MT404. Théorème de représentation de Riesz

Le but ultime de cette série d'exercices est de démontrer le théorème de représentation de Riesz pour une forme linéaire positive sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ (fonctions réelles) :
soient K *un espace métrique compact et* ℓ *une forme linéaire positive sur* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *; il existe une mesure positive finie* μ *sur* $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ *(où* $\mathcal{B}$ *est la tribu borélienne de* K*) telle que*

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \quad \ell(\varphi) = \int_{\mathrm{K}} \varphi(x)\, d\mu(x).$$

On notera qu'une forme linéaire positive sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est automatiquement continue pour la norme uniforme (si $\|\varphi\|_\infty \le 1$, on a l'encadrement de fonctions $-1 \le \varphi \le 1$ qui se transfère aux valeurs de ℓ par la positivité de la forme linéaire, et donne $\|\ell\| = \ell(1)$). On se propose de démontrer pour commencer une variante du *théorème de Daniell*, qui sera ensuite appliquée pour montrer le théorème de Riesz.

Soit E *un espace vectoriel de fonctions réelles sur un ensemble* Ω*, et soit* $\ell : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire sur* E*. On suppose que le couple* (E, ℓ) *vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *Si* $\varphi, \psi \in \mathrm{E}$*, alors la fonction* $\max(\varphi, \psi)$ *est aussi dans* E*.*

2. *Si* $\varphi \ge 0$ *(*$\varphi \in \mathrm{E}$ *prend en tout point* $x \in \Omega$ *une valeur* $\varphi(x) \ge 0$*), alors* $\ell(\varphi) \ge 0$ *(on dit que* ℓ *est une forme linéaire positive sur* E*).*

3. *Si une suite* $(\varphi_n) \subset \mathrm{E}$ *converge (simplement) en décroissant vers* 0*, il en résulte que* $\ell(\varphi_n) \to 0$*.*

Il existe alors un espace vectoriel de fonctions $\mathrm{F} \supset \mathrm{E}$ *et une forme linéaire* $\mathrm{L} : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ *qui prolonge* ℓ*, tels que le couple* (F, L) *vérifie encore les propriétés* **1**, **2** *et* **3**, *et vérifie de plus la propriété suivante :*

4. *Pour toute suite* $(f_n) \subset \mathrm{F}$ *qui converge (simplement) en décroissant vers une fonction* $h \ge 0$*, la limite* h *est dans* F *(et il résulte alors des autres propriétés que l'on a* $\mathrm{L}(f_n) \to \mathrm{L}(h)$*).*

On va faire de la démonstration un (très) long exercice.

a. Vérifier que si $\varphi, \psi \in \mathrm{E}$, alors la fonction $\min(\varphi, \psi)$ est aussi dans E. Vérifier que si $\varphi \in \mathrm{E}$, la fonction $|\varphi|$ est aussi dans E, et que $|\ell(\varphi)| \le \ell(|\varphi|)$.

On introduit une classe G de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la façon suivante : on dit que $g \in \mathrm{G}$ s'il existe une suite croissante $(\varphi_n) \subset \mathrm{E}$ qui tend (simplement) vers g (limite $+\infty$ autorisée). Vérifier que $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$.

b. Montrer que si g_1 est limite croissante de $(\varphi_{1,m})$, g_2 limite croissante de $(\varphi_{2,n})$ et si $g_1 \le g_2$, alors

$$\lim_m \ell(\varphi_{1,m}) \le \lim_n \ell(\varphi_{2,n}).$$

Indication : fixer m_0 et considérer la suite croissante (en n) $(\psi_n) = (\min(\varphi_{1,m_0}, \varphi_{2,n}))$; déterminer sa limite ψ puis appliquer **3** à la suite $(\psi - \psi_n)$.

c. En déduire que si g est la limite croissante de (φ_n), la quantité $\lim_n \ell(\varphi_n)$ (valeur $+\infty$ admise) ne dépend que de $g \in \mathrm{G}$; on l'appelera $\mathrm{L}(g)$. Vérifier que $\mathrm{L}(\varphi) = \ell(\varphi)$ si $\varphi \in \mathrm{E}$, que $g_1 \le g_2$ implique $\mathrm{L}(g_1) \le \mathrm{L}(g_2)$ (à partir de maintenant toute fonction qui s'appelle g sera supposée appartenir à G). Vérifier que $g_1 + g_2 \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{L}(g_1 + g_2) =$

$\mathrm{L}(g_1) + \mathrm{L}(g_2)$ (avec les conventions habituelles pour les valeurs $+\infty$), et que si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda g \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{L}(\lambda g) = \lambda \mathrm{L}(g)$. Vérifier que $\max(g_1, g_2) \in \mathrm{G}$ et $\min(g_1, g_2) \in \mathrm{G}$.

d. Si (g_k) tend en croissant vers une fonction h, alors $h \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{L}(h) = \lim_k \mathrm{L}(g_k)$. Indication : chaque g_k est limite croissante d'une suite $(\varphi_{k,n})_n$. Considérer la suite croissante

$$\Phi_n = \max\{\varphi_{k,m} : 0 \leq k, m \leq n\}.$$

e. En déduire que pour toute suite $(u_k) \subset \mathrm{G}$, $u_k \geq 0$, on a $\sum_k u_k \in \mathrm{G}$ et

$$\mathrm{L}\Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{L}(u_k).$$

On introduit maintenant un nouvel ensemble F de fonctions, à valeurs réelles *finies*, de la façon suivante : on dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dans F si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_{1,\varepsilon}$ et $g_{2,\varepsilon}$ telles que $-g_{1,\varepsilon} \leq f \leq g_{2,\varepsilon}$, $\mathrm{L}(g_{2,\varepsilon}) < +\infty$ et $\mathrm{L}(g_{2,\varepsilon} + g_{1,\varepsilon}) < \varepsilon$.

f. Montrer que F est un espace vectoriel. Montrer que la quantité

$$\widetilde{\mathrm{L}}(f) = \inf\{\mathrm{L}(g_2) : f \leq g_2\}$$

définit une forme linéaire sur F. Montrer que si g est à valeurs finies et $\mathrm{L}(g) < +\infty$, alors $g \in \mathrm{F}$ et $\widetilde{\mathrm{L}}(g) = \mathrm{L}(g)$; on notera donc simplement $\mathrm{L}(f)$ au lieu de $\widetilde{\mathrm{L}}(f)$ (à partir de maintenant toute fonction qui s'appelle f sera supposée appartenir à F).

g. Vérifier que $\max(f_1, f_2) \in \mathrm{F}$, que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et que L prolonge ℓ ; vérifier que $\mathrm{L}(f) \geq 0$ si $f \geq 0$.

h. On suppose que (f_n) tend en décroissant vers une fonction $h \geq 0$. Montrer que $(\mathrm{L}(f_n))$ tend vers une limite réelle λ. Montrer que $h \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{L}(h) = \lim_n \mathrm{L}(f_n)$. Vérifier qu'on a montré tout ce qui était promis.
Indication : choisir N tel que $\mathrm{L}(f_\mathrm{N}) - \lambda < \varepsilon/2$, puis écrire

$$f_\mathrm{N} - h = \sum_{k \geq \mathrm{N}} (f_k - f_{k+1}),$$

choisir $g_k \geq f_k - f_{k+1}$ qui donne une approximation de $\mathrm{L}(f_k - f_{k+1})$ à $\varepsilon 2^{-k}$ près, puis écrire l'encadrement $0 \leq f_\mathrm{N} - h \leq \sum_{k \geq \mathrm{N}} g_k$, appliquer la question *e*, en déduire un bon encadrement pour h.

On passe maintenant à l'application au théorème de représentation de Riesz. On considère $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$ (fonctions à valeurs réelles), où K est un espace métrique compact, et on suppose donnée une forme linéaire positive ℓ sur C(K).

i. Montrer que le couple $(\mathrm{C}(\mathrm{K}), \ell)$ vérifie **1**, **2** et **3**.

j. Soit G l'ensemble de fonctions correspondant à $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$; vérifier que pour tout ouvert $\omega \subset \mathrm{K}$, la fonction indicatrice 1_ω est dans G.

k. Soit (F, L) le couple donné par le théorème de Daniell à partir du couple $(\mathrm{C}(\mathrm{K}), \ell)$; montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\mathrm{A} \subset \mathrm{K}$ tels que $1_\mathrm{A} \in \mathrm{F}$ est une tribu de parties de K, et que $\mathrm{A} \to \mathrm{L}(1_\mathrm{A})$ est une mesure ≥ 0 sur cette tribu. Montrer que $\mathcal{A}$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de K, et que toute fonction $\mathcal{B}$-étagée appartient à F.

l. La forme linéaire L définit donc par restriction à $\mathcal{B}$ une mesure positive μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$. Montrer que pour toute fonction continue φ, on a $\ell(\varphi) = \int_\mathrm{K} f(x)\, d\mu(x)$.
Indication : encadrer f uniformément par des fonctions $\mathcal{B}$-étagées.