ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE SPECTRALE

MT404

Année 1999-2000

Résumé de la première partie

Chapitre 1. Espaces normés et applications linéaires continues

1.1. Normes, semi-normes ; espaces de Banach

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels considérés dans ce cours seront toujours des espaces vectoriels réels ou complexes.

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; on appelle *semi-norme* sur X une application $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, on a $p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

Si pour tout vecteur x non nul de X on a $p(x) > 0$, on dit que p est une *norme* ; autrement dit une semi-norme p sur X est une norme lorsque $\{x \in \mathrm{X} : p(x) = 0\} = \{0_{\mathrm{X}}\}$.

La propriété $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ s'appelle *l'inégalité triangulaire* pour la semi-norme p. On a une deuxième forme de l'inégalité triangulaire :

Lemme 1.1.1. *Si p est une semi-norme sur* X, *on a $|p(x) - p(y)| \le p(x-y)$ pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{X}$.*

Rappelons qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel X est dit *convexe* si pour tout couple (x, y) d'éléments de C, le *segment* $[x, y]$ est tout entier contenu dans C ; le segment $[x, y]$ est formé des *combinaisons convexes* des deux points x et y, c'est à dire tous les points de la forme $z = (1-t)x + ty$, où t varie dans $[0, 1]$. Plus généralement, une combinaison convexe d'éléments d'un sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ est un vecteur z de la forme $z = \sum \lambda_\alpha x_\alpha$, où la somme est finie, $\lambda_\alpha \ge 0$ pour chaque α et $\sum \lambda_\alpha = 1$. L'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A est un ensemble convexe appelé *l'enveloppe convexe* de A, noté co(A) dans ce poly. C'est aussi le plus petit ensemble convexe contenant A.

Une fonction réelle f définie sur un sous-ensemble convexe C de X est dite *fonction convexe sur* C si

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)\, f(x) + t\, f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{C}$ et tout $t \in [0, 1]$. On dira qu'une fonction réelle q sur X est *positivement homogène* si elle vérifie que $q(\mu x) = \mu\, q(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout nombre réel $\mu \ge 0$. Si q est positivement homogène et *sous-additive*, c'est à dire que $q(x+y) \le q(x) + q(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, alors q est une fonction convexe sur X. En particulier, les semi-normes sur X sont des fonctions convexes.

Corollaire 1.1.1. *Pour que p soit une semi-norme sur l'espace vectoriel* X, *il faut et il suffit que $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteur $x \in \mathrm{X}$ et que l'ensemble $\{x \in \mathrm{X} : p(x) \le 1\}$ soit convexe.*

On appelle *espace normé* un espace vectoriel X muni d'une norme p. Si X est un espace normé, nous en ferons un *espace métrique* en définissant la distance d sur X par $d(x, y) = p(x-y)$, et nous munirons X de la topologie associée à cette métrique, que nous appellerons *topologie de la norme*. Soient $x \in \mathrm{X}$ et $r > 0$; on appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r le sous-ensemble $\mathrm{B}_p(x, r) = \{y \in \mathrm{X} : p(y-x) < r\}$ de X.

Rappelons que dans la topologie de la norme sur X, les parties ouvertes sont les réunions de boules ouvertes ; une partie U de X est un voisinage de $x \in \mathrm{X}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{U}$. La *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{y \in \mathrm{X} : p(y - x) \leq r\}$.

Par convention, la *boule unité* d'un espace normé X sera la boule *fermée* de centre 0_{X} et de rayon 1 ; on la notera B_{X}.

Proposition 1.1.1. *Soit* (X, p) *un espace normé ; l'application* $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ *est continue pour la topologie de la norme.*

En général, nous noterons $\|x\|$ la norme d'un vecteur x d'un espace normé X.

La topologie et la structure d'espace vectoriel d'un espace normé sont compatibles, autrement dit, un espace normé est un espace vectoriel topologique au sens suivant :

Définition 1.1.2. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle les deux applications $(x, y) \to x + y$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ dans X et $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{K} \times \mathrm{X}$ dans X sont continues.

Proposition 1.1.2. *Un espace normé, muni de la topologie de la norme, est un espace vectoriel topologique.*

Définition 1.1.3. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé, complet pour la distance associée.

Si Y est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach X, il est lui aussi complet pour la norme induite par celle de X, donc Y est un espace de Banach.

Séries de vecteurs

Une série de vecteurs $\sum u_k$ dans un espace normé X est dite *convergente dans* X si la suite des sommes partielles (U_n) est convergente dans X, où la somme partielle U_n est définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in \mathrm{X}.$$

Si la série converge dans X, la *somme de la série* est un vecteur de X, qui est donc la limite de la suite (U_n), et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n \mathrm{U}_n \in \mathrm{X}.$$

Un cas particulier est celui des séries $\sum u_k$ telles que $\sum \|u_k\| < +\infty$, que l'on peut appeler *absolument convergentes* ou bien *normalement convergentes*. Si X est complet, la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$ garantit la convergence dans X de la série $\sum u_k$. En fait, on a

Proposition 1.1.3. *Soit* X *un espace normé ; pour que* X *soit complet, il faut et il suffit que pour toute série* $\sum u_k$ *de vecteurs de* X*, la condition* $\sum \|u_k\| < +\infty$ *entraîne que la série* $\sum u_k$ *est convergente dans* X.

Notons que lorsque la série $\sum u_k$ converge dans X, on a l'inégalité

$$\Bigl\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Bigr\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|,$$

en convenant que la somme de la série des normes vaut $+\infty$ lorsqu'elle est divergente.

Exemples 1.1.1.

L'espace $\mathrm{C}[0,1]$ (réel ou complexe) des fonctions scalaires continues sur $[0,1]$, muni de la *norme uniforme*,

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

est un espace de Banach. Le fait qu'il soit complet est une traduction du théorème selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

Beaucoup d'exemples viennent de la théorie de l'intégration. Nous supposerons donné un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω et μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour éviter certains désagréments nous supposerons que la mesure est *σ-finie*, ce qui veut dire qu'il existe une partition (Ω_n) de Ω en une *suite* de parties $\Omega_n \in \mathcal{A}$ telles que $\mu(\Omega_n) < +\infty$.

Pour $1 \le p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des (classes de) fonctions f complexes sur $[0,1]$ telles que f soit mesurable et $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty$ est normé par

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p \, d\mu(s)\Bigr)^{1/p}.$$

Cet espace L_p est de plus complet (théorème de Fisher-Riesz).

De façon analogue, on désigne par ℓ_p l'espace des suites scalaires $x = (x_n)$ telles que $\sum |x_n|^p < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\Bigr)^{1/p}.$$

L'espace ℓ_∞ est l'espace des suites scalaires $x = (x_n)$ bornées, normé par

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

L'espace ℓ_∞ est complet pour cette norme. L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (x_n) telles que $\lim x_n = 0$. C'est un sous-espace fermé de ℓ_∞, donc un espace de Banach.

L'espace $\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables bornées sur Ω (c'est à dire des classes qui contiennent un représentant borné). La norme $\|f\|_\infty$ est la plus petite constante M telle que l'on ait $|f(s)| \le \mathrm{M}$ pour μ-presque tout $s \in \Omega$. L'espace L_∞ est complet pour cette norme.

1.2. Applications linéaires continues

Théorème 1.2.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application linéaire ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application* f *est continue sur* X *;*
(ii) *l'application* f *est continue au point* 0_X *;*
(iii) *il existe un nombre* $k \ge 0$ *tel que, pour tout* $x \in \mathrm{X}$ *on ait*

$$\|f(x)\|_\mathrm{Y} \le k \, \|x\|_\mathrm{X}.$$

Soient p et q deux semi-normes sur un espace vectoriel X ; on dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe deux nombres réels $k > 0$ et $\ell \geq 0$ tels que $k\,p \leq q \leq \ell\,p$.

Corollaire 1.2.1. *Deux normes p et q sur un espace vectoriel X définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.*

Soient X et Y deux espaces normés et f, g deux applications linéaires continues de X dans Y ; on sait que l'application $f+g$, qui associe à tout $x \in \mathrm{X}$ l'image $f(x)+g(x) \in \mathrm{Y}$, est linéaire. Elle est aussi continue.

L'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y est donc un sous-espace vectoriel noté $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ de l'ensemble des applications linéaires de X dans Y. On appelle aussi *opérateur* une application linéaire continue entre deux espaces normés. Dans le cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, on note simplement $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ l'espace des endomorphismes continus de X.

Proposition 1.2.1. *Soient X et Y deux espaces normés et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application linéaire continue ; on pose*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = \sup\{\|f(x)\|_{\mathrm{Y}} : \|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1\}.$$

Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a

$$\|f(x)\|_{\mathrm{Y}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}\, \|x\|_{\mathrm{X}}.$$

La constante $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$ est le plus petit nombre M tel que l'inégalité $\|f(x)\|_{\mathrm{Y}} \leq \mathrm{M}\,\|x\|_{\mathrm{X}}$ soit vraie pour tout $x \in \mathrm{X}$. L'application $f \to \|f\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Proposition 1.2.2. *Soient X, Y et Z des espaces normés, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ des applications linéaires continues ; on a*

$$\|g \circ f\| \leq \|f\|\, \|g\|.$$

Proposition 1.2.3. *Soient X et Y deux espaces normés ; si Y est un espace de Banach, l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un espace de Banach.*

Image d'une série convergente. Soit $\sum u_k$ une série convergente de vecteurs dans l'espace normé X et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application linéaire continue. Alors la série $\sum f(u_k)$ converge dans Y et

$$f\Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(u_k).$$

1.3. Produits et quotients

Proposition 1.3.1. *Soient X et Y deux espaces normés ; il existe une norme sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ qui définit la topologie produit.*

Remarque 1.3.1. On vérifie sans peine que $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ est un espace de Banach si et seulement si X et Y sont des espaces de Banach.

Soient X un espace vectoriel et Y un sous-espace de X ; rappelons que X/Y est le quotient de X pour la relation d'équivalence R_{Y} telle que $x\,\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}\,y \iff y - x \in \mathrm{Y}$. Le quotient X/Y est muni de l'unique structure d'espace vectoriel pour laquelle l'application quotient $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ est linéaire. La classe de 0_{X} est égale à Y, et c'est le vecteur nul de l'espace quotient X/Y ; les autres classes sont les translatés de Y (ce sont les sous-espaces affines $Y + x$, parallèles à Y).

Proposition 1.3.2. *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel fermé de* X *; notons* $\pi : X \to X/Y$ *l'application quotient. L'application* $q : X/Y \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $q(\xi) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \pi(x) = \xi\}$ *est une norme sur* X/Y.

Notons que la distance $d(\xi, \eta)$ de deux classes de X/Y est simplement la distance naturelle des sous-ensembles ξ et η de X, c'est à dire l'inf de $d(x, y)$, lorsque x varie dans ξ et y dans η. Notons aussi que la projection π vérifie $\|\pi\| \le 1$. Notons encore que l'image par π de la boule unité ouverte $B_X(0, 1)$ de X est exactement la boule unité ouverte du quotient X/Y.

Proposition 1.3.3. *Soient* X, Z *deux espaces normés,* Y *un sous-espace fermé de* X *et* $g \in \mathcal{L}(X, Z)$ *nulle sur* Y *; il existe une unique* $h \in \mathcal{L}(X/Y, Z)$ *telle que* $g = h \circ \pi$ *(où* $\pi : X \to X/Y$ *est l'application quotient) ; on a* $\|g\| = \|h\|$.

Proposition 1.3.4. *Soient* X *un espace de Banach et* Y *un sous-espace fermé ; alors* X/Y *est un espace de Banach.*

1.4. Complété d'un espace normé

Lemme 1.4.1. *Soient* X, Y *deux espaces normés,* F *un espace de Banach,* $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ *une application linéaire isométrique d'image dense ; pour tout* $f \in \mathcal{L}(X, F)$*, il existe une unique* $g \in \mathcal{L}(Y, F)$ *telle que* $f = g \circ u$*. On a* $\|f\| = \|g\|$.

Corollaire 1.4.1. *Soient* X *un espace normé,* X_0 *un sous-espace vectoriel de* X*, dense dans* X *et* F *un espace de Banach ; toute application linéaire continue* $f : X_0 \to F$ *se prolonge de façon unique en application linéaire continue* $\widetilde{f} : X \to F$*, et* $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

C'est par ce procédé que l'on définit par exemple la transformée de Fourier sur $X = F = L_2(\mathbb{R})$, à partir de sa définition intégrale sur le sous-espace dense $X_0 = L_1 \cap L_2$.

Théorème 1.4.1. *Soit* X *un espace normé ;*

(i) *il existe un couple* (E, u) *où* E *est un espace de Banach et* $u : X \to E$ *est une application linéaire isométrique d'image dense (l'espace* E *sera le* complété *de* X*) ;*

(ii) *si* (E, u) *est comme dans* (i)*, pour tout espace de Banach* F *et toute* $f \in \mathcal{L}(X, F)$*, il existe une unique* $g \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que* $f = g \circ u$ *; on a* $\|f\| = \|g\|$ *;*

(iii) *si* (E_1, u_1) *et* (E_2, u_2) *sont deux couples comme dans* (i)*, il existe une bijection linéaire isométrique* $v : E_1 \to E_2$ *telle que* $u_2 = v \circ u_1$ *(autrement dit : le complété de* X *est* unique *à isomorphisme près).*

On appelle *complété* de X un couple (E, u) où E est un espace de Banach et $u : X \to E$ est une application linéaire isométrique d'image dense. Le plus souvent, on ne mentionne pas l'application u : on dit alors que E est un *complété* de X (ou **le** *complété* de X).

1.5. Complexifié d'un espace normé réel

Définition 1.5.1. Soit X un espace vectoriel réel ; on appelle *complexifié* de X l'espace vectoriel complexe $X_{\mathbb{C}}$ obtenu en munissant l'espace vectoriel réel $X \times X$ de la structure d'espace vectoriel complexe donnée par $(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in X$). On identifie X à une partie de $X_{\mathbb{C}}$ par l'application $x \to (x, 0)$, de sorte que $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ peut s'écrire $x + iy$, avec $x, y \in X$.

Si l'espace réel X est normé, on peut définir sur $X_{\mathbb{C}}$ une norme p qui soit une norme *d'espace complexe*, c'est à dire telle que $p(\lambda z) = |\lambda|\, p(z)$ si λ est un nombre complexe quelconque, et de façon que les "vecteurs réels" $z = (x, 0)$ gardent la même norme. Une façon de procéder est la suivante : si $z = x + iy \in X_{\mathbb{C}}$, on pose

$$p(x + iy) = \max\{\|\cos(\theta)\, x - \sin(\theta)\, y\|_X : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

1.6. Le dual d'un espace normé

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un espace normé sur $\mathbb{K}$; on appelle *dual* (topologique) de X et on note X^* l'espace de Banach $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Cet espace est complet par la proposition 2.3.

Définition 1.6.1. Soient X et Y deux espaces normés et $f \in \mathcal{L}(X, Y)$; on appelle *transposée topologique* de f (ou juste *transposée*) l'application ${}^t f : y^* \to y^* \circ f$ de Y^* dans X^*.

Proposition 1.6.1. *Soient* X, Y *et* Z *des espaces normés ;*

(i) pour tout $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, l'application ${}^t f$ est linéaire et continue et $\|{}^t f\| \le \|f\|$;

(ii) l'application $f \to {}^t f$ est linéaire de $\mathcal{L}(X, Y)$ dans $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$;

(iii) pour tout $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ et tout $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$, on a ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$ (bien noter l'interversion de f et g).

Soit X un espace normé complexe ; c'est, en particulier, un espace normé réel. Il y a deux notions distintes de dual pour X : le dual en tant qu'espace réel $X^*_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ et le dual en tant qu'espace complexe $X^*_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$. En fait, on peut identifier ces deux espaces. Notons $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ asssocie sa partie réelle a (pour $a, b \in \mathbb{R}$).

Proposition 1.6.2. *L'application $g \to \mathrm{Re} \circ g$ est une bijection isométrique de $X^*_{\mathbb{C}}$ sur l'espace $X^*_{\mathbb{R}}$.*

Dualité des espaces ℓ_p

Pour $p \in [1, +\infty]$, on appelle *exposant conjugué* de p le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Cette relation est symétrique ; on dit que (p, q) est un couple *d'exposants conjugués*.

Théorème 1.6.1 : inégalité de Hölder. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$; si $\xi = (x_n) \in \ell_p$ et $\eta = (y_n) \in \ell_q$, alors $(x_n y_n) \in \ell_1$ et*

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Big| \le \|\xi\|_p\, \|\eta\|_q.$$

Si $f \in L_p(\Omega, \mu)$ et $g \in L_q(\Omega, \mu)$, la fonction produit fg est intégrable et

$$\Big|\int_\Omega f g \, d\mu\Big| \le \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

Corollaire 1.6.1. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$ et $x = (x_n) \in \ell_p$; on a*

$$\|x\|_p = \sup\{\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n\Big| : y = (y_n) \in \ell_q,\ \|y\|_q \le 1\}.$$

Si $f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$,

$$\|f\|_p = \sup\{\Big|\int_\Omega f g \, d\mu\Big| : \|g\|_q \le 1\}.$$

Corollaire 1.6.2. *Soient $p, q, r \in]0, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1/r$ et $f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$, $g \in \mathrm{L}_q(\Omega, \mu)$; alors*

$$\Big(\int_\Omega |fg|^r \, d\mu\Big)^{1/r} \le \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\Big)^{1/q}.$$

De même, si $x \in \ell_p$ et $y \in \ell_q$,

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n|^r\Big)^{1/r} \le \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^q\Big)^{1/q}.$$

Soit $v = (v_n) \in \ell_q$, où q est l'exposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$. D'après ce qui précède, on peut définir une forme linéaire continue f_v sur ℓ_p en posant

$$\forall u \in \ell_p, \quad f_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Théorème 1.6.2. *Si $1 \le p < +\infty$ le dual de ℓ_p s'identifie à ℓ_q : l'application J_q qui associe à chaque $v \in \ell_q$ la forme linéaire $f_v \in (\ell_p)^*$ définit une bijection isométrique de ℓ_q sur le dual de ℓ_p ; de plus, J_1 définit une bijection isométrique de ℓ_1 sur le dual de c_0.*

Le dual de $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$

Soit q le nombre tel que $1/q + 1/p = 1$; d'après l'inégalité de Hölder, on a pour toutes fonctions $f \in \mathrm{L}_p$, $g \in \mathrm{L}_q$

$$\Big|\int_\Omega f g \, d\mu\Big| \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Ceci signifie que si g est fixée dans L_q, on peut définir une forme linéaire continue ℓ_g sur L_p par la formule

$$\ell_g(f) = \int_\Omega f g \, d\mu.$$

De plus on a vu que

$$\|\ell_g\|_{\mathrm{L}_p^*} = \|g\|_q.$$

On a donc une isométrie $j_q : \mathrm{L}_q \to (\mathrm{L}_p)^*$.

Lorsque $1 \le p < +\infty$, l'application j_q est une isométrie surjective de L_q sur le dual de L_p.

En revanche, le dual de L_∞ est en général “plus grand” que L_1, c'est à dire qu'il existe des formes linéaires continues sur L_∞ qui ne peuvent pas être représentées sous la forme ℓ_f, $f \in \mathrm{L}_1$.

Dual de C(K)

Une *mesure réelle* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (pas de valeur infinie ici !) qui est σ-additive, c'est à dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. Une *mesure complexe* μ est une application σ-additive $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Le théorème de décomposition de Hahn dit qu'une mesure réelle est la différence de deux mesures positives bornées ; plus précisément, il existe un ensemble $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geq 0\,; \quad \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \leq 0.$$

On dit que B porte la partie positive de la mesure réelle μ, et on peut décomposer μ en posant $\mu_1(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $\mu_2(\mathrm{A}) = -\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. On a alors $\mu = \mu_1 - \mu_2$ et μ_1, μ_2 sont deux mesures positives bornées. Avec cette décomposition, on définit la valeur absolue de μ, qui est la mesure positive $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$. On peut définir $|\mu|$ directement par

$$|\mu(\mathrm{A})| = \sup\{\mu(\mathrm{A}_1) - \mu(\mathrm{A}_2)\}$$

où le sup porte sur toutes les partitions de $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ en deux ensembles $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}$. On posera $\|\mu\| = |\mu(\Omega)|$. Cette expression définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Si K est un espace métrique compact, les boules ouvertes de K engendrent une tribu qui s'appelle la *tribu borélienne* $\mathcal{B}$ de K. Les formes linéaires sur C(K) s'identifient aux mesures réelles sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ dans le cas réel, aux mesures complexes dans le cas complexe, et la norme de dual de C(K) est la norme de mesure définie plus haut. La dualité s'exprime par l'intégration d'une fonction continue par rapport à la mesure réelle (ou complexe) μ,

$$\ell(f) = \int_{\mathrm{K}} f(s)\, d\mu(s).$$

2. Les théorèmes fondamentaux

2.1. Le théorème de Baire et ses conséquences

Théorème 2.1.1 : théorème de Baire. *Soit* X *un espace métrique complet ; l'intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes et denses de* X *est dense dans* X.

Corollaire 2.1.1. *Soient* X *un espace métrique complet* non vide *et* $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de parties fermées de* X *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n = \mathrm{X}$ *; alors l'un des fermés* F_n *a un intérieur non vide (et en réalité, on peut même dire que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{\mathrm{F}}_n$ *est dense dans* X*).*

Théorème 2.1.2 : théorème des isomorphismes. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; toute application linéaire continue bijective de* E *sur* F *est un isomorphisme.*

On dit qu'une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est *ouverte* lorsque l'image de tout ouvert de X est ouverte dans Y ; cela revient exactement à dire que pour tout point $x \in \mathrm{X}$ et tout voisinage V de x, l'image $f(\mathrm{V})$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y.

Pour qu'une application linéaire f d'un espace normé X dans un autre Y soit ouverte, il suffit de savoir que l'image de la boule unité ouverte $\mathrm{B}_\mathrm{X}(0,1)$ de X est ouverte dans Y. Un isomorphisme entre deux espaces de Banach est une application ouverte, et la composition de deux applications ouvertes est une application ouverte.

Théorème 2.1.3 : théorème de l'application ouverte. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; toute application linéaire, continue, surjective* f *de* E *sur* F *est ouverte.*

Le graphe d'une application continue d'un espace topologique dans un espace topologique séparé est toujours fermé. La réciproque n'est en général pas vraie. Cependant, on a :

Théorème 2.1.4 : théorème du graphe fermé. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; toute application linéaire de* E *dans* F *dont le graphe est fermé (dans* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$*) est continue.*

Théorème 2.1.5 : théorème de Banach-Steinhaus. *Soient* E *un espace de Banach,* F *un espace normé et* A *une partie de* $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*, telle que, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, le sous-ensemble* $\{\|f(x)\| : f \in \mathrm{A}\}$ *soit borné (dans* $\mathbb{R}$*). Alors* $\{\|f\| : f \in \mathrm{A}\}$ *est borné.*

Corollaire 2.1.2. *Soient* E *un espace de Banach,* F *un espace normé et* (f_n) *une suite d'applications linéaires continues de* E *dans* F *; on suppose que, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, la suite* $(f_n(x))$ *converge ; notons* $f(x)$ *sa limite. Alors* f *est (linéaire et) continue.*

2.2. Théorème de Hahn-Banach

On dit que $q : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ est *sous-linéaire* si elle est positivement homogène et sous-additive, c'est à dire qu'elle vérifie

(i) pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$
(ii) pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, on a $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

Les semi-normes sont des fonctions sous-linéaires. Un autre exemple important de fonction sous-linéaire est donné par la *jauge* d'un ensemble convexe C contenant 0_X

comme *point interne*, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathrm{X}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que le segment $[-\varepsilon\, x, \varepsilon\, x]$ soit contenu dans C. On pose alors

$$j_{\mathrm{C}}(x) = \inf\{\lambda : \lambda > 0 \ \text{ et } \ \lambda^{-1}x \in \mathrm{C}\}.$$

Théorème 2.2.1 : théorème de prolongement de Hahn-Banach. *Soient* X *un espace vectoriel réel,* Y *un sous-espace vectoriel de* X *et* q *une fonction sous-linéaire sur* X *; pour toute forme linéaire* ℓ *sur* Y, *telle que* $\ell(y) \le q(y)$ *pour tout* $y \in \mathrm{Y}$, *il existe une forme linéaire* m *sur* X *qui prolonge* ℓ, *c'est à dire telle que* $m(y) = \ell(y)$ *pour tout* $y \in \mathrm{Y}$ *et telle que* $m(x) \le q(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{X}$.

Théorème 2.2.2 : théorème de séparation de Hahn-Banach. *Soient* X *un espace normé réel,* A *un convexe ouvert non vide et* B *un convexe non vide tels que* A *et* B *soient disjoints. Il existe alors une forme linéaire continue* f **non nulle** *sur* X *telle que*

$$\sup f(\mathrm{A}) \le \inf f(\mathrm{B}).$$

Autrement dit, il existe un nombre c *tel que* $f(a) \le c$ *pour tout* $a \in \mathrm{A}$ *et* $c \le f(b)$ *pour tout* $b \in \mathrm{B}$. *En fait, on a* $f(a) < c$ *pour tout* $a \in \mathrm{A}$.

Une façon de voir le résultat est de dire que la forme linéaire f sépare l'espace X en deux demi-espaces affines $\mathrm{H}_- = \{f < c\}$ et $\mathrm{H}_+ = \{f \ge c\}$, dont la frontière commune est l'hyperplan affine $\mathrm{H} = \{f = c\}$. L'énoncé nous dit que $\mathrm{A} \subset \mathrm{H}_-$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{H}_+$.

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et X^* le dual topologique de X.

Théorème 2.2.3 : théorème de Hahn-Banach. *Soient* X *un espace normé (réel ou complexe) et* Y *un sous-espace vectoriel de* X *; pour tout* $\ell \in \mathrm{Y}^*$, *il existe* $m \in \mathrm{X}^*$ *dont la restriction à* Y *soit* ℓ *et telle que* $\|m\| = \|\ell\|$.

Corollaire 2.2.1. *Soient* X *un espace normé et* $x \in \mathrm{X}$ *; il existe* $x^* \in \mathrm{X}^*$ *telle que* $x^*(x) = \|x\|$ *et* $\|x^*\| \le 1$.

Corollaire 2.2.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés ; pour tout* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *on a* $\|{}^t\!f\| = \|f\|$.

Corollaire 2.2.3. *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace fermé ; alors il existe une partie* A *de* X^* *telle que* $\mathrm{Y} = \bigcap_{\ell \in \mathrm{A}} \ker(\ell)$.

Si C *est un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace normé réel* X, *alors* C *est l'intersection de demi-espaces affines fermés.*

Remarque 2.2.1. Le dual de X/Y est identifiable isométriquement au sous-espace de X^* formé des x^* dont la restriction à Y est nulle.

Proposition 2.2.1. *Soit* X *un espace normé ;*

(i) *pour que* X *soit de dimension finie il faut et il suffit que son dual soit de dimension finie ; dans ce cas, la dimension de* X^* *est égale à celle de* X *;*

(ii) *soient* X *et* Y *des espaces normés et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *; l'application* T *est de rang fini si et seulement si sa transposée* ${}^t\mathrm{T}$ *est de rang fini ; dans ce cas, le rang de* T *coïncide avec celui de sa transposée.*

Bidual d'un espace normé

Soit X un espace normé ; le dual du dual X^* de X s'appelle le *bidual* de X et se note X^{**}. Pour $x \in X$ notons $I_X(x) : X^* \to \mathbb{K}$ la forme linéaire sur X^* qui à $x^* \in X^*$ associe $x^*(x)$. On dit que $I_X \in \mathcal{L}(X, X^{**})$ est l'application canonique de X dans son bidual.

Corollaire 2.2.4. *L'application canonique* $I_X : X \to X^{**}$ *est isométrique.*

Définition 2.2.1. Un espace de Banach E est dit *réflexif* si l'application canonique $I_E : E \to E^{**}$ est bijective.

Autrement dit, un espace de Banach E est réflexif lorsque toute forme linéaire x^{**} continue sur le dual E^* provient d'un vecteur x de E de la façon expliquée précédemment,

$$\forall x^* \in E^*, \quad x^{**}(x^*) = x^*(x).$$

Exemples 2.2.1. Les espaces ℓ_p, $L_p(\Omega, \mu)$, sont réflexifs lorsque $1 < p < +\infty$. En revanche, les espaces c_0, ℓ_1 et ℓ_∞ sont des espaces de Banach non réflexifs.

Proposition 2.2.2. *Si* X *est réflexif, alors* X^* *est réflexif.*

Proposition 2.2.3. *Si* X *est réflexif, tout sous-espace fermé* Y *de* X *est réflexif.*

Corollaire 2.2.5. *Si* X^* *est réflexif, alors* X *est réflexif.*

2.3. Parties totales. Séparabilité

On dit qu'un espace métrique (Z, d) est *séparable* s'il existe une partie *dénombrable* $D \subset Z$ qui soit dense dans Z.

Exemple 2.3.1. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$), de même que tout espace normé de dimension finie. Les espaces ℓ_p et les espaces $L_p([0, 1])$ sont séparables pour $1 \le p < \infty$. En revanche, ℓ_∞ et $L_\infty([0, 1])$ ne sont pas séparables.

Soient X un espace normé et D un sous-ensemble de X ; on dit que D est *total* dans X si le seul sous-espace fermé de X contenant D est X. Autrement dit, D est total si le sous-espace vectoriel L (algébrique) engendré par D est dense dans X (ce sous-espace L est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de D).

Le théorème de Hahn-Banach donne le critère suivant : pour que D soit total dans X, il faut et il suffit que toute forme linéaire $x^* \in X^*$, nulle sur D, soit identiquement nulle.

Proposition 2.3.1. *Pour qu'un espace normé* X *soit séparable, il suffit qu'il admette une partie dénombrable totale.*

Proposition 2.3.2. *Soit* X *un espace normé ; si le dual* X^* *est séparable, alors* X *est séparable.*

2.4. Théorème de Riesz

Théorème 2.4.1. *Si la boule unité d'un espace normé* X *est compacte, alors* X *est de dimension finie.*

On dit qu'un opérateur T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est *compact* si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E est compacte dans F.

Corollaire 2.4.1. *Soit* E *un espace de Banach, réel ou complexe ; si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est compact et si* $\lambda \neq 0$*, le sous-espace* $\mathrm{F}_\lambda = \ker(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{E} : \mathrm{T}(y) = \lambda y\}$ *est de dimension finie.*

3. Topologies faibles

3.1. Topologies initiales

Proposition 3.1.1. *Donnons-nous deux ensembles* I *et* X, *une famille* $(\mathrm{Y}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *d'espaces topologiques et, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *une application* $f_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$. *Il existe une topologie* $\mathcal{O}$ *sur* X *caractérisée par la propriété suivante :*

(P)	*pour qu'une application* g *d'un espace topologique* Z *dans* X *muni de la topologie* $\mathcal{O}$ *soit continue il faut et il suffit que les applications* $f_i \circ g$ *soient continues pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

La topologie sur X possédant la propriété (P) de la proposition 1 s'appelle *topologie initiale* associée à la famille f_i. C'est la topologie sur X la moins fine rendant continues les applications $f_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$.

Une suite (x_n) de points de X tend vers $x \in \mathrm{X}$ si et seulement si : pour tout $i \in \mathrm{I}$ la suite $f_i(x_n)$ converge vers $f_i(x)$.

Proposition 3.1.2. *Donnons-nous un ensemble* I, *un espace vectoriel* X, *une famille* $(\mathrm{Y}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *d'espaces vectoriels topologiques (cf. définition 1.1.2) et, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *une application linéaire* $f_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$. *Muni de la topologie initiale associée aux applications* f_i, *l'espace* X *est un espace vectoriel topologique.*

Soient X un espace vectoriel, I un ensemble et $(p_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de semi-normes sur X ; pour $i \in \mathrm{I}$, notons X_i l'espace X muni de la topologie associée à p_i et $f_i : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_i$ l'identité de X. On appelle *topologie associée à la famille de semi-normes* $(p_i)_{i\in \mathrm{I}}$ la topologie initiale associée aux applications f_i. Muni de cette topologie, X est d'après la proposition précédente, un espace vectoriel topologique.

Exemple 3.1.1. Soient X, Y des espaces vectoriels et $\mathrm{B} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire ; pour $y \in \mathrm{Y}$ notons $p_y : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ l'application $x \to |\mathrm{B}(x, y)|$. C'est une semi-norme sur X. La topologie sur X associée à la famille des semi-normes p_y s'appelle la topologie *faible* associée à B, ou à Y s'il n'y a pas d'ambiguité sur la forme B ; cette topologie se note $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Cette topologie est la topologie initiale associée aux applications $f_y : \mathrm{X} \to \mathbb{K}$, où, pour $y \in \mathrm{Y}$ on a noté f_y l'application $x \to \mathrm{B}(x, y)$. En d'autres termes, la topologie faible est la topologie la plus faible pour laquelle les applications f_y sont continues.

Une suite (x_n) dans X converge vers $x \in \mathrm{X}$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, si et seulement si, pour tout $y \in \mathrm{Y}$, la suite $(\mathrm{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{B}(x, y)$.

Définition 3.1.1. Soient X et Y deux espaces normés ; chaque élément x de X définit une semi-norme N_x sur $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ donnée par $\mathrm{N}_x(f) = \|f(x)\|$. On appelle *topologie forte* sur $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ la topologie associée à la famille de semi-normes $(\mathrm{N}_x)_{x\in \mathrm{X}}$.

Une suite (f_n) dans $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ converge vers $f \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour la topologie forte si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{X}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour la topologie de la norme sur Y.

3.2. Topologie faible sur un espace normé

La topologie $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}^*)$ sur X, appellée aussi *topologie faible* sur X, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $x \in \mathrm{X} \to x^*(x)$, où x^* décrit l'ensemble de toutes les formes linéaires continues (en norme) sur X ; puisque la topologie de la norme rend déjà continues toutes ces applications, la topologie faible $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}^*)$ est plus faible que la topologie de la norme. Elle est strictement plus faible lorsque X est de dimension infinie.

Proposition 3.2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces normés et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; alors* T *est continue de* E *muni de la topologie* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}^*)$ *dans* F *muni de la topologie* $\sigma(\mathrm{F}, \mathrm{F}^*)$.

Théorème 3.2.1. *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel de* X *; alors* Y *est fermé pour la topologie de la norme si et seulement s'il est fermé pour* $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}^*)$. *Plus généralement, si* C *est un sous-ensemble convexe de* X, *il est fermé en norme si et seulement s'il est faiblement fermé.*

Si X est un espace vectoriel normé, la topologie $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$ ou *topologie* $*$*-faible* sur X^* est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications $x^* \in \mathrm{X}^* \to x^*(x)$, où x décrit X ; puisque la topologie de la norme de X^* rend déjà continues toutes ces applications, la topologie $*$-faible est plus faible que la topologie de la norme sur X^*.

Théorème 3.2.2. *Muni de la topologie* $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$ *la boule unité de* X^* *est compacte.*

Ce théorème est un corollaire du théorème de Tykhonov que nous admettrons.

Théorème 3.2.3 : théorème de Tykhonov. *Tout produit d'espaces compacts (muni de la topologie produit) est compact.*

(Rappelons que la topologie produit sur $\prod \mathrm{X}_i$ est la topologie initiale associée aux projections $\prod \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_i$).

3.3. Suites faiblement convergentes

Rappelons qu'une suite $(x_n^*) \subset \mathrm{X}^*$ est $*$-faiblement convergente vers un vecteur x^* si $\lim_n x_n^*(x) = x^*(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$; une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ est faiblement convergente vers $x \in \mathrm{X}$ si $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ pour tout $x^* \in \mathrm{X}^*$.

Toute **suite** faiblement convergente dans X est bornée ; toute **suite** $*$-faiblement convergente dans X^* est bornée. Ces deux résultats viennent du corollaire 2.1.2.

Proposition 3.3.1. *Si* E *est un espace normé séparable, toute suite bornée de* E^* *admet des sous-suites* $*$*-faiblement convergentes.*

Théorème 3.3.1. *Si* X *est réflexif, toute suite bornée dans* X *admet des sous-suites faiblement convergentes.*

Théorème 3.3.2. *Si* C *est un convexe fermé borné non vide d'un espace réflexif et si* f *est une fonction convexe continue sur* C, *elle atteint son minimum sur* C.

Corollaire 3.3.1. *Si* f *est convexe continue sur* E *réflexif et si* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* $\|x\| \to +\infty$, *la fonction* f *atteint son minimum sur* E.

4. Espaces hilbertiens

4.1. Produits scalaires

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes ; une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est dite *antilinéaire* si, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 4.1.1. Soit E un espace vectoriel complexe ; on appelle *forme sesquilinéaire* sur E une application $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $y \in \mathrm{E}$, l'application $x \to \mathrm{B}(x, y)$ soit linéaire et telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $y \to \mathrm{B}(x, y)$ soit antilinéaire (de E dans $\mathbb{C}$).

Rappelons qu'une forme bilinéaire B sur un espace vectoriel réel E est dite *symétrique* si, pour tout $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\mathrm{B}(y, x) = \mathrm{B}(x, y)$.

Proposition 4.1.1 : identité de polarisation.

(i) *Soient* E *un espace vectoriel complexe et* B *une forme sesquilinéaire sur* E *; pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$ *on a*

$$4\,\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(x+y, x+y) - \mathrm{B}(x-y, x-y) + i\mathrm{B}(x+iy, x+iy) - i\mathrm{B}(x-iy, x-iy).$$

(ii) *Soient* E *un espace vectoriel réel et* B *une forme bilinéaire symétrique sur* E *; pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$ *on a*

$$4\,\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(x+y, x+y) - \mathrm{B}(x-y, x-y).$$

En particulier, pour connaître une forme sesquilinéaire ou une forme bilinéaire symétrique B sur E, il suffit de connaître $\mathrm{B}(x, x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Corollaire 4.1.1. *Soient* E *un espace vectoriel complexe et* B *une forme sesquilinéaire sur* E *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$ *on a* $\mathrm{B}(y, x) = \overline{\mathrm{B}(x, y)}$ *;*
(ii) *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on a* $\mathrm{B}(x, x) \in \mathbb{R}$.

Soit E un espace vectoriel complexe ; on appelle *forme hermitienne* sur E une forme sesquilinéaire vérifiant les conditions équivalentes du corollaire 1. On peut résumer ces conditions ainsi : la forme φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est hermitienne si elle vérifie les deux conditions suivantes :

– pour tout $y \in \mathrm{E}$, l'application $x \to \varphi(x, y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire sur E ;
– pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

Une forme hermitienne B sur un espace vectoriel complexe E est dite *positive* si, pour tout $x \in \mathrm{E}$, le nombre $\mathrm{B}(x, x)$ est réel ≥ 0. Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel réel E est dite *positive* si, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $\mathrm{B}(x, x) \geq 0$.

Convenons d'appeler *produit scalaire* une forme symétrique positive sur un espace réel ou une forme hermitienne positive sur un espace complexe. Le plus souvent, nous noterons les produits scalaires $(x, y) \to \langle x, y \rangle$.

Proposition 4.1.2 : inégalité de Cauchy-Schwarz. *Soit* E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ; pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$ *on a*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle.$$

Corollaire 4.1.2. *Soit* E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ; l'application* $x \to \langle x, x\rangle^{1/2}$ *est une semi-norme sur* E.

Notons encore une relation utile, appelée la *relation du parallélogramme*,

$$\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\big(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\big).$$

4.2. Espaces hilbertiens

On appellera *espace préhilbertien* un espace vectoriel E (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire tel que la semi-norme $p(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ soit une norme sur E. Tout espace préhilbertien sera considéré comme espace normé, muni de la norme ci-dessus, qui sera notée simplement $\|x\|$ désormais.

Proposition 4.2.1. *Soit* E *un espace préhilbertien ; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{E}$ *la forme linéaire* $f_x : y \to \langle y, x\rangle$ *est continue. L'application* $x \to f_x$ *est antilinéaire et isométrique de* E *dans* E^*.

Définition 4.2.1. Soit E un espace préhilbertien ; on dit que les éléments x et y de E sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$. On dit que des parties A et B sont *orthogonales* si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B. Soit A une partie de E ; on appelle orthogonal de A l'ensemble $\mathrm{A}^\perp$ des éléments de E orthogonaux à A.

Il est clair que $\mathrm{A}^\perp = \bigcap_{x\in \mathrm{A}} \ker f_x$. Donc $\mathrm{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Définition 4.2.2. Un *espace hilbertien* est un espace préhilbertien complet.

Soit (E, p) un espace normé ; on dira que p est issu d'un produit scalaire, s'il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur E tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$ on ait $p(x) = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Si un tel produit scalaire existe, il est unique, par la proposition 1.1. On dira que (E, p) est un espace préhilbertien, si p est issu d'un produit scalaire. On dira que (E, p) est un espace hilbertien, s'il est préhilbertien complet.

Proposition 4.2.2. *Soit* E *un espace préhilbertien ; le complété de* E *est un espace hilbertien.*

Exemples 4.2.1. L'espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ est un espace hilbertien pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}\, d\mu(s).$$

L'espace ℓ_2 est un cas particulier.

4.3. Le théorème de projection

Théorème 4.3.1 : théorème de projection. *Soient* H *un espace hilbertien et* C *une partie convexe fermée non vide de* H *; pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *il existe un et un seul point* y_0 *de* C *en lequel la fonction* $y \to \|y - x\|$ *atteint son minimum. Pour tout* $y \in \mathrm{C}$, *la partie réelle de* $\langle x - y_0, y - y_0\rangle$ *est négative.*

Un cas particulier important est celui où C est un sous-espace vectoriel fermé E de H. Dans ce cas on a $\langle x - y_0, z\rangle = 0$ pour tout vecteur $z \in \mathrm{E}$, c'est à dire que $x - y_0 \perp \mathrm{E}$.

Dans le cas de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé E, la projection y_0 de x sur E est entièrement caractérisée par les deux conditions suivantes

– le vecteur y_0 appartient à E ;
– le vecteur $x - y_0$ est orthogonal à E.

On notera $\mathrm{P_E}(x) = y_0$ la projection orthogonale de x sur E. La caractérisation ci-dessus montre que $\mu \mathrm{P_E}(x) + \mu' \mathrm{P_E}(x')$ est la projection de $\mu x + \mu' x'$, autrement dit l'application $\mathrm{P_E}$ est une application linéaire. L'égalité $(*)$ ci-dessus donne aussi $\|x-y\| \geq \|\mathrm{P_E}(x)-y\|$ pour tout $y \in \mathrm{E}$, donc $\|x\| \geq \|\mathrm{P_E}(x)\|$ en prenant $y = 0$; on a donc $\|\mathrm{P_E}\| \leq 1$.

Si E est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien H on appelle *projecteur orthogonal* sur E l'opérateur $\mathrm{P_E} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ qui associe à tout vecteur $x \in \mathrm{H}$ sa projection sur E.

Proposition 4.3.1. *Soient* H *un espace hilbertien et* E *un sous-espace vectoriel fermé de* H *; on a* $\mathrm{E} \oplus \mathrm{E}^\perp = \mathrm{H}$.

Corollaire 4.3.1. *Soit* H *un espace hilbertien ;*

(i) *pour toute partie* A *de* H, *l'ensemble* $(\mathrm{A}^\perp)^\perp$ *est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de* H *contenant* A *;*

(ii) *si* F *est un sous-espace vectoriel de* H, *on a* $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{F}}$.

Proposition 4.3.2. *Soit* H *un espace hilbertien ; l'application isométrique antilinéaire* $x \to f_x$ *de la proposition 2.1 est une bijection de* H *sur* H^*.

En d'autres termes, pour toute forme linéaire continue ℓ *sur* H, *il existe un vecteur* $y_\ell \in \mathrm{H}$ *unique qui représente la forme linéaire* ℓ *au sens suivant :*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, y_\ell\rangle.$$

Exemple 4.3.2. Pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}_2$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{L}_2, \quad \ell(f) = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}\, d\mu(s).$$

Corollaire 4.3.2. *Tout espace hilbertien est réflexif.*

4.4. Adjoint d'une application linéaire continue

Proposition 4.4.1. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; il existe un unique* $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et tout* $y \in \mathrm{F}$ *on ait* $\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y)\rangle$.

Définition 4.4.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; l'unique $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $y \in \mathrm{F}$ on ait $\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(y)\rangle$ est appelé *adjoint* de T.

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints :

Proposition 4.4.2. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens ; l'application* $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ *est antilinéaire et isométrique de* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *sur* $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *; pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *on a* $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$ *et* $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$. *Pour tout espace hilbertien* H, *tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{H})$ *on a* $(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})^* = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{T}^*$.

Proposition 4.4.3. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; alors* $\ker \mathrm{T}^* = (\mathrm{T}(\mathrm{E}))^{\perp}$ *et l'adhérence de* $\mathrm{T}^*(\mathrm{F})$ *est* $(\ker \mathrm{T})^{\perp}$.

Définition 4.4.2. Soient E et F deux espaces hilbertiens ; un élément $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est appelé *unitaire* si $\mathrm{U}^* \circ \mathrm{U} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{U} \circ \mathrm{U}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Un élément $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est appelé *normal* si $\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^*$, *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ et *positif* s'il est autoadjoint et si $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ est réel ≥ 0 pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Soient H un espace hilbertien, $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un projecteur orthogonal ; notons E son image. Pour $x, x' \in \mathrm{E}$ et $y, y' \in \mathrm{E}^{\perp}$ on a $\langle \mathrm{P}(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, \mathrm{P}(x'+y')\rangle$; donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}^*$. De plus, $\langle \mathrm{P}(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+$, donc P est positif.

Proposition 4.4.4. *Soient* E *et* F *des espaces hilbertiens et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'opérateur* T *est unitaire ;*
(ii) *l'opérateur* T *est surjectif et* $\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *;*
(iii) T *est une isométrie de* E *sur* F.

4.5. Familles sommables dans un espace de Banach

Définition 4.5.1. Soient E un espace normé, I un ensemble et $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E ; on dit que la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est *sommable* de somme $\mathrm{S} \in \mathrm{E}$ et on écrit $\mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J on ait $\left\|\mathrm{S} - \sum_{i\in\mathrm{K}} x_i\right\| < \varepsilon$.

La somme S est unique.

Proposition 4.5.1. *Soient* E *et* F *deux espaces normés,* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille sommable d'éléments de* E *; alors la famille* $(f(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable dans* F *et on a* $\sum_{i\in\mathrm{I}} f(x_i) = f(\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i)$.

■

Soient E un espace normé et $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E ; on dit que la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ vérifie le *critère de sommabilité de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie L de I disjointe de J, on ait $\left\|\sum_{i\in\mathrm{L}} x_i\right\| < \varepsilon$.

Proposition 4.5.2. (i) *Toute famille sommable d'un espace normé vérifie le critère de sommabilité de Cauchy.*

(ii) *Dans un espace de Banach, toute famille vérifiant le critère de sommabilité de Cauchy est sommable.*

Remarque 4.5.1. Si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille sommable d'éléments d'un espace normé E, il n'y a qu'une quantité dénombrable d'indices $i \in \mathrm{I}$ tels que $x_i \neq 0_{\mathrm{E}}$. En d'autres termes, on peut toujours se ramener au cas $\mathrm{I} = \mathbb{N}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable, et notons S sa somme ; alors la série $\sum x_n$ est convergente et sa somme est égale à S. La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ n'est donc pas en conflit avec la notation des séries.

La réciproque n'est cependant pas vraie : il existe des séries convergentes $\sum_{k\geq 0} u_k$ telles que la famille (u_k) ne soit pas sommable. En fait, une famille (u_k) de nombres réels est sommable si et seulement si la série $\sum u_k$ est **absolument** convergente, c'est à dire que $\sum_k |u_k| < +\infty$; on a en effet le résultat suivant :

Proposition 4.5.3. *Une famille de nombres réels à termes positifs est sommable si et seulement si les sommes finies sont majorées ; sa somme est alors le plus petit des majorants des sommes finies. Une famille à termes réels est sommable si et seulement si elle est absolument sommable.*

Corollaire 4.5.1. *Soient* E *un espace de Banach et* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille d'éléments de* E *;*

(i) soit $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de nombres réels ; si pour tout* $i\in\mathrm{I}$*, on a* $\|x_i\| \leq t_i$ *et si la famille* $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable. En particuler, si la famille* $(\|x_i\|)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable ;*

(ii) si la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, pour toute partie* $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$*, la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{J}}$ *est sommable.*

Dans un espace de Hilbert, on dispose d'un outil très simple pour tester la sommabilité d'une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, appelée aussi *système orthogonal.*

Lemme 4.5.1. *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système orthogonal dans un espace hilbertien ; la famille* (x_i) *est sommable si et seulement si la famille* $(\|x_i\|^2)$ *est sommable ; dans ce cas, on a*

$$\Big\|\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\|^2.$$

4.6. Bases hilbertiennes

Définition 4.6.1. Soient E un espace préhilbertien et $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système de vecteurs de E ; on dit que le système $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est *orthogonal* si les x_i sont deux à deux orthogonaux ; on dit que c'est un *système orthonormal* si de plus, pour tout $i\in\mathrm{I}$, on a $\|x_i\| = 1$; on appelle *base hilbertienne* de E un système orthonormal total dans E.

Un sous-ensemble B de E définit un système $(b)_{b\in\mathrm{B}}$. On dira que le sous-ensemble B est orthogonal, orthonormal, ou que c'est une base hilbertienne si le système $(b)_{b\in\mathrm{B}}$ est orthogonal, orthonormal, ou est une base hilbertienne.

Théorème 4.6.1. *Tout espace hilbertien admet une base hilbertienne.*

Théorème 4.6.2 : inégalité de Bessel. *Soient* E *un espace préhilbertien et* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système orthonormal dans* E *; pour tout* $x\in\mathrm{E}$ *la famille* $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.$$

Proposition 4.6.1. *Le cardinal de tout système orthonormal d'un espace préhilbertien est inférieur ou égal à celui de tout système total.*

Corollaire 4.6.1. *Deux bases hilbertiennes d'un espace hilbertien* E *ont le même cardinal.*

Définition 4.6.2. On appelle *dimension hilbertienne* d'un espace hilbertien E le cardinal d'une base hilbertienne quelconque de E.

Théorème 4.6.3 : identité de Parseval. *Soient* E *un espace préhilbertien,* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* E *et* $x \in \mathrm{E}$ *; la famille de nombres réels* $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable, la famille de vecteurs* $(\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable dans* E *et*

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i; \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Exemple 4.6.1. Considérons l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $dx/2\pi$. Pour chaque entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n(s) = \mathrm{e}^{ins}$$

pour tout $s \in [0, 2\pi]$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, les coefficients du développement de f dans cette base sont les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \langle f, f_n\rangle = \int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-ins}\,\frac{ds}{2\pi}.$$

D'après Parseval, on a $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2\, ds/2\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

Corollaire 4.6.2. *Soient* H *un espace hilbertien,* F *un sous-espace vectoriel fermé de* H*, et* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hibertienne du sous-espace* F*. Pour tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$*, la projection orthogonale de* x *sur* F *est donnée par*

$$\mathrm{P_F}(x) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

Remarque 4.6.2. Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système orthonormal de vecteurs de E ; on a l'égalité $\|x\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2$ si et seulement si

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

4.7. L'espace hilbertien $\ell^2(\mathrm{I})$

Soit I un ensemble ; notons $\ell^2(\mathrm{I})$ l'ensemble des familles de scalaires $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que la famille de nombres réels positifs $|x_i|^2$ soit sommable. Si $\eta = (y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un autre élément de $\ell^2(\mathrm{I})$, la relation $|x_i + y_i|^2 \leq 2\big(|x_i|^2 + |y_i|^2\big)$ montre que $\xi + \eta$ est encore dans $\ell_2(\mathrm{I})$, et on en déduit facilement que $\ell_2(\mathrm{I})$ est un espace vectoriel. Pour tout $\xi = (x_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^2(\mathrm{I})$ on pose

$$\|\xi\|_2 = \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

On voit que cette quantité définit une norme sur l'espace vectoriel $\ell_2(\mathrm{I})$; en fait la relation $2|x_i\overline{y_i}| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la famille $(x_i\overline{y_i})_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, et si on pose

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i\overline{y}_i$$

on définit sur $\ell_2(\mathrm{I})$ un produit scalaire pour lequel $\langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2$.

Pour $j \in \mathrm{I}$, notons $\epsilon_j \in \ell^2(\mathrm{I})$ la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $x_j = 1$ et $x_i = 0$ si $i \in \mathrm{I}\setminus\{j\}$.

Proposition 4.7.1. *Muni du produit scalaire précédent, l'espace vectoriel* $\ell^2(\mathrm{I})$ *est un espace hilbertien. La famille* $(\epsilon_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est une base hilbertienne de* $\ell^2(\mathrm{I})$.

Théorème 4.7.1. *Soient* H *un espace hilbertien et* $\mathrm{B} = (e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* H *; l'application* $\mathrm{U} : x \to (\langle x, e_i\rangle)$ *est une bijection linéaire isométrique de* H *sur* $\ell^2(\mathrm{I})$.

Corollaire 4.7.1. *Soient* E *et* F *des espaces hilbertiens,* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* E, $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *une base hilbertienne de* F *et* σ *une bijection de* I *sur* J *; il existe une bijection linéaire isométrique* U *de* E *sur* F *telle que, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *on ait* $\mathrm{U}(e_i) = f_{\sigma(i)}$.

En d'autres termes, deux espaces hilbertiens ayant même dimension hilbertienne sont isomorphes.

Index

Adjoint (opérateur) . . . 18
Antilinéaire (application) . . . 15
Application ouverte . . . 9
Applications linéaires continues . . . 3
Autoadjoint (opérateur) . . . 18
Base hilbertienne . . . 19
Bidual . . . 11
Boule ouverte, fermée . . . 1
Boule unité d'un espace normé . . . 2
Combinaison convexe . . . 1
Complété . . . 5
Complexifié . . . 5
Conjugué (exposant) . . . 6
Critère de sommabilité de Cauchy . . . 18
Dimension hilbertienne . . . 20
Dual . . . 6, 10
Dual de ℓ_p . . . 6
Dual topologique . . . 6
Ensemble convexe . . . 1
Enveloppe convexe . . . 1
Equivalence de semi-normes . . . 4
Espace de Banach . . . 1, 2
Espace hilbertien . . . 16
Espace ℓ_p . . . 3
Espace L_p . . . 3
Espace normé . . . 1
Espace préhilbertien . . . 16
Espace réflexif . . . 11
Espace séparable . . . 11
Espace vectoriel topologique . . . 2
Espaces hilbertiens . . . 15
Espaces normés et applications linéaires . . . 1
Exposant conjugué . . . 6
Famille sommable . . . 18
Fonction convexe . . . 1
Fonction sous-linéaire . . . 9
Forme bilinéaire symétrique . . . 15
Forme hermitienne . . . 15
Forme hermitienne positive . . . 15
Forme sesquilinéaire . . . 15
Hermitienne (forme) . . . 15
Hilbertien (espace) . . . 16
Inégalité de Hölder . . . 6
Inégalité triangulaire . . . 1
Injection isométrique dans le bidual . . . 11
Jauge d'un ensemble convexe . . . 10
Mesure complexe . . . 8
Mesure réelle . . . 8
Nombre conjugué . . . 6
Normal (opérateur) . . . 18
Norme . . . 1
Norme uniforme . . . 3
Normes, semi-normes . . . 1

Opérateur adjoint . . . 18
Opérateur autoadjoint . . . 18
Opérateur compact . . . 12
Opérateur linéaire . . . 4
Opérateur normal . . . 18
Opérateur positif . . . 18
Opérateur unitaire . . . 18
Orthogonal (projecteur) . . . 17
Orthogonales (parties) . . . 16
Orthogonalité . . . 16
Orthonormal (système de vecteurs) . . . 19
Parallélogramme (relation du) . . . 16
Partie totale . . . 11
Point interne . . . 10
Positif (opérateur) . . . 18
Positive (forme hermitienne) . . . 15
Positivement homogène . . . 1
Préhilbertien (espace) . . . 16
Produit scalaire . . . 15
Produits et quotients . . . 4
Projecteur orthogonal . . . 17
Relation du parallélogramme . . . 16
Semi-norme . . . 1
Semi-normes équivalentes . . . 4
Série de vecteurs . . . 2
Série de vecteurs normalement convergente . . . 2
Sesquilinéaire (forme) . . . 15
Somme d'une série de vecteurs . . . 2
Sous-linéaire (fonction) . . . 9
Suites faiblement convergentes . . . 14
Symétrique (forme bilinéaire) . . . 15
Système de vecteurs orthogonaux . . . 19
Théorème de Baire . . . 9
Théorème de Banach-Steinhaus . . . 9
Théorème de Fisher-Riesz . . . 3
Théorème de Hahn-Banach . . . 9, 10
Théorème de l'application ouverte . . . 9
Théorème de Tykhonov . . . 14
Théorème des isomorphismes . . . 9
Théorème du graphe fermé . . . 9
Topologie $*$-faible sur le dual X^* . . . 14
Topologie associée à une famille de semi-normes . . . 13
Topologie de la norme . . . 1
Topologie faible . . . 13, 14
Topologie faible sur un espace normé . . . 14
Topologie forte sur $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ . . . 13
Topologie initiale . . . 13
Topologie $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$ . . . 14
Transposée d'une application linéaire . . . 6
Tribu borélienne . . . 8
Unitaire (opérateur) . . . 18

Index des notations

$A^{\perp}$: orthogonal de A 16
B_X : boule unité de X 2
co(A) : enveloppe convexe de l'ensemble A 1
c_0 : espace des suites qui tendent vers 0 3
$\|f\|_\infty$: norme de f dans L_∞ 3
$\|f\|_p$: norme de f dans L_p 3
I_X : application canonique de X dans son bidual 11
$j_C(x)$: jauge de l'ensemble convexe C 10
J_q : isométrie de ℓ_q dans le dual de ℓ_p 7
j_q :isométrie de L_q dans le dual de L_p 7
ℓ_∞ : espace des suites bornées 3
ℓ_p : espace des suites de puissance $p$ième sommable 3
$\mathcal{L}(X)$: espace des endomorphismes continus 4
$\mathcal{L}(X, Y)$: espace des applications linéaires continues 4
$L_\infty(\Omega, \mu)$: fonctions mesurables bornées 3
$L_p(\Omega, \mu)$: fonctions de puissance $p$ième intégrable 3
P_E : projecteur orthogonal sur E 17
$\sigma(X, X^*)$: topologie faible sur X 14
$\sigma(X, Y)$: topologie faible 13
$\sigma(X^*, X)$: topologie $*$-faible sur X^* 14
${}^t f$: transposée de l'application linéaire f 6
T^* : adjoint de l'application T 17
$\|x\|$: norme du vecteur $x \in X$ 2
$\langle x, y \rangle$: produit scalaire de x et y 15
X^* : dual de X 6
X^{**} : bidual de l'espace normé X 11
$\|x\|_\infty$: norme de x dans ℓ_∞ 3
$\|x\|_p$: norme de x dans ℓ_p 3