Calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux

Lemme 1. *Soient* T *un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert* H*, f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, et* F *l'adhérence de l'image de $f(\mathrm{T})$; alors* F *est stable par tout opérateur* S *qui commute avec* T.

Supposons de plus que f soit nulle en dehors de $[a, b]$; si F *n'est pas réduit à $\{0\}$, le spectre de la restriction de* T *à* F *est contenu dans $[a, b]$. Il en résulte que*

$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq a\,\|x\|^2$$

pour tout $x \in \mathrm{F}$.

Démonstration. Soit S un opérateur qui commute avec T ; l'ensemble E des $x \in \mathrm{H}$ tels que $\mathrm{S}(x) \in \mathrm{F}$ est un sous-espace fermé de H. Pour montrer qu'il contient F, il suffit de montrer qu'il contient l'image de $f(\mathrm{T})$, et il contiendra alors automatiquement l'adhérence de l'image. Soit donc $x = f(\mathrm{T})(y)$ un vecteur de l'image de $f(\mathrm{T})$; on sait que S commute avec $f(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(f(\mathrm{T})(y)) = f(\mathrm{T})(\mathrm{S}(y))$ appartient à l'image de $f(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{S}(x) \in \mathrm{F}$ et $x \in \mathrm{E}$, et on a montré que $\mathrm{im}(f(\mathrm{T})) \subset \mathrm{E}$, ce qu'il fallait démontrer pour commencer.

Supposons maintenant que f est nulle en dehors de $[a, b]$, et soit $\lambda \notin [a, b]$; la fonction $t \to t - \lambda$ ne s'annule pas sur $[a, b]$, ce qui permet de la prolonger en une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais (par exemple, on posera $g(t) = g(a) = a - \lambda$ si $t \leq a$, et $g(t) = g(b) = b - \lambda$ si $t \geq b$). On posera $h(t) = 1/g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note que F est stable par $h(\mathrm{T})$, ce qui permettra de considérer la restriction de $h(\mathrm{T})$ à F. On va montrer que cette restriction de $h(\mathrm{T})$ est l'inverse de la restriction de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ à F, c'est à dire l'inverse de $\mathrm{T}_{|\mathrm{F}} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$; on aura ainsi montré que si $\lambda \notin [a, b]$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_{|\mathrm{F}})$ (si F était réduit à $\{0\}$, toutes ces restrictions d'applications seraient nulles, et on n'a pas envie de parler de spectre dans ce cas ; ceci explique la condition $\mathrm{F} \neq \{0\}$ imposée dans l'énoncé du lemme 1).

Puisque f est nulle en dehors de $[a, b]$, on vérifie que $(fg)(t) = f(t)(t - \lambda)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, autrement dit on peut écrire pour les restrictions à $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ les relations : $fg = f(z_\mathrm{K} - \lambda)$, donc $f = fgh = fh(z_\mathrm{K} - \lambda)$. En passant aux opérateurs,

$$f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})\,h(\mathrm{T})\,(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}),$$

ce qui montre que si $x = f(\mathrm{T})(y)$ est dans l'image de $f(\mathrm{T})$, et compte tenu des commutations,

$$x = h(\mathrm{T})(\mathrm{T}(x) - \lambda x) = (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(h(\mathrm{T})(x)).$$

Cette relation se prolonge par continuité à tout $x \in \mathrm{F}$, et elle signifie que la restriction de $h(\mathrm{T})$ à F est l'inverse de $\mathrm{T}_{|\mathrm{F}} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$, comme annoncé.

Considérons l'opérateur $\mathrm{V} = \mathrm{T}_{|\mathrm{F}} - a\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$; cet opérateur est hermitien et on sait que $\mathrm{Sp}(\mathrm{V}) \subset [0, b - a]$. Ceci implique que V est positif, donc pour tout $x \in \mathrm{F}$ on a $0 \leq \langle \mathrm{V}(x), x\rangle = \langle \mathrm{T}(x), x\rangle - a\,\|x\|^2$.

Lemme 2. *Soient* T *un opérateur normal et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme un telle que $\mathrm{T}(x_n) - \lambda x_n \to 0$ et $\mathrm{T}^*(x_n) - \overline{\lambda} x_n \to 0$.*

Démonstration. L'opérateur $\mathrm{S} = \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est normal et $\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$, et nous savons que S n'est pas inversible. Il faut trouver (x_n) de norme un de façon que $\mathrm{S}(x_n) \to 0$ et $\mathrm{S}^*(x_n) \to 0$. En fait cette dernière propriété est gratuite, parce que

$$\|\mathrm{S}(x_n)\|^2 = \langle \mathrm{S}^*\mathrm{S}(x_n), x_n\rangle = \langle \mathrm{S}\mathrm{S}^*(x_n), x_n\rangle = \|\mathrm{S}^*(x_n)\|^2.$$

Pour la première il faut voir qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $\|\mathrm{S}(x)\| \geq c\,\|x\|$ pour tout x ; si c'était le cas on aurait $\|\mathrm{S}^*\mathrm{S}(x)\|\,\|x\| \geq \langle \mathrm{S}^*\mathrm{S}(x), x\rangle = \|\mathrm{S}(x)\|^2 \geq c^2\,\|x\|^2$, et comme $\mathrm{S}^*\mathrm{S}$ est hermitien on en déduirait que $\mathrm{S}^*\mathrm{S} = \mathrm{S}\mathrm{S}^*$ serait inversible ; un petit lemme d'algèbre nous dirait alors que S lui-même serait inversible, contradiction.

Dans les deux cas particuliers de calcul fonctionnel traités en cours, l'opérateur adjoint T^* était directement une fonction de T : trivialement dans le cas hermitien, puisqu'alors $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}$, mais aussi dans le cas unitaire où $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^{-1}$. Cela ne sera plus vrai dans le cas général d'un opérateur normal, et il faudra demander explicitement que l'homomorphisme φ_T envoie la fonction $\overline{z}_\mathrm{K}$ sur T^* (en notant comme d'habitude $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$).

Il faut aussi généraliser nos polynômes : si la fonction z_K est envoyée sur T et la fonction $\overline{z}_\mathrm{K}$ sur T^*, alors l'image de $z_\mathrm{K}\overline{z}_\mathrm{K}$ doit être $\mathrm{T}\mathrm{T}^*$; dans le cas hermitien ou unitaire, la fonction $z_\mathrm{K}\overline{z}_\mathrm{K}$ s'exprime à partir d'un polynôme en z_K (z_K^2 dans le cas hermitien et 1 dans le cas unitaire) ; ceci n'est plus vrai maintenant, et la fonction $z_\mathrm{K}\overline{z}_\mathrm{K}$ est une nouvelle fonction qui doit être gardée dans notre algèbre de "polynômes" ; bien sûr le problème ne s'arrête pas là, et nous devons considérer $z_k^p\,\overline{z}_\mathrm{K}^q$ pour tous entiers $p, q \geq 0$. On pourrait dire que nous devons considérer l'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ des polynômes en deux variables, puis prendre l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ obtenues en remplaçant X par z_K et Y par $\overline{z}_\mathrm{K}$. Disons simplement que notre algèbre de base A qui remplacera l'algèbre des polynômes sera l'algèbre de toutes les fonctions f sur K de la forme

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad f(z) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} z^p \overline{z}^q,$$

où les coefficients $c_{p,q}$ sont dans $\mathbb{C}$. On a envie de poser ensuite

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} \mathrm{T}^p\,(\mathrm{T}^*)^q = \mathrm{V},$$

mais on n'est pas encore sûr que l'opérateur ainsi écrit ne dépend que de la fonction f sur K ; pour écrire les choses proprement il faut prendre le polynôme formel de deux variables

$$\mathrm{P} = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} \mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q,$$

puis calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}, \mathrm{T}^*)$, qui donne l'opérateur V ci-dessus sans ambiguïté (il faut absolument noter que le remplacement dans le polynôme de deux variables n'aurait aucune propriété raisonnable si on n'avait pas $\mathrm{T}\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$; le fait que T soit normal nous permet d'écrire $\mathrm{T}^p\,(\mathrm{T}^*)^q$ dans n'importe quel ordre, et de vérifier que le polynôme formel $\mathrm{X}^m\mathrm{Y}^n\mathrm{P}$ donnera l'opérateur $\mathrm{T}^m(\mathrm{T}^*)^n\mathrm{P}(\mathrm{T}, \mathrm{T}^*)$, ce qui permet de voir ensuite que le produit $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ donne $(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)(\mathrm{T}, \mathrm{T}^*) = \mathrm{P}_1(\mathrm{T}, \mathrm{T}^*)\mathrm{P}_2(\mathrm{T}, \mathrm{T}^*)$.

La stratégie de démonstration sera toujours la même : l'algèbre A considérée est dense dans C(K) par Stone-Weierstrass (facile), et l'application que nous avons en tête sera isométrique. Considérons donc

$$f(z) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} z^p \overline{z}^q, \quad \mathrm{V} = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} \mathrm{T}^p\,(\mathrm{T}^*)^q.$$

On calculera la norme de V en disant que $\|\mathrm{V}\|^2 = \|\mathrm{V}^*\mathrm{V}\|$. Posons $\mathrm{S} = \mathrm{V}^*\mathrm{V}$ et $r = \|\mathrm{S}\|$; soient a, b tels que $a < r < b$, et f une fonction continue, nulle en dehors de $[a, b]$ et telle que $f(r) = 1$; on sait que $r \in \mathrm{Sp}(\mathrm{S})$ et $\mathrm{Sp}(f(\mathrm{S})) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{S}))$ contient $f(r) \neq 0$, ce qui dit que $f(\mathrm{S})$ n'est pas nul, donc l'adhérence F de son image n'est pas $\{0\}$. On sait que T et T^* commutent avec S, donc F est stable par T et T^* ; ceci permet de considérer la restriction T_1 de T, et de voir que son adjoint T_1^* est la restriction de T^*. Il en résulte que T_1 est normal. Soit λ une valeur spectrale de T_1 ; on sait d'après le lemme 2 qu'on peut trouver un vecteur $x_n \in \mathrm{F}$ de norme un tel que $\mathrm{T}_1(x_n) = \mathrm{T}(x_n) \sim \lambda x_n$ (ceci nous dit en passant que $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathrm{K}$), et $\mathrm{T}^*(x_n) \sim \overline{\lambda} x_n$. Il en résulte que $\mathrm{V}(x_n) \sim (\sum_{p,q} c_{p,q} \lambda^p \overline{\lambda}^q) x_n$, donc $\|\mathrm{V}(x_n)\| \sim |f(\lambda)|$.

Par ailleurs, on sait d'après le lemme 1 que $\|\mathrm{V}(x)\|^2 = \langle \mathrm{V}^*\mathrm{V}(x), x\rangle \geq a\,\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{F}$. On obtient ainsi que $a \leq \|f\|^2_{\mathrm{C(K)}}$, et puisque a est quelconque $< \|\mathrm{V}\|^2$ il en résulte que $\|\mathrm{V}\| \leq \|f\|_{\mathrm{C(K)}}$.

A partir de là nous avons déjà une justification du fait que l'opérateur V ne dépend que de la fonction f sur K, ce qui permet de poser $\mathrm{V} = f(\mathrm{T})$, et de plus nous pouvons étendre par continuité la définition donnée sur l'algèbre A. Mais en fait il y a encore isométrie de A (munie de la norme de C(K)) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$: soit en effet $\lambda \in \mathrm{K}$; il existe x de norme un tel que $\mathrm{T}(x) \sim \lambda x$, donc $f(\mathrm{T})(x) \sim f(\lambda)x$ par le même argument que précédemment, donc $\|f(\mathrm{T})\| \geq |f(\lambda)|$, pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$, ce qui donne $\|f(\mathrm{T})\| \geq \|f\|_{\mathrm{C(K)}}$ et termine notre programme.

Théorème. *Soient* H *un espace hilbertien complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal ; posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* $\varphi_\mathrm{T} : \mathrm{C(K)} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\varphi_\mathrm{T}(z_\mathrm{K}) = \mathrm{T}$ *et* $\varphi_\mathrm{T}(\overline{z}_k) = \mathrm{T}^*$. *On notera* $f(\mathrm{T}) = \varphi_\mathrm{T}(f)$.

De plus, φ_T *est isométrique,* $(f(\mathrm{T}))^* = \overline{f}(\mathrm{T})$ *(donc* $f(\mathrm{T})$ *est normal) et* $f(\mathrm{T})$ *commute avec tout opérateur* S *qui commute avec* T. *On a*

$$\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})).$$