2\pi}$$

et $\|\mathrm{S_K} f - c_0 \, e_0\|_\mathrm{H} < \varepsilon$ pour $\mathrm{K} \geq \mathrm{K}_0(\varepsilon)$. On a montré que la suite $(\mathrm{S_K} f)$ converge vers la fonction constante égale à la moyenne de f.

Exercice II

1. On désigne par X l'ensemble des fonctions réelles F sur $[0, 1]$ telles que $\mathrm{F}(0) = 0$ et telles qu'il existe une constante M pour laquelle on ait $|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{M} \, |y - x|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. On pose

$$\|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} = \sup \Bigl\{ \Bigl| \frac{\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)}{y - x} \Bigr| : x, y \in [0, 1], \, x \neq y \Bigr\}.$$

1.a. Vérifier que X est un espace vectoriel et que $\mathrm{F} \to \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X}$ est une norme sur X. Montrer que X est complet pour cette norme.

Montrons en même temps que X est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles sur $[0, 1]$ et que $\mathrm{F} \to \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X}$ est une norme sur X. Si $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathrm{X}$ et $x, y \in [0, 1]$ on a évidemment $(\mathrm{F} + \mathrm{G})(0) = 0$, et on écrit

$$|(\mathrm{F} + \mathrm{G})(y) - (\mathrm{F} + \mathrm{G})(x)| \leq |\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| + |\mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x)| \leq \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} \, |y - x| + \|\mathrm{G}\|_\mathrm{X} \, |y - x|$$

donc

$$\sup \Bigl\{ \Bigl| \frac{(\mathrm{F} + \mathrm{G})(y) - (\mathrm{F} + \mathrm{G})(x)}{y - x} \Bigr| : x, y \in [0, 1], \, x \neq y \Bigr\} \leq \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} + \|\mathrm{G}\|_\mathrm{X},$$

ce qui montre d'un coup que $\mathrm{F} + \mathrm{G} \in \mathrm{X}$ et que $\|\mathrm{F} + \mathrm{G}\|_\mathrm{X} \leq \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} + \|\mathrm{G}\|_\mathrm{X}$. Le fait que $\lambda \mathrm{F} \in \mathrm{X}$ et $\|\lambda \mathrm{F}\|_\mathrm{X} = |\lambda| \, \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X}$ est laissé au lecteur. Si $\|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} = 0$, on voit que $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = 0$ pour tout couple (x, y), et en prenant $y = 0$ on conclut que $\mathrm{F} = 0$.

On montre maintenant que X est complet. En prenant $x = 0$ et $0 < y \leq 1$ on voit que $|\mathrm{F}(y)| \leq |\mathrm{F}(y)|/y \leq \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X}$, donc $\|\mathrm{F}\|_\infty \leq \|\mathrm{F}\|_\mathrm{X}$. Il en résulte que toute suite (F_n) de Cauchy dans X est aussi de Cauchy uniforme, donc converge uniformément vers une fonction continue F. On a déjà $\mathrm{F}(0) = \lim_n \mathrm{F}_n(0) = 0$. Par ailleurs, toute suite de Cauchy est bornée, donc $\mathrm{M} = \sup_n \|\mathrm{F}_n\|_\mathrm{X} < +\infty$, et la limite quand $n \to +\infty$ de l'inégalité $|\mathrm{F}_n(y) - \mathrm{F}_n(x)| \leq \mathrm{M} \, |y - x|$ donne $|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{M} \, |y - x|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$; par conséquent $\mathrm{F} \in \mathrm{X}$.

Il reste à prouver que $\|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\|_\mathrm{X}$ tend vers 0. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|\mathrm{F}_m - \mathrm{F}_n\|_\mathrm{X} \leq \varepsilon$ lorsque $m, n \geq \mathrm{N}$, c'est à dire $|(\mathrm{F}_m(y) - \mathrm{F}_n(y)) - (\mathrm{F}_m(x) - \mathrm{F}_n(x))| \leq \varepsilon \, |y - x|$; en passant à la limite en n on obtient

$$|(\mathrm{F}_m(y) - \mathrm{F}(y)) - (\mathrm{F}_m(x) - \mathrm{F}(x))| \leq \varepsilon \, |y - x|$$

pour tous x, y, c'est à dire $\|\mathrm{F}_m - \mathrm{F}\|_\mathrm{X} \leq \varepsilon$ pour $m \geq \mathrm{N}$.

On pourrait écrire cette démonstration de complétude de X avec des séries normalement convergentes dans X, au lieu de suites de Cauchy. Ça serait en gros pareil.

1.b. Montrer que les fonctions de classe C^1 *sur* $[0,1]$ *et nulles en* 0 *forment un sous-espace vectoriel fermé de* X *(la suite de l'exercice ne dépend pas de cette question).*

On remarque que lorsque g est de classe C^1 on a

$$\|g\|_X = \|g'\|_\infty.$$

Dans une direction, on fera tendre y vers x dans la définition de la norme de X, pour obtenir à la limite

$$\forall x \in [0,1], \quad |g'(x)| \le \|g\|_X \,;$$

dans l'autre, on appliquera le théorème des accroissements finis. Supposons maintenant qu'une suite (g_n) de fonctions de classe C^1 converge dans X vers une fonction H ; d'après la remarque, la suite (g'_n) est de Cauchy uniforme, donc converge vers une fonction continue h. De plus, la suite des valeurs $(g_n(0))$ converge, puisqu'elle est constamment égale à 0. D'après un théorème de DEUG, la suite (g_n) tend vers une fonction H, et la fonction limite H est C^1 et sa dérivée est h. Il en résulte enfin que $\|g_n - H\|_X = \|g'_n - h\|_\infty$ tend vers 0.

On pourrait dire aussi : on *sait* que $C^1([0,1])$ est un espace de Banach (c'est la traduction du théorème de DEUG évoqué ci-dessus) ; son sous-espace Y formé des fonctions nulles en 0 est fermé, donc complet, et sur ce sous-espace Y on a montré que la norme de X est équivalente à la norme usuelle induite par C^1 ; puisque Y est complet pour la norme de X, il est fermé dans X.

2. Dans les questions qui suivent, on désigne par F *un élément fixé de* X*, tel que* $\|F\|_X \le 1$*. Pour tout entier* $N \ge 1$ *on désigne par* F_N *la fonction affine par morceaux telle que* $F_N(i/N) = F(i/N)$ *pour* $i = 0, \ldots, N$*, de pente constante sur chaque intervalle* $[i/N, (i+1)/N]$*, pour* $i = 0, \ldots, N-1$*. On note* $\|g\|_\infty$ *la norme uniforme d'une fonction* g *continue sur* $[0,1]$*.*

2.a. Montrer que $\|F_N - F\|_\infty \le 1/N$ *pour tout* $N \ge 1$*.*

Soit x un point de $[0,1]$ et soit i tel que $x \in [i/N, (i+1)/N]$. On peut écrire $x = (1-t)\frac{i}{N} + t\,\frac{i+1}{N}$ pour un certain $t \in [0,1]$. Puisque la fonction F_N est affine sur $[i/N, (i+1)/N]$, on aura

$$F_N(x) = (1-t)\,F_N\Big(\frac{i}{N}\Big) + t\,F_N\Big(\frac{i+1}{N}\Big) = (1-t)\,F\Big(\frac{i}{N}\Big) + t\,F\Big(\frac{i+1}{N}\Big)$$

d'où

$$|F(x) - F_N(x)| \le (1-t)\,\Big|F(x) - F\Big(\frac{i}{N}\Big)\Big| + t\,\Big|F(x) - F\Big(\frac{i+1}{N}\Big)\Big| \le$$

$$\|F\|_X \Big((1-t)\,\frac{1}{N} + t\,\frac{1}{N}\Big) \le \frac{1}{N}.$$

2.b. Montrer que pour tout entier $N \ge 1$*, il existe une fonction en escalier* f_N *sur* $[0,1]$ *telle que* $F_N(x) = \int_0^x f_N(t)\,dt$ *et* $|f_N(x)| \le 1$ *pour tout* $x \in [0,1]$*. Montrer qu'il existe une fonction* g_N *continue sur* $[0,1]$ *telle que* $|g_N| \le 1$ *et* $\int_0^1 |g_N(t) - f_N(t)|\,dt < 1/N$*.*

Désignons par p_i la pente (constante) de la fonction F_N sur l'intervalle $[i/N, (i+1)/N]$; on a

$$p_i = \frac{F((i+1)/N) - F(i/N)}{(i+1)/N - i/N}$$

ce qui donne $|p_i| \le \|F\|_X \le 1$ pour tout $i = 0, \ldots, N-1$. Désignons par f_N la fonction en escalier égale à p_i sur $[i/N, (i+1)/N]$. On a bien $|f_N| \le 1$, et on vérifie facilement que $F_N(x) = F_N(x) - F_N(0) = \int_0^x f_N(t)\,dt$.

On sait que $C([0,1])$ est dense dans L_1 donc il existe pour chaque N une fonction continue h_N telle que $\int_0^1 |f_N(t) - h_N(t)|\,dt < 1/N$. Alors $g_N = \max(-1, \min(1, h_N))$ est encore plus proche de f_N, puisque

$$\big|\max(-1, \min(1, h_N)) - f_N\big| = \big|\max(-1, \min(1, h_N)) - \max(-1, \min(1, f_N))\big| \le |h_N - f_N|.$$

On peut aussi donner g_N explicitement, en remplaçant les discontinuités de f_N par des parties affines de grande pente, situées sur des intervalles très petits autour des points i/N, pour

$i = 0, \ldots, \mathrm{N}$. Choisissons $0 < \varepsilon < 1/\mathrm{N}$, et définissons g_N sur chaque intervalle $[i/\mathrm{N}, (i+1)/\mathrm{N}]$ de la façon suivante : désignons par v_i la valeur constante de f_N sur l'intervalle $]i/\mathrm{N}, (i+1)/\mathrm{N}[$; posons aussi $v_{-1} = v_0$ et $v_\mathrm{N} = v_{\mathrm{N}-1}$; si $x \notin [(i+\frac{\varepsilon}{2})/\mathrm{N}, (i+1-\frac{\varepsilon}{2})/\mathrm{N}]$, on pose $g_\mathrm{N}(x) = f_\mathrm{N}(x)$; sur $[i/\mathrm{N}, (i+\frac{\varepsilon}{2})/\mathrm{N}]$, la fonction g_N est affine, égale à $\frac{1}{2}(v_{i-1} + v_i)$ au point i/N, et à v_i au bout droit de l'intervalle ; sur $[(i+1-\frac{\varepsilon}{2})/\mathrm{N}, (i+1)/\mathrm{N}]$, la fonction g_N est affine, égale à $\frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$ au point $(i+1)/\mathrm{N}$, et à v_i à l'origine de l'intervalle. On vérifie que $\int_0^1 |g_\mathrm{N}(t) - f_\mathrm{N}(t)|\, dt \le \varepsilon$.

2.c. En déduire que F *est limite uniforme d'une suite* $(\mathrm{G_N})$ *de fonctions de classe* C^1 *nulles en* 0 *et telles que* $\|\mathrm{G_N}\|_\mathrm{X} \le 1$ *pour tout* $\mathrm{N} \ge 1$.

Posons $\mathrm{G_N}(x) = \int_0^x g_\mathrm{N}(t)\, dt$, où (g_N) est la suite de la question précédente. On aura

$$|\mathrm{G_N}(x) - \mathrm{F_N}(x)| \le \int_0^x |g_\mathrm{N}(t) - f_\mathrm{N}(t)|\, dt < 1/\mathrm{N},$$

et $|\mathrm{F_N}(x) - \mathrm{F}(x)| \le 1/\mathrm{N}$, donc $\|\mathrm{G_N} - \mathrm{F}\|_\infty \le 2/\mathrm{N} \to 0$. Par le théorème des accroissements finis (ou bien en majorant simplement $\mathrm{G_N}(y) - \mathrm{G_N}(x) = \int_x^y g_\mathrm{N}(t)\, dt$), on a $|\mathrm{G_N}(y) - \mathrm{G_N}(x)| \le |y-x|\, |g_\mathrm{N}(\xi)| \le |y-x|$, donc $\|\mathrm{G_N}\|_\mathrm{X} \le 1$ pour tout N.

3. On désigne encore par F *un élément fixé de* X*, tel que* $\|\mathrm{F}\|_\mathrm{X} \le 1$. *On définit une forme linéaire* ℓ *sur l'espace vectoriel des fonctions de classe* C^1 *sur* $[0,1]$ *nulles au point* 1*, en posant* $\ell(\varphi) = -\int_0^1 \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\, dt$ *pour toute fonction* φ *de classe* C^1 *telle que* $\varphi(1) = 0$.

3.a. Montrer en utilisant la question 2.c. qu'on a $|\ell(\varphi)| \le \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$ *pour toute fonction* φ *de classe* C^1 *nulle au point* 1. *En déduire que* ℓ *se prolonge de façon unique en forme linéaire continue sur* $\mathrm{L}_1([0,1], dt)$.

On aura convergence uniforme de $\mathrm{G_N}\varphi'$ vers $\mathrm{F}\varphi'$, donc

$$\ell(\varphi) = -\int_0^1 \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\, dt = -\lim_\mathrm{N} \int_0^1 \mathrm{G_N}(t)\varphi'(t)\, dt =$$

$$= \lim_\mathrm{N} \Big[-\mathrm{G_N}(t)\varphi(t)\Big]_0^1 + \lim_\mathrm{N} \int_0^1 g_\mathrm{N}(t)\varphi(t)\, dt = \lim_\mathrm{N} \int_0^1 g_\mathrm{N}(t)\varphi(t)\, dt$$

puisque $\varphi(1) = \mathrm{G_N}(0) = 0$; puisque $|g_\mathrm{N}(t)| \le 1$, on a $|\ell(\varphi)| \le \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$.

Comme l'espace vectoriel des fonctions φ de classe C^1 nulles au point 1 est dense dans L_1, il existe un prolongement unique de ℓ à L_1, de même norme.

Pour justifier l'affirmation de densité qui précède, on peut raisonner ainsi : on sait que les fonctions continues h, affines par morceaux, sont denses dans L_1 ; par une modification, aussi petite qu'on veut en norme L_1, on peut ajouter la condition $h(0) = 0$; on a expliqué ci-dessus comment approcher h uniformément, donc aussi en norme L_1, par des fonctions de classe C^1 nulles en 0 ; le raisonnement est le même avec le point 1.

3.b. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$ *telle que* $\|f\|_\infty \le 1$ *et* $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

On sait que toute forme linéaire continue ℓ sur L_1 peut être représentée au moyen d'une fonction $f \in \mathrm{L}_\infty$,

$$\forall \varphi \in \mathrm{L}_1, \quad \ell(\varphi) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt$$

avec $\|f\|_\infty = \|\ell\|$. On aura alors

$$-\int_0^1 \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\, dt = \ell(\varphi) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt$$

pour toute fonction φ de classe C^1 nulle en 1. Si φ est égale à 1 sur $[0,x]$, nulle sur $[x',1]$, où $x' > x$ est proche de x, et φ décroissante, on aura

$$(*) \qquad -\int_0^1 \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_x^{x'} \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\, dt \sim -\mathrm{F}(x)\int_x^{x'} \varphi'(t)\, dt = \mathrm{F}(x)$$

et de l'autre côté

$$(**) \qquad \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt \sim \int_0^x f(t)\,dt.$$

Pour justifier l'approximation dans $(*)$, on écrit

$$\Big|\int_x^{x'} \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\,dt - \mathrm{F}(x)\int_x^{x'} \varphi'(t)\,dt\Big| \leq \int_x^{x'} |\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(x)|\,|\varphi'(t)|\,dt \leq$$

$$\leq |x' - x| \int_0^1 |\varphi'(t)|\,dt = -|x' - x| \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = |x' - x|.$$

Pour justifier l'approximation dans $(**)$, on écrit

$$\Big|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\Big| \leq \int_x^{x'} |f(t)|\,|1 - \varphi(t)|\,dt \leq |x' - x|.$$

Si on garde x fixé et qu'on fait tendre x' vers x, on obtient bien

$$\int_0^x f(t)\,dt = \mathrm{F}(x)$$

à la limite.