ANALYSE FONCTIONNELLE ET

THÉORIE SPECTRALE

MT404

Année 1999-2000

deuxième partie

5. Théorie spectrale et calcul fonctionnel

Un certain nombre de résultats de ce chapitre et des suivants n'ont de sens que pour les espaces de Banach complexes, mais quelques énoncés seront valables aussi dans le cas réel. Quand nous dirons simplement "espace de Banach", cela signifiera que le résultat est valable dans le cas réel ou complexe. Soient E, F, G des espaces normés, $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$; nous noterons TS la composée $\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$ de ces applications. Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et n entier ≥ 0, on définit T^n par récurrence en posant $\mathrm{T}^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T}\mathrm{T}^n = \mathrm{T}^n\mathrm{T}$ pour tout entier $n \geq 0$. Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ on notera $\mathrm{im}(\mathrm{T})$ le sous-espace de F *image de l'application* T, noté aussi $\mathrm{T}(\mathrm{E})$,

$$\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{F} : \exists x \in \mathrm{E},\ y = \mathrm{T}(x)\}.$$

5.1. Spectre et résolvante

Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue T de E dans F est dite *inversible* s'il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ telle que $\mathrm{ST} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{TS} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$. Cela signifie que l'application T est bijective et que T^{-1} est continue. Remarquons que par le théorème des isomorphismes, si T est bijective et continue, T^{-1} est automatiquement continue. En d'autres termes, T est inversible si et seulement si elle est bijective et continue.

Lemme 5.1.1. *Soient* E *un espace de Banach et* $\mathrm{R} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\|\mathrm{R}\| < 1$ *; alors, la série* $\sum_k \mathrm{R}^k$ *est convergente dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et sa somme est l'inverse de* $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R}$,

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{R}^k.$$

On a de plus l'estimation

$$\big\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1}\big\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathrm{R}\|}.$$

Démonstration. Comme $\|\mathrm{R}^k\| \leq \|\mathrm{R}\|^k$ pour tout entier $k \geq 0$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{R}^k$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Notons S sa somme. On vérifie facilement que

$$\mathrm{SR} = \mathrm{RS} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{R}^{k+1} = \mathrm{S} - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

ce qui implique que $\mathrm{S}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R}) = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})\mathrm{S} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. En majorant la norme de la série par la série des normes, on obtient $\| \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|\mathrm{R}\|^k = (1 - \|\mathrm{R}\|)^{-1}$.

Remarque 5.1.1. Soient encore E un espace de Banach et R un endomorphisme continu de E tel que $\|\mathrm{R}\| < 1$; en enlevant le premier terme de la série géométrique $\sum \mathrm{R}^k$, on a obtenu ci-dessus l'égalité $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1} - \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{R}\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1}$; de même, en enlevant les deux premiers termes on obtient la relation $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1} - \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R} = \mathrm{R}^2\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1}$. On en déduit les inégalités :

$$\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1} - \mathrm{Id}_\mathrm{E}\| \leq \|\mathrm{R}\|\,(1 - \|\mathrm{R}\|)^{-1}\,; \quad \|(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1} - \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R}\| \leq \|\mathrm{R}\|^2(1 - \|\mathrm{R}\|)^{-1}.$$

Proposition 5.1.1. *Soient* E, F *deux espaces de Banach ; l'ensemble* $\mathrm{U} \subset \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *L'application* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}^{-1}$ *est continue et différentiable de* U *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *; sa différentielle en* $\mathrm{T} \in \mathrm{U}$ *est* $(d\varphi)_\mathrm{T} : \mathrm{S} \to -\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1}$.

Démonstration. Soit T un opérateur inversible de E dans F ; on va montrer que la boule ouverte de l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, de centre T et de rayon $r = \|\mathrm{T}^{-1}\|^{-1} > 0$, est contenue dans U : soit en effet $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ tel que $\|\mathrm{S}\| < r$; écrivons $\mathrm{T} + \mathrm{S} = \mathrm{T}\,(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S})$. On voit que l'opérateur $\mathrm{R}_\mathrm{S} = -\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $\|\mathrm{R}_\mathrm{S}\| \le \|\mathrm{T}^{-1}\|\,\|\mathrm{S}\| < 1$, donc $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{R}_\mathrm{S} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ est inversible, ce qui entraîne que $\mathrm{T} + \mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S})$ est inversible et $(\mathrm{T} + \mathrm{S})^{-1} = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S})^{-1}\mathrm{T}^{-1}$. On a ainsi montré que U est ouvert dans l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

En utilisant le développement en série obtenu au lemme 1, on obtient que lorsque $\|\mathrm{S}\| < r$, on a $(\mathrm{T} + \mathrm{S})^{-1} = \bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{R}_\mathrm{S}^k\bigr)\,\mathrm{T}^{-1}$, ce qui peut s'écrire

$$(\mathrm{T} + \mathrm{S})^{-1} = \mathrm{T}^{-1} - \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1} - \cdots$$

Gardons en évidence les deux premiers termes du développement, sous la forme

$$(*) \qquad (\mathrm{T} + \mathrm{S})^{-1} = \mathrm{T}^{-1} - \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1} + \mathrm{V}(\mathrm{S})$$

où $\mathrm{V}(\mathrm{S}) = \bigl(\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{R}_\mathrm{S}^k\bigr)\,\mathrm{T}^{-1}$. Comme dans la remarque 1, on obtient la majoration de norme $\|\mathrm{V}(\mathrm{S})\| \le \|\mathrm{R}_\mathrm{S}\|^2\,(1 - \|\mathrm{R}_\mathrm{S}\|)^{-1}\,\|\mathrm{T}^{-1}\|$, qui montre que $\|\mathrm{V}(\mathrm{S})\| = \mathrm{O}(\|\mathrm{S}\|^2)$ lorsque $\mathrm{S} \to 0$. Puisque $\psi : \mathrm{S} \to -\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}^{-1}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ dans lui-même, la relation $(*)$ montre que l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{-1}$ est différentiable au point T (donc continue au point T) et que sa différentielle au point T est ψ.

■

Remarque 5.1.2. Dans le cas complexe, la différentiabilité d'une fonction f au point a signifie que df_a est $\mathbb{C}$-linéaire ; cette différence anodine a en fait des conséquences considérables (penser aux fonctions holomorphes, qui ne sont rien d'autre que des fonctions $\mathbb{C}$-différentiables).

Définition 5.1.1. Soient E un espace de Banach complexe et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; on appelle *spectre* de T et l'on note Sp(T) l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ ne soit pas inversible. On appelle *résolvante* de T l'application qui à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ associe l'inverse $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$. On notera si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}.$$

Si $|\lambda| > \|\mathrm{T}\|$, on peut écrire $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = -\lambda(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{T}/\lambda)$, et $\|\mathrm{T}/\lambda\| < 1$, ce qui montre que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est inversible dans ce cas. On voit donc que Sp(T) est contenu dans le disque fermé du plan complexe centré en 0 et de rayon $\|\mathrm{T}\|$. De plus, d'après le lemme 1

$$(\mathrm{R}) \qquad \text{si } \ |\lambda| > \|\mathrm{T}\|, \quad \|\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|\mathrm{T}\|}.$$

Rappelons qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans un espace de Banach F est différentiable en un point $\lambda \in \mathrm{U}$ si et seulement si elle est dérivable au point λ ; dans ce cas, on a $f'(\lambda) = df_\lambda(1)$. Il s'agit ici de la dérivabilité au sens complexe,

$$f'(\lambda) = \lim_{z \in \mathbb{C}, z \to 0} \frac{1}{z}\bigl(f(\lambda + z) - f(\lambda)\bigr)\,;$$

on dit qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans un espace de Banach F, dérivable (au sens complexe) en tout point de U, est une *fonction holomorphe* de U dans F.

Théorème 5.1.1. *Soient* E *un espace de Banach complexe non nul et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Le spectre de l'application* T *est une partie compacte non vide de* $\mathbb{C}$, *l'application résolvante* $\mathrm{R}(\mathrm{T}) : \lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue et holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *et, pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, *on a*

$$\mathrm{R}(\mathrm{T})'(\lambda) = (\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}))^2.$$

Démonstration. Désignons par $\mathrm{U} \subset \mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des applications linéaires continues et inversibles. L'application $f : \lambda \to \mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est continue donc l'image inverse de U est ouverte (proposition 1), donc Sp(T) est fermé dans $\mathbb{C}$; on a vu ci-dessus que Sp(T) est contenu dans le disque de rayon $\|\mathrm{T}\|$, donc le spectre est borné.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; posons $\mathrm{S} = \mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$; alors S est inversible, $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{S}^{-1}$ et on sait que pour z assez petit, $\mathrm{T} - (\lambda + z) \,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{S} - z \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est inversible et

$$\mathrm{R}_{\lambda+z}(\mathrm{T}) = \mathrm{S}^{-1} + z\mathrm{S}^{-2} + z^2\mathrm{S}^{-3} + z^3\mathrm{S}^{-4} + \cdots$$

En écrivant comme précédemment $\mathrm{R}_{\lambda+z}(\mathrm{T}) = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) + z(\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}))^2 + \mathrm{V}(z)$ on montre que $\|\mathrm{V}(z)\| = \mathrm{O}(|z|^2)$ lorsque $z \to 0$, ce qui entraîne que l'application résolvante est dérivable (complexe) au point λ, avec $(\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}))^2$ pour dérivée en ce point.

Il reste à montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \neq \emptyset$. Pour toute forme linéaire ℓ continue (pour la topologie de la norme) sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, l'application $\lambda \to \ell \circ \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est une fonction holomorphe scalaire dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. Si Sp(T) était vide, cette fonction serait entière ; or d'après la relation (R) on voit que $\ell \circ \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$. Par le théorème de Liouville on aurait $\ell \circ \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; ceci ayant lieu pour tout ℓ, on aurait $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = 0$ (par le théorème de Hahn-Banach - corollaire 2.2.1), ce qui est impossible pour un opérateur inversible d'un espace normé E *non réduit* à $\{0_\mathrm{E}\}$. Donc, si E n'est pas nul, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \neq \emptyset$.

∎

5.2. Rayon spectral

Pour $r > 0$ on note $\mathrm{D}_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r, et on note $\overline{\mathrm{D}}_r$ son adhérence.

Lemme 5.2.1. *Soient* F *un espace de Banach complexe,* $r > 0$ *et* $f : \overline{\mathrm{D}}_r \to \mathrm{F}$ *une application continue, holomorphe sur* D_r *; on suppose qu'il existe une suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* F *telle que pour* $|z|$ *assez petit, la série* $\sum z^k a_k$ *soit convergente et que l'on ait* $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k a_k$. *Alors, pour tout entier* $n \geq 0$, *on a*

$$\|a_n\| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \|f(re^{it})\| \, dt.$$

Démonstration. Soit $\ell \in \mathrm{F}^*$ une forme linéaire de norme ≤ 1 ; la fonction $g = \ell \circ f$ est continue sur $\overline{\mathrm{D}}_r$, holomorphe sur D_r et pour $|z|$ assez petit on a $\ell(f(z)) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \ell(a_k)$. Puisque g est une fonction holomorphe à valeurs complexes, la théorie usuelle nous dit que pour tout entier $n \geq 0$, on peut calculer le $n$ième coefficient de Taylor par la formule

$$\ell(a_n) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} \, \ell(f(re^{it})) \, dt,$$

donc

$$|\ell(a_n)| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |\ell(f(re^{it}))|\, dt \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \|f(re^{it})\|\, dt.$$

Or, d'après le théorème de Hahn-Banach, $\|a_n\| = \sup\{|\ell(a_n)| : \ell \in \mathrm{F}^*,\ \|\ell\| \leq 1\}$.

∎

Remarque 5.2.1. La conclusion du lemme montre qu'en fait la suite $(\|a_n\|\, r^n)$ est bornée, donc la série $\sum z^k a_k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, et il est facile de montrer que la somme de la série est égale à $f(z)$ pour tout z tel que $|z| < r$.

Lemme 5.2.2. *Soient* F *un espace de Banach complexe,* $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* F*,* $\rho > 0$ *et* $f : \mathrm{D}_{1/\rho} \to \mathrm{F}$ *une fonction holomorphe ; on suppose que pour* $|z|$ *assez petit, la série de terme général* $\sum z^k a_k$ *est convergente et que l'on a* $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k a_k$*. Alors* $\limsup_n \|a_n\|^{1/n} \leq \rho$*.*

Démonstration. Par le lemme 1, la suite $(r^n \|a_n\|)$ est bornée pour tout $r > 0$ tel que $r\rho < 1$, donc $r \limsup_n \|a_n\|^{1/n} \leq 1$, d'où le résultat.

∎

Remarque 5.2.2. Ce n'est pas vraiment le lieu ici de développer les théories de l'intégration et des fonctions holomorphes pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Disons cependant que la théorie de Cauchy se généralise sans peine aux fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach (complexe, bien sûr) : soient $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert, F un espace de Banach complexe et $f : \overline{\mathrm{D}} \to \mathrm{F}$ une application continue, holomorphe sur D ; alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{D}$ on a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}} (z - \lambda)^{-1} f(z)\, dz,$$

l'intégrale étant prise sur le bord ∂D de D. De plus, dans le lemme 1, on a en fait

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it})\, dt.$$

Cependant, on n'a pas expliqué le sens de ces intégrales...

Ces intégrales sont des intégrales de fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans un espace de Banach F. Il ne serait pas bien difficile de définir l'intégrale de Riemann dans ce cadre. Si f est continue de $[a, b]$ dans F, elle est uniformément continue puisque $[a, b]$ est compact, et on en déduit facilement que les sommes de Riemann (vectorielles) $\sum_{i=1}^m (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$ convergent dans F lorsque le pas de la subdivision $\pi = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b)$ de $[a, b]$ tend vers 0 (on commence par montrer que si (π_n) est une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, les sommes de Riemann correspondantes forment une suite de Cauchy, donc convergente puisque F est complet ; on montre ensuite que la limite ne dépend pas de la suite (π_n) choisie). Il est tout à fait raisonnable d'appeler $\int_a^b f(t)\, dt$ cette limite.

Théorème 5.2.1. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* T *une application linéaire continue de* E *dans* E *; la suite* $(\|\mathrm{T}^n\|^{1/n})$ *est convergente et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{T}^n\|^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}.$$

La convergence de la suite $(\|T^n\|^{1/n})$ résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme 5.2.3. *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tous entiers* $p, q \geq 1$ *on ait* $(u_{p+q})^{p+q} \leq u_p^p\, u_q^q$ *; alors*

(i) *pour tous entiers* $p, k \geq 1$, *on a* $u_{pk} \leq u_k$ *;*

(ii) *la suite* (u_n) *converge vers* $\inf_{n\geq 1} u_n$.

Démonstration. Montrons (i) par récurrence sur $p \geq 1$; c'est clair pour $p = 1$; si on connaît cette inégalité pour un certain $p \geq 1$, alors

$$(u_{(p+1)k})^{(p+1)k} \leq u_{kp}^{kp}\, u_k^k \leq u_k^{kp}\, u_k^k = u_k^{(p+1)k}.$$

Pour le second point, notons $m = \inf_{n\geq 1} u_n$; s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u_k = 0$, alors $m = 0$ et, pour tout $p \geq 1$, on a $u_{k+p} = 0$, donc (u_n) converge vers m. Supposons désormais que l'on ait $u_k \neq 0$ pour tout $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$; par définition de m, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u_k < m + \varepsilon$. Soit $n \geq 1$ et écrivons $n = kp + r$ avec $p, r \in \mathbb{N}$, $r < k$; alors, par (i), $u_n^n \leq u_{kp}^{kp}\, u_r^r \leq u_k^{kp}\, u_1^r$. Donc

$$u_n \leq u_k^{kp/n} u_1^{r/n} = u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{r/n} \leq u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{(k-1)/n}.$$

Comme la suite $n \to u_k(u_1/u_k)^{(k-1)/n}$ converge vers $u_k < m + \varepsilon$, on aura $u_n < m + \varepsilon$ pour n assez grand, mais aussi $m \leq u_n$, d'où la convergence vers m de la suite (u_n).

■

Démonstration du théorème 1. Pour $p, q \geq 1$, on a $\|T^{p+q}\| = \|T^p T^q\| \leq \|T^p\|\,\|T^q\|$, donc par le lemme 3, la suite $(\|T^n\|^{1/n})$ converge. Notons $R = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$ et posons $\rho = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/R$; alors la série $\sum_k z^k T^k$ est convergente (si on choisit t tel que $|z|\,R < t < 1$, on voit que $\|z^k T^k\| \leq t^k$ pour k assez grand, donc la série des normes $\sum_k \|z^k T^k\|$ est majorée pour k assez grand par la série géométrique convergente $\sum_k t^k$). Il en résulte (comme au lemme 1.1) que $\mathrm{Id}_E - zT$ est inversible, et que $1/z$ n'est pas dans $\mathrm{Sp}(T)$. Donc $\mathrm{Sp}(T)$ est inclus dans le disque du plan complexe de centre 0 et de rayon R, c'est à dire que $\rho \leq R$.

Si $1/|z| > \rho$, le nombre complexe $1/z$ ne peut pas être dans le spectre de T, ce qui veut dire que $\mathrm{Id}_E - zT$ est inversible ; la fonction $f : z \to (\mathrm{Id}_E - zT)^{-1}$ est donc définie et holomorphe sur le disque $D_{1/\rho}$. Comme par ailleurs, pour z assez petit on a $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k T^k$, il résulte du lemme 2 que $R = \limsup_n \|T^n\|^{1/n} \leq \rho$.

■

La quantité

$$\rho(T) = \lim_n \|T\|^{1/n} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$$

s'appelle le *rayon spectral de* T.

Proposition 5.2.1. *Soit* H *un espace hilbertien complexe ; le rayon spectral de tout élément normal de* $\mathcal{L}(H)$ *est égal à sa norme.*

Démonstration. Soit d'abord A un élément autoadjoint ; on a $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$ (proposition 4.4.2) ; on en déduit par récurrence que $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $\rho(A) = \|A\|$. Soit maintenant T un élément normal de $\mathcal{L}(H)$; par récurrence sur n, on a $(T^*T)^n = (T^*)^n T^n$ donc $\|(T^*T)^n\| = \|T^n\|^2$ et $\rho(T^*T) = \rho(T)^2$. Or $A = T^*T$ est autoadjoint, donc $\rho(T)^2 = \rho(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

■

On va maintenant s'intéresser au rapport entre le spectre d'un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et celui de son transposé ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}^*)$. Ce rapport sera très simple : ces deux spectres sont égaux.

Lemme 5.2.4. *Soient* E, F *deux espaces de Banach et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; l'application* ${}^t\mathrm{T}$ *est injective si et seulement si* $\mathrm{im}(\mathrm{T})$ *est dense dans* F.

De plus, si $\mathrm{im}({}^t\mathrm{T})$ *est dense dans* E^**, l'application* T *est injective.*

Démonstration. Si im(T) n'est pas dense, son adhérence G est un sous-espace fermé de F, distinct de F. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire y^* non nulle sur F, mais dont la restriction à G est nulle ; en particulier, $y^*(\mathrm{T}(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puisque G contient l'image de T. On a donc $({}^t\mathrm{T})(y^*)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, ce qui signifie que ${}^t\mathrm{T}(y^*) = 0$, donc ${}^t\mathrm{T}$ n'est pas injective.

Si ${}^t\mathrm{T}$ n'est pas injective, il existe $y^* \in \mathrm{F}^*$ non nulle telle que ${}^t\mathrm{T}(y^*) = 0$, ce qui signifie que $y^*(\mathrm{T}(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On voit que l'image de T est contenue dans le noyau de y^*, qui est un sous-espace fermé de F, distinct de F. Il en résulte que im(T) n'est pas dense dans F.

Si $\mathrm{T}(x) = 0$, on a ${}^t\mathrm{T}(y^*)(x) = y^*(\mathrm{T}(x)) = 0$ pour tout $y^* \in \mathrm{F}^*$, ce qui montre que $x^*(x) = 0$ pour tout $x^* = {}^t\mathrm{T}(y^*) \in \mathrm{im}({}^t\mathrm{T})$; si $\mathrm{im}({}^t\mathrm{T})$ est dense dans E^*, on en déduit par continuité que $x^*(x) = 0$ pour tout $x^* \in \mathrm{E}^*$, donc $x = 0$ par Hahn-Banach, donc T est injective.

Proposition 5.2.2. *Soient* E, F *deux espaces de Banach et soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; l'opérateur transposé* ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}^*, \mathrm{E}^*)$ *est inversible si et seulement* T *est inversible.*

Démonstration. Si T est inversible, comme $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{T}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$, on trouve ${}^t\mathrm{T}\, {}^t(\mathrm{T}^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*}$ et ${}^t(\mathrm{T}^{-1})\, {}^t\mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}^*}$. Donc ${}^t\mathrm{T}$ est inversible et $({}^t\mathrm{T})^{-1} = {}^t(\mathrm{T}^{-1})$.

L'implication inverse est évidente si E est réflexif, parce que T est alors "en gros" la transposée de ${}^t\mathrm{T}$ dans ce cas. Sinon il faut travailler un peu : supposons donc inversement que ${}^t\mathrm{T}$ soit inversible. On va montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$ on ait $\|\mathrm{T}(x)\| \ge c\,\|x\|$. Soit $x \in \mathrm{E}$; il existe $x^* \in \mathrm{E}^*$ tel que $\|x^*\| \le 1$ et $x^*(x) = \|x\|$ (Hahn-Banach) ; puisque ${}^t\mathrm{T}$ est inversible, il existe $y^* \in \mathrm{F}^*$ tel que $x^* = {}^t\mathrm{T}(y^*)$ et $\|y^*\| \le \|({}^t\mathrm{T})^{-1}\| = k$. Alors $k\,\|\mathrm{T}(x)\| \ge y^*(\mathrm{T}(x)) = x^*(x) = \|x\|$, d'où le résultat voulu, avec $c = k^{-1}$. Il en résulte que T est un isomorphisme de E sur im(T), qui est donc complet, donc fermé dans F. Par ailleurs, im(T) est dense puisque ${}^t\mathrm{T}$ est injective, donc $\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{F}$ et T est un isomorphisme de E sur F.

∎

Remarque 5.2.3. Pour trouver $c > 0$ ci-dessus, on aurait pu dire que lorsque ${}^t\mathrm{T}$ est inversible, alors ${}^t({}^t\mathrm{T})$ est inversible de E^{**} dans F^{**} ; en utilisant ensuite la relation ${}^t({}^t\mathrm{T})(\mathrm{I}_\mathrm{E}(x)) = \mathrm{I}_\mathrm{F}(\mathrm{T}(x))$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et puisque I_F est isométrique de F dans F^{**} on en déduit que $\|\mathrm{T}(x)\| \ge c\,\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, avec $c^{-1} = \|({}^t({}^t\mathrm{T}))^{-1}\|$.

La formule un peu effrayante ${}^t({}^t\mathrm{T})(\mathrm{I}_\mathrm{E}(x)) = \mathrm{I}_\mathrm{F}(\mathrm{T}(x))$ ne contient pas grand chose de difficile ; on a ${}^t({}^t\mathrm{T})(\mathrm{I}_\mathrm{E}(x)) \in \mathrm{E}^{**}$, et en déroulant les définitions on voit que son action sur un élément $x^* \in \mathrm{E}^*$ est donnée par

$$ {}^t({}^t\mathrm{T})(\mathrm{I}_\mathrm{E}(x))(x^*) = (\mathrm{I}_\mathrm{E}(x) \circ {}^t\mathrm{T})(x^*) = ({}^t\mathrm{T})(x^*)(x) = x^*(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{I}_\mathrm{F}(\mathrm{T}(x))(x^*). $$

On en déduit immédiatement :

Corollaire 5.2.1. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; on a*

$$ \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}). $$

Démonstration. Il suffit de remarquer que ${}^t(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}) = {}^t\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_{E^*}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

■

Dans le cas hilbertien, on préfère souvent exprimer le résultat précédent en utilisant l'adjoint $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ plutôt que la transposée ${}^t\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^*)$. Le seul petit piège à éviter est que $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})^* = \mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id_H}$ (il y a une barre de conjugaison !).

Corollaire 5.2.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; on a*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*) = \overline{\mathrm{Sp}(\mathrm{T})} = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}.$$

■

Exemples 5.2.1.

a. Soit K un espace compact métrique ; considérons l'espace de Banach $\mathrm{E} = \mathrm{C(K)}$ des fonctions continues sur K à valeurs complexes, muni de la norme de convergence uniforme (exemples 1.1.1). Soit $f \in \mathrm{E}$; l'application $\mathrm{M}_f : g \to fg$ est linéaire de E dans E et continue puisque pour tout $g \in \mathrm{E}$, on a $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. De plus la relation $\|\mathrm{M}_f(f)\|_\infty = \|f\|_\infty^2$ implique $\|\mathrm{M}_f\| \ge \|f\|_\infty$, donc $\|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$;

– si pour tout $s \in \mathrm{K}$, on a $f(s) \neq \lambda$, alors la fonction $h : s \to (f(s) - \lambda)^{-1}$ est continue de K dans $\mathbb{C}$. On voit alors que $\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ est inversible et que son inverse $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M}_f)$ est l'application $\mathrm{M}_h : g \to hg$;

– s'il existe $s \in \mathrm{K}$ tel que $f(s) = \lambda$, alors pour tout $g \in \mathrm{E}$, la fonction $fg - \lambda g$ s'annule au point s, donc $\mathrm{im}(\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id_E}) \subset \{g \in \mathrm{E} : g(s) = 0\}$, qui est un sous-espace fermé de E, distinct de E. On en déduit que l'image de $\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ n'est pas dense, donc $\mathrm{M}_f - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ n'est pas inversible puisqu'il n'est pas surjectif. En résumé, le spectre de M_f est l'ensemble $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_f) = f(\mathrm{K}) = \{f(s) : s \in \mathrm{K}\}$ des valeurs de f.

b. Soit p un nombre réel tel que $1 \le p < +\infty$, et soit $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\ell_p)$ l'application qui à une suite $(x_n)_{n\ge0}$ associe la suite $(y_n)_{n\ge0}$ définie par $y_0 = 0$ et $y_n = x_{n-1}$ pour $n \ge 1$ (on décale d'un cran vers la droite, en introduisant un 0 à la place 0 ; en bon français, cet opérateur s'appelle *opérateur de décalage (à droite)*, ou *opérateur de shift* en langage mathématique usuel) ; l'application S est clairement isométrique. Comme $\|\mathrm{S}\| = 1$, on a $\mathrm{Sp(S)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$.

Soient $\xi = (x_n)_{n\ge0} \in \ell_p$ et $\zeta = (z_n)_{n\ge0} \in \ell_q$, où q est l'exposant conjugué de p ; on a en considérant ζ comme une forme linéaire sur ℓ_p

$$\zeta(\mathrm{S}(\xi)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}\, z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n = ({}^t\mathrm{S}(\zeta))(\xi),$$

où on a posé $y_n = z_{n+1}$ pour tout $n \ge 0$. Il en résulte que ${}^t\mathrm{S}((z_n)_{n\ge0}) = (z_{n+1})_{n\ge0}$ (c'est l'opérateur de *décalage à gauche* sur ℓ_q, qui est donc le transposé du décalage à droite sur ℓ_p). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; si $|\lambda| < 1$, posons $\zeta = (\lambda^n)_{n\ge0}$; c'est un élément de ℓ_q et ${}^t\mathrm{S}(\zeta) = \lambda\zeta$. Le spectre de ${}^t\mathrm{S}$ contient donc le disque unité ouvert, et il est contenu dans le disque unité fermé puisque $\|{}^t\mathrm{S}\| = \|\mathrm{S}\| = 1$. Il en résulte que

$$\mathrm{Sp(S)} = \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}.$$

c. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$; pour $f \in \mathrm{H}$ et $s \in [0,1]$, on pose $\mathrm{V}(f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$. Puisque $\mathrm{L}_2([0,1]) \subset \mathrm{L}_1([0,1])$, la fonction f est intégrable et on en déduit que $\mathrm{V}(f)$ est continue (appliquer par exemple le théorème de Lebesgue à une suite de la forme $(1_{[0,s_n]}\, f)$ pour une suite (s_n) tendant vers s) ; en appliquant Cauchy-Schwarz au produit $1_{[0,s]}\, f$ on voit que $|\mathrm{V}(f)(s)| \le \sqrt{s}\, \|f\|_2$, ce qui implique que

$$\|\mathrm{V}(f)\|_2^2 \le \|f\|_2^2 \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}\, \|f\|_2^2,$$

donc V définit une application linéaire continue (encore notée V) de $\mathrm{L}_2([0,1])$ dans lui-même.

Soit $f \in \mathrm{H}$ telle que $\|f\|_2 \le 1$; on a montré que $|\mathrm{V}(f)(s)| \le \sqrt{s}\, \|f\|_2 \le 1$ pour tout réel $s \in [0,1]$; on en déduit que $|\mathrm{V}(\mathrm{V}(f))(s)| = |\int_0^s \mathrm{V}(f)(t)\,dt| \le s$, puis, par récurrence sur n, que $|\mathrm{V}^{n+1}(f)(s)| \le s^n/n!$ donc

$$\|\mathrm{V}^{n+1}(f)\|_2^2 \le \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 s^{2n}\,ds \le \frac{1}{(n!)^2},$$

ce qui donne $\|\mathrm{V}^{n+1}\| \le (n!)^{-1}$. Comme $\lim_n (n!)^{-1/n} = 0$, il s'ensuit que le rayon spectral de V est nul, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{V}) = \{0\}$.

5.3. Décomposition du spectre

Proposition 5.3.1. *Soient* E, F *deux espaces de Banach et soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'application* T *est injective d'image fermée ;*

(*ii*) *il existe un nombre* $k \ge 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *on ait* $k\,\|\mathrm{T}(x)\| \ge \|x\|$ *;*

(*iii*) *il n'existe pas de suite* (x_n) *dans* E *telle que* $\|x_n\| = 1$ *et* $\lim_n \|\mathrm{T}(x_n)\| = 0$.

Démonstration. Si (*i*) est satisfaite, T détermine une application continue bijective T_1 de E sur l'espace de Banach im(T). Par le théorème des isomorphismes (théorème 2.1.2), T_1 est un isomorphisme : on obtient (*ii*) avec $k = \|\mathrm{T}_1^{-1}\|$. Il est évident que (*ii*) implique (*iii*) ; montrons que (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) : si (*ii*) n'est pas satisfaite, il existe pour tout entier $n \ge 1$ un vecteur $y_n \in \mathrm{E}$ tel que $\|y_n\| > n\,\|\mathrm{T}(y_n)\|$; si on pose $x_n = \|y_n\|^{-1} y_n$, on a $\|x_n\| = 1$ et $\|\mathrm{T}(x_n)\| < 1/n$, donc (*iii*) n'est pas satisfaite.

Si (*ii*) est satisfaite, il est clair que T est injective ; si (y_n) est une suite dans im(T) qui converge vers $y \in \mathrm{F}$, écrivons $y_n = \mathrm{T}(x_n)$ avec $x_n \in \mathrm{E}$; on a $\|x_n - x_m\| \le k\,\|y_n - y_m\|$, donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers $x \in \mathrm{E}$ puisque E est complet ; alors la suite $y_n = \mathrm{T}(x_n)$ converge vers $\mathrm{T}(x)$, donc $y = \mathrm{T}(x)$ est dans im(T), qui est donc fermée dans l'espace F.

∎

Soient E un espace de Banach complexe, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$; nous distinguerons trois cas :

1. Le scalaire λ est une valeur propre de T, autrement dit $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif.

2. Le scalaire λ est une valeur propre de ${}^t\mathrm{T}$, mais n'est pas une valeur propre de T ; autrement dit $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif et il existe une forme linéaire non nulle $x^* \in \mathrm{E}^*$ telle que $({}^t\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*})(x^*) = 0$, c'est à dire que ${}^t(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ n'est pas injectif ; d'après le lemme 2.4, cela se produit si et seulement si $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif mais n'a pas une image dense dans E.

3. Le scalaire λ n'est une valeur propre ni de T, ni de ${}^t\mathrm{T}$, mais λ est quand même dans le spectre de T. Alors, $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ est injectif, son image est dense mais n'est pas fermée.

Définition 5.3.1. Soient E un espace de Banach complexe et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; on appelle *spectre ponctuel* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ ne soit pas injectif (c'est l'ensemble des valeurs propres de T). On appelle *spectre résiduel* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense. On appelle *spectre continu* de T l'ensemble $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

On voit que l'on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ si et seulement si : $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ **et** $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ est injectif à image dense ; en effet, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ n'est alors pas fermée : si elle était fermée, elle serait égale à E, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ serait un isomorphisme et λ ne serait pas dans le spectre de T.

Proposition 5.3.2. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; on a*

$$\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}_p({}^t\mathrm{T}) \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T}).$$

Si E *est réflexif, on a l'égalité* $\mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

Démonstration. On a vu que λ est dans le spectre résiduel de T si et seulement si λ est une valeur propre de ${}^t\mathrm{T}$, mais n'est pas une valeur propre de T, d'où la première assertion. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T})$, on sait que ${}^t\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_{E^*}}$ est injectif à image dense, donc $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_E}$ est injectif à image dense par le lemme 2.4, et puisque $\mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{T}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, par conséquent $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

Dans le cas où E est réflexif, T "s'identifie" à la transposée de ${}^t\mathrm{T}$, et il en résulte que $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Sp}_c({}^t\mathrm{T})$. Plus précisément, on vérifie que $\mathrm{T} = \mathrm{I_E^{-1}} \circ {}^t({}^t\mathrm{T}) \circ \mathrm{I_E}$, où $\mathrm{I_E}$ désigne l'isomorphisme de E sur E^{**} (on devra remarquer que si U est un isomorphisme de E sur F et si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$, toutes les notions de spectre introduites sont les mêmes pour les deux opérateurs T et $\mathrm{U^{-1}TU} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$).

∎

Dans le cas hilbertien, on a :

Proposition 5.3.3. *Soient* H *un espace hilbertien complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur borné ; on a* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})\}$ *et* $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) : \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}^*)\}$.

Démonstration. La première assertion est un rappel. Par la proposition 4.4.3, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H}$ est dense si et seulement si $\mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id_H}$ est injectif. La deuxième assertion en résulte.

∎

Proposition 5.3.4. *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Démonstration. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal ; pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$, on a $\|\mathrm{T}^*(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}^*(x), \mathrm{T}^*(x)\rangle = \langle x, \mathrm{T}(\mathrm{T}^*(x))\rangle = \langle x, \mathrm{T}^*(\mathrm{T}(x))\rangle = \langle \mathrm{T}(x), \mathrm{T}(x)\rangle = \|\mathrm{T}(x)\|^2$, donc $\ker(\mathrm{T}^*) = \ker(\mathrm{T})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H}$ est encore normal, donc $\ker(\mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id_H}) = \ker(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id_H})$. Il en résulte que $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}^*)$ si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$, d'où le résultat.

∎

Exemples 5.3.1.

a. Soient K un espace compact métrique, $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathrm{K})$ et soit $f \in \mathrm{E}$; on a vu dans l'exemple 2.1 que l'application $\mathrm{T} = \mathrm{M}_f$ de multiplication par f vérifie $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{K})$; on a vu aussi que s'il existe $s \in \mathrm{K}$ tel que $f(s) = \lambda$, l'image de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ n'est pas dense, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T}) \cup \mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$. Remarquons que λ est une valeur propre de T si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{E}$ non nulle telle que $\mathrm{T}(g) = \lambda g$, c'est à dire $(f - \lambda)g = 0$. L'ensemble des $s \in \mathrm{K}$ tels que $g(s) \neq 0$ est alors un ouvert non vide U de K et f est égale à λ sur U. Supposons inversement qu'il existe un ouvert non vide U de K tel que f soit égale à λ sur U ; notons $g \in \mathrm{E}$ la fonction qui à $s \in \mathrm{K}$ associe sa distance au complémentaire de U. On a $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(g) = 0$.

En résumé, le spectre de T est l'ensemble $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{f(s) : s \in \mathrm{K}\}$, le spectre ponctuel de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'intérieur de $f^{-1}(\{\lambda\})$ soit non vide, le spectre résiduel de T est $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \setminus \mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$ et le spectre continu de T est vide.

b. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\ell_2)$ l'application de décalage à droite. On a vu que $\mathrm{Sp}(\mathrm{S})$ est le disque unité fermé $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Soient $\xi = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{S}(\xi) = \lambda\xi$; on trouve alors $\lambda x_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $\lambda x_n = x_{n-1}$; si $\lambda \neq 0$, on trouve alors par récurrence sur n que $x_n = 0$ pour tout $n \geq 0$; si $\lambda = 0$, on trouve, pour tout $n \geq 1$, $x_{n-1} = 0$. Dans les deux cas, $\xi = 0$. Donc $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{S}) = \emptyset$.

On a vu que tout λ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de ${}^t\mathrm{S}$. Supposons que $|\lambda| = 1$ et soit $\eta = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_2$ tel que ${}^t\mathrm{S}(\eta) = \lambda\eta$; alors, pour tout $n \geq 0$, on a $x_{n+1} = \lambda x_n$; il s'ensuit alors que $x_n = \lambda^n x_0$; comme la suite $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ n'est pas dans ℓ_2 (vu que $|\lambda| = 1$), on a nécessairement $x_0 = 0$, et enfin, $\eta = 0$; donc $\mathrm{Sp}_p({}^t\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Il résulte alors de la proposition 3 que $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$; on a alors pour terminer $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

c. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$ et reprenons l'opérateur V de l'exemple 2.1, défini par $\mathrm{V}(f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ pour $f \in \mathrm{H}$ et $s \in [0,1]$. On a montré que le rayon spectral de V est nul, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{V}) = \{0\}$. Remarquons que l'application qui à une fonction continue associe sa classe dans $\mathrm{L}_2([0,1])$ est injective ; donc si $\mathrm{V}(f) = 0$, alors $\mathrm{V}(f)(s) = 0$ pour tout $s \in [0,1]$, ce qui signifie que f est orthogonale à toutes les fonctions $1_{[0,s]}$, donc à toutes les fonctions en escalier. Comme celles-ci forment un sous-espace dense dans $\mathrm{L}_2([0,1])$ il s'ensuit que V est injective. Il est clair que l'image de V contient l'ensemble des fonctions de classe C^1 nulles en 0. Or celles-ci forment un sous-espace dense de $\mathrm{L}_2([0,1])$. On a montré que $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{V}) = \mathrm{Sp}_r(\mathrm{V}) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{V}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{V}) = \{0\}$.

5.4. Calcul fonctionnel

Proposition 5.4.1. *Soient* E *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; notons* $\mathrm{A}_\mathrm{T} \subset \mathbb{C}(\mathrm{X})$ *l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$*. Il existe une unique application linéaire* $\Phi : \mathrm{A}_\mathrm{T} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *qui soit un homomorphisme d'anneaux tel que* $\Phi(1) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ *et* $\Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{T}$.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Pour tout polynôme $\mathrm{P} = \sum a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) = \sum a_k \mathrm{T}^k \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il est clair que Φ est linéaire et que, pour $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ on a $\Phi(\mathrm{PQ}) = \Phi(\mathrm{P})\Phi(\mathrm{Q})$.

Soit Q un polynôme non nul ; supposons que les racines de Q ne sont pas dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. Ecrivons $\mathrm{Q} = a_n(\mathrm{X} - r_1)\dots(\mathrm{X} - r_n)$, où les r_k sont les racines de Q comptées avec leur multiplicité. Alors $\Phi(\mathrm{Q}) = a_n(\mathrm{T} - r_1\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\dots(\mathrm{T} - r_n\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$; comme les r_k ne sont pas dans le spectre de T, tous les $\mathrm{T} - r_k\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ sont inversibles, donc $\Phi(\mathrm{Q})$ est inversible.

Soit $f \in A_T$; il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec $f = P/Q$ et tels que Q n'ait pas de racines dans $Sp(T)$; si P_1, Q_1 sont d'autres polynômes tels que $f = P_1/Q_1$ et tels que Q_1 n'ait pas de racines dans $Sp(T)$, alors $PQ_1 = QP_1$, donc $\Phi(P)\Phi(Q_1) = \Phi(Q)\Phi(P_1)$; multipliant à gauche par $\Phi(Q)^{-1}$ et à droite par $\Phi(Q_1)^{-1}$, on trouve $\Phi(Q)^{-1}\Phi(P) = \Phi(P_1)\Phi(Q_1)^{-1}$. On en déduit que $\Phi(Q)^{-1}\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$ (en prenant $P_1 = P$ et $Q_1 = Q$), puis que $\Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$ ne dépend pas du couple $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec $f = P/Q$ et tels que Q n'a pas de racines dans $Sp(T)$. On pose $\Phi(f) = \Phi(P)\Phi(Q)^{-1}$.

Soient $f, g \in A_T$; choisissons des polynômes P, Q et R tels que $f = P/R$, $g = Q/R$ et tels que R n'ait pas de racines dans $Sp(T)$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $\Phi(\lambda f + \mu g) = \Phi(\lambda P + \mu Q)\Phi(R)^{-1} = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$ et $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(P)\Phi(R)^{-1}\Phi(Q)\Phi(R)^{-1} = \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(R)^{-2} = \Phi(fg)$.

Si $\Psi : A_T \to \mathcal{L}(E)$ est une application vérifiant les mêmes conditions, on montre par récurrence sur $n \geq 0$ que $\Psi(X^n) = T^n$; par linéarité, Ψ et Φ coïncident sur $\mathbb{C}[X]$. Soit $f = P/Q \in A_T$ (où Q est un polynôme sans pôles dans $Sp(T)$) ; alors $fQ = P$; donc $\Psi(f)\Psi(Q) = \Psi(P)$, donc $\Psi(f)\Phi(Q) = \Phi(P) = \Phi(f)\Phi(Q)$; comme $\Phi(Q)$ est inversible, il vient $\Psi(f) = \Phi(f)$.

■

Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ et f une fraction rationnelle sans pôles dans $Sp(T)$; l'élément $\Phi(f)$ défini dans la proposition 1 se note $f(T)$.

Lemme 5.4.1. *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $S, T \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $ST = TS$ *; on a* $f(S)g(T) = g(T)f(S)$ *pour toutes fractions rationnelles* $f \in A_S$, $g \in A_T$.

Démonstration. Supposons que $S, T \in \mathcal{L}(E)$ *commutent*, c'est à dire que $ST = TS$. Il en résulte que $T^kS = ST^k$ pour tout entier $k \geq 0$, ce qui entraîne que $P(T)S = SP(T)$ pour tout polynôme P. Si Q n'a pas de racine dans $Sp(T)$, on aura aussi $Q(T)^{-1}S = SQ(T)^{-1}$. Il en résulte que pour toute $g \in A_T$, on a $S\,g(T) = g(T)\,S$. En répétant le raisonnement avec S, on en déduit que $f(S)g(T) = g(T)f(S)$ pour toutes fractions rationnelles $f \in A_S$ et $g \in A_T$.

Proposition 5.4.2. *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $T \in \mathcal{L}(E)$ *et* $f \in \mathbb{C}(X)$ *une fraction rationnelle sans pôles dans* $Sp(T)$ *; alors on a* $Sp(f(T)) = f(Sp(T))$ *et, pour toute fraction rationnelle* $g \in \mathbb{C}(X)$ *sans pôles dans* $f(Sp(T))$*, on a* $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; si $f - \lambda$ ne s'annule pas sur le spectre de T, la fraction rationnelle $h = (f - \lambda)^{-1}$ n'a pas de pôles dans $Sp(T)$; or $(f - \lambda)h = 1$, ce qui entraîne $(f - \lambda)(T)h(T) = Id_E$; de même, $h(T)(f - \lambda)(T) = Id_E$. Donc $f(T) - \lambda\,Id_E = (f - \lambda)(T)$ est inversible. On a montré que $Sp(f(T)) \subset f(Sp(T))$. Inversement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne soit pas un pôle de f ; alors, il existe une fraction rationnelle h sans pôles dans $Sp(T)$ telle que $f - f(\lambda) = (X - \lambda)h$. Alors

$$f(T) - f(\lambda)\,Id_E = (T - \lambda\,Id_E)h(T) = h(T)(T - \lambda\,Id_E)\,;$$

si $f(T) - f(\lambda)\,Id_E$ est inversible d'inverse S, alors $(T - \lambda\,Id_E)h(T)S = Id_E$, et aussi $Id_E = Sh(T)(T - \lambda\,Id_E)$; alors $T - \lambda\,Id_E$ est inversible à gauche et à droite donc il est inversible, *i.e.* $\lambda \notin Sp(T)$. Donc si $\lambda \in Sp(T)$, alors $f(\lambda) \in Sp(f(T))$; on a ainsi montré l'inclusion inverse $f(Sp(T)) \subset Sp(f(T))$.

Notons $A \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans $Sp(f(T))$. Les applications $A \to \mathcal{L}(E)$ définies par $g \to (g \circ f)(T)$ et $g \to g(f(T))$ vérifient les conditions de la proposition 1 (relativement à $f(T)$), donc elles coïncident.

■

Revenons au cas hilbertien. Si $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} c_j \mathrm{X}^j$ est un polynôme à coefficients complexes, on peut considérer le polynôme dont les coefficients sont les complexes conjugués des coefficients de P. On notera $\widetilde{\mathrm{P}} = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j \, \mathrm{X}^j$ ce polynôme ; notons que la fonction $z \to \widetilde{\mathrm{P}}(z)$ **n'est pas** la fonction complexe conjuguée de $z \to \mathrm{P}(z)$: on a en fait $\widetilde{\mathrm{P}}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{P}(z)}$. Si $f = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ est une fraction rationnelle, on obtient en appliquant l'opération à P et à Q une fraction rationnelle $\widetilde{f}$ qui aura elle aussi la propriété $\widetilde{f}(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un pôle de f.

Proposition 5.4.3. *Soient* H *un espace hilbertien complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *et* $f \in \mathbb{C}(\mathrm{X})$ *; on a* $f(\mathrm{T})^* = \widetilde{f}(\mathrm{T}^*)$.

Démonstration. Notons toujours $\mathrm{A_T} \subset \mathbb{C}(\mathrm{X})$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans Sp(T). L'application $\mathrm{A_T} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ définie par $f \to \widetilde{f}(\mathrm{T}^*)^*$ vérifie les conditions de la proposition 1, donc elle coïncide avec $f \to f(\mathrm{T})$.

∎

Proposition 5.4.4. *Soient* H *un espace hilbertien complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal et* $f \in \mathbb{C}(\mathrm{X})$*, sans pôle dans* Sp(T) *; alors* $f(\mathrm{T})$ *est normal.*

Démonstration. D'après le lemme 1, on sait que $f(\mathrm{T})$ et $\widetilde{f}(\mathrm{T}^*)$ commutent, puisque T et T^* commutent.

∎

Théorème 5.4.1. *Soit* H *un espace hilbertien complexe ;*

(*i*) *le spectre de tout opérateur unitaire de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est inclus dans le cercle unité* $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *du plan complexe ;*

(*ii*) *le spectre de tout élément autoadjoint de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est inclus dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un élément unitaire et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{U})$; comme $\|\mathrm{U}\| \le 1$, le rayon spectral de U est inférieur ou égal à 1, donc $|\lambda| \le 1$; de plus, comme U est bijectif, $\lambda \neq 0$ et par la proposition 2, $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{U}^{-1})$; or $\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}^*$, donc $\|\mathrm{U}^{-1}\| \le 1$; il en résulte que $|\lambda^{-1}| \le 1$.

Soit T un élément autoadjoint ; pour t réel tel que $t > \|\mathrm{T}\|$, les opérateurs $\mathrm{T}+it\,\mathrm{Id_H}$ et $\mathrm{T}-it\,\mathrm{Id_H}$ sont inversibles. Notons f la fraction rationnelle $(\mathrm{X}+ti)/(\mathrm{X}-ti)$. Remarquons que $\tilde{f} = f^{-1}$; par la proposition 3, $f(\mathrm{T})^* = \tilde{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^{-1}$ donc $f(\mathrm{T})$ est unitaire ; alors par le premier point et par la proposition 2, Sp(T) est inclus dans

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{it\} : |(\lambda + it)(\lambda - it)^{-1}| = 1\} = \mathbb{R}.$$

∎

Si K est un espace compact et si $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, on note $\overline{f}$ l'application $s \to \overline{f(s)}$. Si K est une partie compacte de $\mathbb{C}$, on notera $z_\mathrm{K} \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ l'application $\lambda \in \mathrm{K} \to \lambda$. Si f est une fonction rationnelle sans pôles dans K, on notera $f(z_\mathrm{K})$ l'application $\lambda \in \mathrm{K} \to f(\lambda)$.

Théorème 5.4.2. *Soient* H *un espace hilbertien complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *autoadjoint ou unitaire ; il existe une et une seule application linéaire continue* $\Phi : \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *telle que* $\Phi(1) = \mathrm{Id_H}$, $\Phi(z_{\mathrm{Sp(T)}}) = \mathrm{T}$ *et telle que, pour toutes fonctions* $f, g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, *on ait* $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. *Pour toute fraction rationnelle* f *sans pôle dans* Sp(T), *on a* $\Phi(f(z_{\mathrm{Sp(T)}})) = f(\mathrm{T})$. *De plus,* Φ *est isométrique et, pour tout* $f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ *on a* $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$.

Démonstration. Notons $A_T \subset \mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans le compact $K = \mathrm{Sp}(T)$. Notons $\phi : A_T \to C(K)$ l'application $f \to f(z_K)$, et $\Psi : A_T \to \mathcal{L}(H)$ l'application $f \to f(T)$. Pour toute fraction rationnelle $f \in A_T$, l'opérateur $f(T)$ est normal (par la proposition 4), donc sa norme est égale à son rayon spectral (par la proposition 2.1) ; donc

$$\|f(T)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(f(T))\} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\},$$

puisque, par la proposition 2, $\mathrm{Sp}(f(T)) = f(\mathrm{Sp}(T))$. En d'autres termes, on a l'égalité $\|\Psi(f)\| = \|\phi(f)\|$. Comme T est autoadjoint ou unitaire, $\overline{z}_K \in \phi(A)$ (par le théorème 1, si T est autoadjoint on a $\overline{z}_K = z_K = \phi(X)$, et si T est unitaire $\overline{z}_K = z_K^{-1} = \phi(X^{-1})$). Pour tout $f \in A_T$, on a $\overline{f(z_K)} = \widetilde{f}(\overline{z}_K) \in \phi(A_T)$. Alors $\phi(A_T)$ est un sous-espace et un sous-anneau de $C(K)$, contenant les constantes (car $\phi(1) = 1$), stable par la conjugaison et sépare les points de K (puisque $z_K \in \phi(A_T)$) ; par le théorème de Stone-Weierstrass, $\phi(A_T)$ est dense dans $C(K)$. Par le lemme 1.4.1, il existe une (unique) application linéaire continue $\Phi : C(K) \to \mathcal{L}(H)$ telle que $\Psi = \Phi \circ \phi$.

On a $\Phi(1) = \Phi(\phi(1)) = \Psi(1) = \mathrm{Id}_H$, et $\Phi(z_K) = \Phi(\phi(X)) = \Psi(X) = T$; les applications qui à $(f, g) \in C(K) \times C(K)$ associent respectivement $\Phi(fg)$ et $\Phi(f)\Phi(g)$ sont continues et coïncident sur $\phi(A_T) \times \phi(A_T)$, donc elles coïncident ; en d'autres termes, pour tous $f, g \in C(K)$, on a $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. De plus, l'ensemble des $f \in C(K)$ tels que $\|\Phi(f)\| = \|f\|$ est fermé et contient $\phi(A_T)$, donc Φ est isométrique. Enfin, pour $f \in A_T$, on a $f(T)^* = \widetilde{f}(T^*) = \Phi(\widetilde{f}(\overline{z}_K)) = \Phi(\overline{f(z_K)})$. L'ensemble des $f \in C(K)$ telles que $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ est fermé et contient $\phi(A_T)$, donc on a $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ pour toute fonction $f \in C(K)$.

Il reste à montrer l'unicité de Φ. Soit $\Phi_1 : C(K) \to \mathcal{L}(H)$ une autre application vérifiant $\Phi_1(1) = \mathrm{Id}_H$, $\Phi_1(z_K) = T$ et telle que pour toutes fonctions $f, g \in C(K)$, on ait $\Phi_1(fg) = \Phi_1(f)\Phi_1(g)$; par la proposition 1, $\Phi \circ \phi$ et $\Phi_1 \circ \phi$ coïncident ; par densité de $\phi(A_T)$ dans $C(K)$, on trouve $\Phi = \Phi_1$.

∎

Soient H un espace hilbertien complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}(T)$; l'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème 2 se note encore $f(T)$ (il s'agit bien d'une extension de la définition précédente, qui était limitée au cas où f est une fonction rationnelle, mais était applicable à T quelconque).

Corollaire 5.4.1. *Soient* H *un espace hilbertien complexe,* $T \in \mathcal{L}(H)$ *autoadjoint ou unitaire et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Sp}(T)$ *; l'opérateur* $f(T)$ *commute avec tout opérateur* $S \in \mathcal{L}(H)$ *qui commute avec* T.

Démonstration. La propriété énoncée est vraie quand f est une fonction rationnelle d'après le lemme 1, et dans les deux cas considérés l'image de A_T est dense dans $C(\mathrm{Sp}(T))$, donc le résultat découle d'un prolongement par continuité.

Théorème 5.4.3. *Soient* H *un espace hilbertien complexe,* $T \in \mathcal{L}(H)$ *autoadjoint ou unitaire et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Sp}(T)$ *; alors :*

(i) l'opérateur $f(T)$ *est normal. On a* $\mathrm{Sp}(f(T)) = f(\mathrm{Sp}(T))$ *;*

(ii) si $f(\mathrm{Sp}(T)) \subset \mathbb{R}$, *on a* $f(T) = f(T)^*$ *; si* $f(\mathrm{Sp}(T)) \subset U(1)$, *alors* $f(T)$ *est unitaire. Dans ces deux cas, pour toute fonction* $g \in C(\mathrm{Sp}(f(T)))$ *on a* $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

Démonstration. On a $f(T)^* = \overline{f}(T)$, donc $f(T)f(T)^* = (f\overline{f})(T) = f(T)^*f(T)$, donc $f(T)$ est normal. Si $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}(T))$, notons $h \in C(\mathrm{Sp}(T))$ la fonction $s \to (f(s) - \lambda)^{-1}$.

On a $h(f-\lambda) = (f-\lambda)h = 1$, donc

$$h(\mathrm{T})(f(\mathrm{T}) - \lambda\,\mathrm{Id_H}) = (f(\mathrm{T}) - \lambda\,\mathrm{Id_H})h(\mathrm{T}) = \mathrm{Id_H},$$

donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f(\mathrm{T}))$. Inversement supposons que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f(\mathrm{T}))$, c'est à dire que l'opérateur $\mathrm{S} = f(\mathrm{T}) - \lambda\,\mathrm{Id_H}$ soit inversible. Pour tout opérateur V sur H, on aura alors

$$\|\mathrm{V}\| = \|\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{SV})\| \leq \|\mathrm{S}^{-1}\|\,\|\mathrm{SV}\|.$$

Ceci est vrai en particulier si $\mathrm{V} = g(\mathrm{T})$, pour toute fonction g continue sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. L'application $g \to g(\mathrm{T})$ étant isométrique de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, on obtiendra en posant $k = \|\mathrm{S}^{-1}\|$ et $f_1 = f - \lambda$

$$(*) \qquad \|g\|_\infty = \|g(\mathrm{T})\| \leq k\,\|(f(\mathrm{T}) - \lambda\,\mathrm{Id_H})g(\mathrm{T})\| = k\,\|(f_1\,g)(\mathrm{T})\| = k\,\|f_1\,g\|_\infty.$$

Mais la propriété $\|g\|_\infty \leq k\,\|f_1\,g\|_\infty$ pour toute fonction g implique que $f_1 = f - \lambda$ ne s'annule pas sur K, donc $\lambda \notin f(\mathrm{K})$ (s'il existait $s_0 \in \mathrm{K}$ tel que $f(s_0) = \lambda$, on pourrait considérer le voisinage $\mathrm{W} = \{s \in \mathrm{K} : |f_1(s)| < \varepsilon\}$ de s_0, puis une fonction g nulle hors de W, telle que $\|g\|_\infty = 1$, par exemple un multiple convenable de la fonction $g_0(s) = \mathrm{dist}(s, \mathrm{V}^c)$; alors $\|f_1\,g\|_\infty < \varepsilon$ et $\|g\|_\infty = 1$ contredisent l'inégalité $(*)$ quand $\varepsilon < 1/k$).

Si $f = \overline{f}$ alors $f(\mathrm{T}) = \overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$; si $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathrm{U}(1)$, alors $f\overline{f} = 1$, donc $f(\mathrm{T})^*f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})f(\mathrm{T})^* = (f\overline{f})(\mathrm{T}) = \mathrm{Id_H}$, donc l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est unitaire. L'application $g \to g \circ f(\mathrm{T})$ vérifie les conditions du théorème 2 (relativement à $f(\mathrm{T})$), donc coïncide avec $g \to g(f(\mathrm{T}))$.

∎

Théorème 5.4.4. *Soient* H *un espace hilbertien complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *le scalaire* $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ *est réel* ≥ 0 *;*
(*ii*) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$ *;*
(*iii*) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{S} = \mathrm{S}^*$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^2$ *;*
(*iv*) *on a* $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ *et* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$.

Démonstration. On a $\langle \mathrm{S}^*\mathrm{S}(x), x\rangle = \langle \mathrm{S}(x), \mathrm{S}(x)\rangle$ qui est réel ≥ 0, donc $(ii) \Rightarrow (i)$. L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est évidente. Supposons que $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$; notons $f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ l'application $t \to \sqrt{t}$; par le théorème 3, on a $f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$; de plus $f^2 = z_{\mathrm{Sp}(\mathrm{T})}$, donc $f(\mathrm{T})^2 = \mathrm{T}$ (par le théorème 2), donc $(iv) \Rightarrow (iii)$.

Supposons que la propriété (i) soit satisfaite. L'application $(x, y) \to \langle \mathrm{T}(x), y\rangle$ est sesquilinéaire. Par le corollaire 4.1.1, on a $\langle \mathrm{T}(y), x\rangle = \overline{\langle \mathrm{T}(x), y\rangle}$, donc T est autoadjoint. Par le théorème 1, on sait que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}$. Donnons nous $t > 0$ et montrons maintenant que $-t \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. Pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a

$$\|(\mathrm{T} + t\,\mathrm{Id_H})(x)\|\,\|x\| \geq \langle (\mathrm{T} + t\,\mathrm{Id_H})(x), x\rangle = \langle \mathrm{T}(x), x\rangle + t\|x\|^2 \geq t\|x\|^2\,;$$

on en déduit que $\|(\mathrm{T} + t\,\mathrm{Id_H})(x)\| \geq t\|x\|$. Par la proposition 3.1, $\mathrm{V} = \mathrm{T} + t\,\mathrm{Id_H}$ est injectif d'image fermée, et V est autoadjoint ; d'après la proposition 4.4.3, l'adhérence de im(V) est $\ker(\mathrm{V})^\perp = \{0\}^\perp = \mathrm{H}$, donc $\mathrm{im}(\mathrm{V}) = \mathrm{H}$, V est inversible et $-t \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$.

∎

Un élément autoadjoint de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème 4 est appelé *positif* (définition 4.4.2). On note $\mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Si H est un espace de Hilbert réel, la condition $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}$ n'entraîne plus que T soit autoadjoint ; cependant, si on remplace la condition (i) par

(i') l'opérateur T est autoadjoint et $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}$

il reste vrai dans le cas réel que (i') est équivalente à (ii) ou à (iii) ; en revanche on ne parlera plus de (iv) dans le cas réel.

Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ et $\alpha > 0$, on pose $\mathrm{T}^\alpha = f(\mathrm{T})$, où $f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ est l'application $t \to t^\alpha$. Pour $\alpha, \beta > 0$ on a $\mathrm{T}^{\alpha+\beta} = \mathrm{T}^\alpha \mathrm{T}^\beta$ et, par le théorème 3, $(\mathrm{T}^\alpha)^\beta = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$.

Proposition 5.4.5. *Pour* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$, *il existe un et seul* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ *tel que* $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}$.

Démonstration. Pour $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ on a $(\mathrm{S}^2)^{1/2} = \mathrm{S}$ et $(\mathrm{T}^{1/2})^2 = \mathrm{T}$, donc $\mathrm{T} = \mathrm{S}^2$ équivaut à $\mathrm{S} = \mathrm{T}^{1/2}$, d'où la proposition.

■

Bien que ce ne soit pas la méthode naturelle, nous allons indiquer comment déduire l'existence de la racine carrée dans le cas réel de ce qui précède. Soient donc H un espace hilbertien réel dont le produit scalaire sera noté $x \,.\, y$, et T un opérateur autoadjoint positif de H dans H ; considérons l'espace de Hilbert complexifié $\mathrm{H}_\mathbb{C} = \mathrm{H} + i\mathrm{H}$, muni du produit scalaire

$$\langle x + iy, x' + iy'\rangle = x \,.\, x' + y \,.\, y' + i(y \,.\, x' - x \,.\, y');$$

à tout opérateur V sur H, on associe l'opérateur $\mathrm{V}_\mathbb{C}$ sur $\mathrm{H}_\mathbb{C}$ défini par $\mathrm{V}_\mathbb{C}(x + iy) = \mathrm{V}(x) + i\mathrm{V}(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{H}$; on vérifie que $(\mathrm{VW})_\mathbb{C} = \mathrm{V}_\mathbb{C}\mathrm{W}_\mathbb{C}$, et que $\mathrm{V}_\mathbb{C}$ est hermitien (resp : positif) lorsque V l'est. L'opérateur $\mathrm{T}_\mathbb{C}$ de $\mathrm{H}_\mathbb{C}$ est donc positif ; il admet donc une racine carrée $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_\mathbb{C})$. Pour $x \in \mathrm{H}$, on écrira $\mathrm{S}(x + i0_\mathrm{H}) = \mathrm{A}(x) + i\mathrm{B}(x)$, avec $\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x) \in \mathrm{H}$. Cette formule définit deux opérateurs A et B sur H ; le lecteur vérifiera que le fait que S soit positif et $\mathrm{T}_\mathbb{C} = \mathrm{S}^2$ implique les relations : $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}^* = -\mathrm{B}$, $\mathrm{AB} = -\mathrm{BA}$, A autoadjoint positif et

$$(*) \qquad 2|\mathrm{B}(x) \,.\, y| \leq \mathrm{A}(x) \,.\, x + \mathrm{A}(y) \,.\, y$$

pour tous $x, y \in \mathrm{H}$. On a si $z = x + iy \in \mathrm{H}_\mathbb{C}$

$$\mathrm{S}(z) = \mathrm{S}(x + iy) = \mathrm{S}(x) + i\mathrm{S}(y) = \mathrm{A}(x) + i\mathrm{B}(x) + i(\mathrm{A}(y) + i\mathrm{B}(y)) = \mathrm{A}_\mathbb{C}(z) + i\mathrm{B}_\mathbb{C}(z)$$

donc $\mathrm{S} = \mathrm{A}_\mathbb{C} + i\mathrm{B}_\mathbb{C}$; les relations précédentes montrent que $\mathrm{A}_\mathbb{C}$ est hermitien positif, $i\mathrm{B}_\mathbb{C}$ hermitien, et que $\mathrm{A}_\mathbb{C} - i\mathrm{B}_\mathbb{C}$ est une autre racine positive de $\mathrm{T}_\mathbb{C}$. D'après l'unicité, on doit avoir $i\mathrm{B}_\mathbb{C} = 0$, donc $\mathrm{B} = 0$ et A est racine positive de T. Pour finir, l'unicité de la racine dans le cas réel résulte facilement de l'unicité dans le cas complexe.

Soient E et F deux espaces hilbertiens et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; on appelle *module* de T et on note $|\mathrm{T}|$ l'unique $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})_+$ tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$.

Proposition 5.4.6. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; il existe un et un seul* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, *nul sur* $\ker(\mathrm{T})$ *tel que* $\mathrm{T} = u\,|\mathrm{T}|$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{E}$ on a $\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}(x), x\rangle = \||\mathrm{T}|(x)\|^2$; en particulier, $\ker(\mathrm{T}) = \ker(|\mathrm{T}|)$; par la proposition 4.4.3, l'adhérence de l'image de $|\mathrm{T}|$ est donc l'orthogonal de $\ker(\mathrm{T})$; pour $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \ker(\mathrm{T})$, on a alors

$$\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \big\||\mathrm{T}|(x)\big\|^2 \leq \big\||\mathrm{T}|(x)\big\|^2 + \|y\|^2 = \big\||\mathrm{T}|(x) + y\big\|^2.$$

Comme $\mathrm{im}(|\mathrm{T}|) + \ker(\mathrm{T})$ est dense dans E et que F est complet, il existe un unique élément $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $y \in \ker(\mathrm{T})$ on ait $u(|\mathrm{T}|(x) + y) = \mathrm{T}(x)$ (utiliser le lemme 1.4.1).

■

Soient E et F deux espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$; on appelle *phase* de T l'unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ nul sur $\ker(T)$ tel que $T = u|T|$. La décomposition $T = u|T|$ s'appelle *décomposition polaire* de T.

Proposition 5.4.7. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *; notons* $T = u\,|T|$ *sa décomposition polaire.*

(i) On a $u^* T = |T|$ *; de plus,* u^*u *et* uu^* *sont les projecteurs orthogonaux sur l'orthogonal du noyau de* T *et sur l'adhérence de l'image de* T *respectivement.*

(ii) Le module de T^* *est* $u\,T^* = T\,u^*$ *; sa phase est* u^*.

Démonstration. Soient $x, y \in E$, $z_1 \in \ker(T)$ et $z_2 \in \ker(T^*)$; on a

$$\begin{aligned}
\langle u^*(T(x) + z_2), (|T|(y) + z_1)\rangle &= \langle (T(x) + z_2), u(|T|(y) + z_1)\rangle \\
&= \langle (T(x) + z_2), T(y)\rangle \\
&= \langle T(x), T(y)\rangle && \text{car } z_2 \in \operatorname{im}(T)^\perp \\
&= \langle |T|(x), |T|(y)\rangle \\
&= \langle |T|(x), (|T|(y) + z_1)\rangle && \text{car } z_1 \in \operatorname{im}(|T|)^\perp.
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{|T|(y) + z_1 : y \in E,\ z_1 \in \ker(T)\}$ est dense dans E, on en déduit que, pour tout $x \in E$ et tout $z_2 \in \ker(T^*)$ on a $u^*(T(x) + z_2) = |T|(x)$. En particulier, $u^*T = |T|$.

Notons p le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de $|T|$ (*i.e.* l'orthogonal de $\ker(T)$). On a les relations $u^*u|T| = u^*T = |T|$; comme u^*u s'annule sur $\ker(T)$, il coïncide avec p sur $\operatorname{im}(|T|) + \ker(T)$; comme ce sous-espace est dense dans E, on a $u^*u = p$. Notons q le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de T. On a $uu^*T = u|T| = T$; comme uu^* s'annule sur $\ker(T^*) = \operatorname{im}(T)^\perp$, il coïncide avec q sur $\operatorname{im}(T) + \ker(T^*)$; comme ce sous-espace est dense dans F, on a $uu^* = q$.

Pour démontrer le point (*ii*) écrivons $|T| = S^*S$ (théorème 4) ; on peut alors écrire $Tu^* = u\,|T|\,u^* = (Su^*)^*(Su^*)$. On en déduit immédiatement que Tu^* est positif ; alors $Tu^* = (Tu^*)^* = uT^*$; de plus $(Tu^*)^2 = u\,T^*T\,u^* = u|T|^2u^* = TT^*$; par définition du module, $|T^*| = Tu^* = uT^*$. De plus, u^* s'annule sur $\ker(T^*)$ et $u^*u(y) = y$ pour tout $y \in \operatorname{im}(T^*) \subset \ker(T)^\perp$, donc $u^*(uT^*) = T^*$; par définition, la phase de T^* est u^*.

■

Remarque 5.4.1. On déduit aisément des calculs ci-dessus les identités suivantes :

$$T = u|T| = |T^*|u = uT^*u, \quad |T| = u^*T = T^*u = u^*|T^*|u,$$

$$T^* = u^*|T^*| = |T|u^* = u^*Tu^*, \quad |T^*| = u|T|u^* = Tu^* = uT^*.$$

En particulier T^* et $|T|$ ont même image et u est un isomorphisme de l'image de T^* sur celle de T.

6. Quelques classes d'opérateurs

6.1. Applications linéaires compactes

Définition 6.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est dite *compacte* si l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ par l'application T de la boule unité fermée $\mathrm{B_E}$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $\mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(\mathrm{E}) = \mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* dans X s'il existe une partie compacte B de X contenant A. Dans ce cas B est fermée dans X donc contient $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{A}}$ est alors fermé dans B donc est compacte. Autrement dit, A est relativement compacte si et seulement si $\overline{\mathrm{A}}$ est compacte. Rappelons qu'un espace métrique X est dit *précompact* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des parties de diamètre $\leq \varepsilon$; un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact est complet. En particulier, dans un espace métrique complet, les parties relativement compactes sont les parties précompactes.

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E, il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E, il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :

– l'ensemble A est borné ;

– pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathrm{L}_\varepsilon \subset \mathrm{E}$ *de dimension finie* tel que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de L_ε :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{dist}(x, \mathrm{L}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Proposition 6.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; l'ensemble* $\mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Soient E, F *et* G *des espaces de Banach,* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ *; si* S *ou* T *est compacte alors* TS *est compacte. En particulier,* $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ *est un idéal bilatère de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Démonstration. Il est clair que si $\mathrm{T} \in \mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda\mathrm{T} \in \mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soient maintenant T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F, et considérons les ensembles $\mathrm{A}_1 = \mathrm{T}_1(\mathrm{B_E})$, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{T}_2(\mathrm{B_E})$ et $\mathrm{A} = (\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2)(\mathrm{B_E})$; appliquons le critère précédent à l'ensemble A ; tout d'abord, $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ est continue, donc A est borné ; ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux sous-espaces vectoriels L_1 et L_2 de dimension finie de F tels que, pour $j = 1, 2$, tout point de A_j soit à une distance $< \varepsilon/2$ de l'espace L_j. Le sous-espace $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$ est de dimension finie et les points de A_j sont *a fortiori* à une distance $< \varepsilon/2$ de L. Soit y un point quelconque de A ; on peut écrire $y = \mathrm{T}_1(x) + \mathrm{T}_2(x)$, avec $x \in \mathrm{B_E}$, donc $\mathrm{T}_j(x) \in \mathrm{A}_j$. Il existe $z_1, z_2 \in \mathrm{L}$ tels que $\|\mathrm{T}_j(x) - z_j\| < \varepsilon/2$, d'où résulte que $\|x - (z_1 + z_2)\| < \varepsilon$ et $\mathrm{dist}(y, \mathrm{L}) < \varepsilon$.

Supposons que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ soit adhérent à $\mathcal{K}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. L'ensemble $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est borné et vérifie la deuxième condition du critère précédent : pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver S compacte telle que $\|\mathrm{T} - \mathrm{S}\| < \varepsilon/2$, puis un sous-espace L de dimension finie qui approche $\mathrm{S}(\mathrm{B_E})$ à $\varepsilon/2$. Il en résulte facilement que L approche $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ à moins de ε.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ compacte ; si $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ est compact et contient l'image $\mathrm{S}(\mathrm{B_E})$, alors $\mathrm{T}(\mathrm{K})$ est compact et contient l'image $\mathrm{TS}(\mathrm{B_E})$, donc TS est compacte. Pour l'autre cas, remarquons que l'image $\mathrm{S}(\mathrm{B_E})$ est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $r = \|\mathrm{S}\|$; si $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ est compact et contient l'image par T de la boule unité de F, alors $r\,\mathrm{K}$ est compact et contient l'image par TS de $\mathrm{B_E}$.

■

Exemples 6.1.1.

1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts : montrer par exemple que si $c_n \to 0$, l'opérateur Δ_c de ℓ_p dans ℓ_p défini par $\mathrm{T}_c((x_n)) = (c_n x_n)$ est compact (pour tout entier $\mathrm{N} \ge 0$, introduire la suite numérique $c^{(\mathrm{N})}$ telle que $c_n^{(\mathrm{N})} = c_n$ si $n \le \mathrm{N}$ et $c_n^{(\mathrm{N})} = 0$ sinon, puis l'opérateur de rang fini correspondant).

2. Pour toute fonction f intégrable sur $[0,1]$ définissons la fonction continue $\mathrm{V}(f)$ comme dans l'exemple 5.2.1 ; désignons par V_2 l'opérateur de $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2(0,1)$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ qui associe à $f \in \mathrm{L}_2$ la fonction continue $\mathrm{V}(f)$; alors V_2 est compact : on a vu en effet que $|\mathrm{V}(f)(s) - \mathrm{V}(f)(t)| \le \sqrt{|s-t|}$ pour toute $f \in \mathrm{B}_{\mathrm{L}_2}$, donc $\mathrm{V}_2(\mathrm{B}_{\mathrm{L}_2})$ est borné dans $\mathrm{C}([0,1])$ et équicontinu, donc relativement compact dans $\mathrm{C}([0,1])$ par Ascoli. Exercice : si on désigne par V_1 l'opérateur de $\mathrm{L}_1(0,1)$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ défini par $f \in \mathrm{L}_1 \to \mathrm{V}(f)$, vérifier que V_1 n'est pas compact.

Proposition 6.1.2. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach ; si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est compacte, sa transposée* ${}^t\mathrm{T}$ *est compacte de* F^* *dans* E^*.

Démonstration. Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ un compact qui contienne $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$; on munit K de la distance induite par F, c'est à dire $d(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_\mathrm{F}$. Considérons l'application linéaire $\mathrm{V} : \mathrm{F}^* \to \mathrm{C}(\mathrm{K})$ qui associe à chaque $y^* \in \mathrm{F}^*$ la fonction $\mathrm{V}(y^*) : y \in \mathrm{K} \to y^*(y)$. Si M est le maximum de $\|y\|$ lorsque y varie dans K, on voit que $\|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \le \mathrm{M}\,\|y^*\|$, donc V est bornée. Par ailleurs si $x \in \mathrm{B_E}$, on a $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{K}$, donc

$$|({}^t\mathrm{T}(y^*))(x)| = |y^*(\mathrm{T}(x))| = |\mathrm{V}(y^*)(\mathrm{T}(x))| \le \|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$$

ce qui montre en prenant le sup sur $x \in \mathrm{B_E}$ que $\|{}^t\mathrm{T}(y^*)\| \le \|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$. Soit $\mathcal{G} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ l'ensemble $\mathrm{V}(\mathrm{B}_{\mathrm{F}^*})$, formé de toutes les fonctions sur K de la forme $\mathrm{V}(y^*)$, où y^* varie dans la boule unité de F^*. Cet ensemble $\mathcal{G}$ est uniformément borné et formé de fonctions uniformément lipschitziennes sur (K,d) : on a en effet pour toute fonction $f = \mathrm{V}(y^*) \in \mathcal{G}$, et $y_1, y_2 \in \mathrm{K}$

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y^*(y_1) - y^*(y_2)| = |y^*(y_1 - y_2)| \le d(y_1,y_2).$$

Il résulte du théorème d'Ascoli que $\mathcal{G}$ est relativement compact dans C(K). Soit maintenant (y_n^*) une suite dans $\mathrm{B}_{\mathrm{F}^*}$, et montrons que la suite $({}^t\mathrm{T}(y_n^*)) \subset \mathrm{E}^*$ admet une sous-suite de Cauchy (en norme) dans E^* ; d'après ce qui précède, il existe une sous-suite $(\mathrm{V}(y_{n_k}^*))$ qui converge uniformément dans C(K), donc qui est de Cauchy dans C(K). Mais $\|{}^t\mathrm{T}(y^*)\| \le \|\mathrm{V}(y^*)\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$, ce qui implique que $({}^t\mathrm{T}(y_{n_k}))$ est de Cauchy dans E^*.

Remarque 6.1.1. Si ${}^t\mathrm{T}$ est compacte, il en résulte que T est compacte, donc le résultat précédent est en fait une équivalence ; ceci provient du fait que ${}^t({}^t\mathrm{T})$ est compacte de E^{**} dans F^{**}, et des rapports entre la bitransposée et les injections canoniques dans les biduaux.

Rappelons que la topologie *faible* sur un espace de Banach E est la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}^*)$.

Lemme 6.1.1. *(i)) Dans un espace normé toute suite faiblement convergente est bornée.*

(ii) Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ un système orthonormal dans un espace hilbertien ; alors e_n converge faiblement vers 0.

Démonstration. Soit (x_n) une suite faiblement convergente ; en plongeant isométriquement E dans E^{**} on peut considérer (x_n) comme une suite d'applications linéaires de l'espace de Banach E^* dans $\mathbb{K}$ qui converge en tout point $x^* \in \mathrm{E}^*$; il résulte alors du théorème de Banach-Steinhaus (théorème 2.1.5) que $\{\|x_n\| : n \geq 0\}$ est borné. Si E est un Hilbert et (e_n) un système orthonormal, on a $\sum_{n\geq 0} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ (inégalité de Bessel - théorème 4.6.2) ; la suite $(\langle e_n, x\rangle)$ est de carré sommable donc tend vers 0.

■

Proposition 6.1.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *; notons* $\mathrm{B_E}$ *la boule unité fermée de* E*.*

(i) Supposons T *compact ; alors* T *est continu de* $\mathrm{B_E}$*, munie de la topologie faible, dans* F *muni de la topologie de la norme ; en conséquence, pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0 *la suite* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge en norme vers* 0*.*

(ii) Supposons E *réflexif ; alors* T *est compact si et seulement si : pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0*, la suite* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge en norme vers* 0 *; de plus, l'ensemble* $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ *est compact (en norme) dans* F *lorsque* T *est compact.*

Démonstration. Supposons T compact, et soit K un compact de F contenant $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$; l'identité de K, muni de la topologie de la norme, dans K muni de la topologie faible est continue ; comme K est compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de $\mathrm{B_E}$ muni de la topologie faible dans K muni de la topologie faible, il en résulte que T est continu de $\mathrm{B_E}$ faible dans F muni de la norme. Si (x_n) est une suite qui converge faiblement vers 0 dans E, elle est bornée dans E, donc $(\mathrm{T}(x_n))$ tend vers 0 en norme par ce qui précède.

Lorsque E est réflexif, la boule $\mathrm{B_E}$ est faiblement compacte, donc son image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est faiblement compacte dans F, donc faiblement fermée, donc fermée ; puisque $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ est relativement compacte, elle est en fait compacte. Supposons encore E réflexif et que $(\mathrm{T}(x_n))$ converge vers 0 en norme dans F pour toute suite (x_n) qui tend faiblement vers 0_E ; soit (x_n) une suite dans $\mathrm{B_E}$; d'après le théorème 3.3.1, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers un point $x \in \mathrm{B_E}$; alors $(x_{n_k} - x)$ converge faiblement vers 0, donc $\mathrm{T}(x_{n_k}) - \mathrm{T}(x)$ converge en norme vers 0 d'après l'hypothèse ; on a ainsi montré que pour toute suite $(x_n) \subset \mathrm{B_E}$, il existe une sous-suite $(\mathrm{T}(x_{n_k}))$ qui converge en norme, donc T est compact.

Pour tout espace de Banach E et tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, le fait que T soit continu de $\mathrm{B_E}$ munie de la topologie faible dans F muni de la norme implique que T est compact ; en revanche la propriété des suites n'est pas suffisante en général (l'application identique de ℓ_1 la vérifie).

Supposons T continu de B_E faible dans F normé, et utilisons seulement la continuité en 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage faible W de 0 dans B_E tel que $T(W) \subset B(0_F, \varepsilon)$; on peut choisir W de la forme

$$W = \{x \in B_E : \forall j = 1, \ldots, n, \quad |x_j^*(x)| < \delta\}$$

pour un certain $\delta > 0$ et $x_1^*, \ldots, x_n^* \in E^*$. Le lecteur utilisera la précompacité des bornés de $\mathbb{K}^n$ pour montrer que cette condition permet de recouvrir $T(B_E)$ par un nombre fini de boules de rayon ε.

Dans le cas où l'espace de départ est hilbertien, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Théorème 6.1.1. *Soient* E *un espace de Hilbert,* F *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *; notons* B_E *la boule unité fermée de* E*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'opérateur* T *est compact de* E *dans* F *;*

(ii) *l'ensemble* $T(B_E)$ *est compact (en norme) dans* F *;*

(iii) *l'opérateur* T *est continu de* B_E*, munie de la topologie faible, dans* F *muni de la topologie de la norme ;*

(iv) *pour toute suite* (x_n) *de points de* E *convergeant faiblement vers* 0 *la suite* $(T(x_n))$ *converge en norme vers* 0 *;*

(v) *l'opérateur* T *est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini ;*

(vi) *pour tout système orthonormal* $(e_n)_{n \geq 0}$ *dans* E *on a* $\lim_n \|T(e_n)\| = 0$.

Démonstration. Puisque E est réflexif, on sait que (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalents. De plus, (v) $\Rightarrow$ (i) en général.

Supposons que (v) ne soit pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application linéaire continue de rang fini R on ait $\|T - R\| > \varepsilon$. Construisons alors par récurrence sur n un système orthonormal $(e_n)_{n \geq 0}$ tel que $\|T(e_n)\| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$: comme $\|T\| > \varepsilon$, il existe $e_0 \in E$ tel que $\|e_0\| = 1$ et $\|T(e_0)\| > \varepsilon$; supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par $\{e_k : k < n\}$; alors TP est de rang fini donc $\|T - TP\| > \varepsilon$; il existe donc $y_n \in E$ tel que $\|T(\mathrm{Id}_E - P)(y_n)\| > \varepsilon \|y_n\| \geq \varepsilon \|(\mathrm{Id}_E - P)(y_n)\|$; on pose alors $z_n = (\mathrm{Id}_E - P)(y_n)$, puis $e_n = \|z_n\|^{-1} z_n$. On a alors $\|T(e_n)\| = \|z_n\|^{-1} \|T(z_n)\| > \varepsilon$; donc (vi) n'est pas vérifiée. On a montré que (vi) $\Rightarrow$ (v). Enfin, (iv) $\Rightarrow$ (vi) résulte du lemme 1.

■

Remarque 6.1.2. Il existe des espaces de Banach tels que l'adhérence des opérateurs de rang fini soit strictement plus petite que l'espace des opérateurs compacts (P. Enflo, 1972).

Proposition 6.1.4. *Soient* E, F *deux espaces hilbertiens et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *; on a équivalence entre*

(i) *l'application* T *est compacte ;*

(ii) *l'application* T^* *est compacte ;*

(iii) *l'application* T^*T *est compacte ;*

(iv) *l'application* $|T|$ *est compacte.*

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la proposition 1 ; pour tout système orthonormal $(e_n)_{n \geq 0}$ dans l'espace de Hilbert E on a $\|T(e_n)\|^2 = \langle T^*T(e_n), e_n \rangle \leq \|T^*T(e_n)\|$ donc si $\lim \|T^*T(e_n)\| = 0$, alors $\lim_n \|T(e_n)\| = 0$; donc (iii) $\Rightarrow$ (i) (propriété équivalente (vi)

du théorème 1). On a montré que $(ii) \Rightarrow (i)$. Appliquant cela à T^*, on en déduit que $(i) \Rightarrow (ii)$. Appliquant $(i) \iff (iii)$ à $|\mathrm{T}|$, on trouve $(iv) \iff (iii)$.

∎

Lemme 6.1.2. *Soit* E *un espace de Banach ; pour tout sous-espace vectoriel* L *de dimension finie de* E*, il existe un projecteur continu* P *de* E *sur* L*, c'est à dire qu'il existe un sous-espace fermé* F *tel que* $\mathrm{E} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{F}$.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de L et soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale pour le dual L^* ; par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire e_j^* en une forme linéaire continue $x_j^* \in \mathrm{E}^*$. Il suffit alors de poser

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{P}(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)\, e_j,$$

et de poser pour finir $\mathrm{F} = \ker(\mathrm{P})$.

Lemme 6.1.3. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *; si* F *est un sous-espace fermé de* E *tel que* T *soit injectif de* F *dans* E*, il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $\|\mathrm{T}(x)\| \ge c\,\|x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{F}$ *; il en résulte que l'image* $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ *est fermée.*

Démonstration. En cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n) \subset \mathrm{F}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{T}(x_n) \to 0$. Puisque S est compact, on peut trouver une sous-suite (x_{n_k}) telle que $\mathrm{S}(x_{n_k})$ converge ; mais $\mathrm{T}(x_{n_k}) = x_{n_k} - \mathrm{S}(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in \mathrm{F}$ (puisque F est fermé) tel que $\|x\| = 1$, et à la limite $\mathrm{T}(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse T injectif sur F.

Désignons par T_1 la restriction de T à F ; on a vu dans la proposition 5.3.1 que la minoration $\|\mathrm{T}_1(x)\| \ge c\|x\|$ (pour tout $x \in \mathrm{F}$, et avec $c > 0$) implique que $\mathrm{im}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{T}(\mathrm{F})$ est fermée.

Proposition 6.1.5. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *; le noyau de* T *est de dimension finie et l'image* $\mathrm{T}(\mathrm{E})$ *est fermée.*

Démonstration. Le noyau de T est le sous-espace propre de l'opérateur compact S pour la valeur propre 1, il est donc de dimension finie d'après le théorème de Riesz (corollaire du théorème 2.4.1). Soit F un sous-espace fermé de E tel que $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{F}$; alors T est injectif sur F, donc $\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{T}(\mathrm{F})$ est fermé.

Lemme 6.1.4. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *; il n'existe pas de chaîne infinie* $(\mathrm{F}_n)_{n \ge 0}$ *de sous-espaces vectoriels fermés de* E *telle que*

$$\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_{n+1}, \ \mathrm{F}_n \ne \mathrm{F}_{n+1} \ \ \textit{et} \ \ \mathrm{T}(\mathrm{F}_{n+1}) \subset \mathrm{F}_n$$

pour tout $n \ge 0$.

Démonstration. Supposons le contraire. Puisque $\mathrm{F}_n \ne \mathrm{F}_{n+1}$ on peut trouver pour tout $n \ge 0$ un vecteur $x_{n+1} \in \mathrm{F}_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{F}_n) > 1 - \varepsilon$. Puisque $\mathrm{T}(\mathrm{F}_{n+1}) \subset \mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ et $\mathrm{S} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{T}$, on a $\mathrm{S}(\mathrm{F}_{n+1}) \subset \mathrm{F}_{n+1}$. Soient alors k, ℓ deux entiers tels que $0 < k < \ell$; le vecteur $\mathrm{T}(x_\ell)$ est dans $\mathrm{F}_{\ell-1}$ et $\mathrm{S}(x_k) \in \mathrm{F}_k \subset \mathrm{F}_{\ell-1}$, donc $\mathrm{T}(x_\ell) + \mathrm{S}(x_k) \in \mathrm{F}_{\ell-1}$, donc $\|x_\ell - (\mathrm{T}(x_\ell) + \mathrm{S}(x_k))\| > 1 - \varepsilon$. Mais cette quantité est égale à $\|\mathrm{S}(x_\ell) - \mathrm{S}(x_k)\|$. L'image $\mathrm{S}(\mathrm{B_E})$ contiendrait donc une suite infinie de points dont les distances mutuelles seraient $\ge 1 - \varepsilon$, ce qui contredirait la compacité de S.

Corollaire 6.1.1. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *; la suite croissante des noyaux* $(\ker(\mathrm{T}^n))_{n \geq 0}$ *est stationnaire.*

Démonstration. Posons $\mathrm{F}_n = \ker(\mathrm{T}^n)$. On a bien F_n fermé, $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_{n+1}$ et de plus $\mathrm{T}(\mathrm{F}_{n+1}) \subset \mathrm{F}_n$ pour tout $n \geq 0$; si la suite n'était pas stationnaire, elle contredirait le lemme précédent.

Corollaire 6.1.2. *Soit* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un opérateur compact, et posons* $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *; si* T *est surjectif, alors* $\ker(\mathrm{T}) = \{0\}$ *; si* T *est injectif, alors* $\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$.

Démonstration. Si l'opérateur T est surjectif et si $\ker(\mathrm{T}) \neq \{0\}$, on montre par récurrence que $\ker(\mathrm{T}^n) \neq \ker(\mathrm{T}^{n+1})$ pour tout $n \geq 1$: si $x \in \ker(\mathrm{T}^{n+1}) \setminus \ker(\mathrm{T}^n)$, on a $\mathrm{T}^{n+1}(x) = 0$ et $\mathrm{T}^n(x) \neq 0$. Puisque T est surjectif, il existe y tel que $\mathrm{T}(y) = x$. Il en résulte que $\mathrm{T}^{n+2}(y) = \mathrm{T}^{n+1}(x) = 0$ mais $\mathrm{T}^{n+1}(y) = \mathrm{T}^n(x) \neq 0$.

Supposons T injectif ; puisque l'image de T est fermée, il en résulte que T est un isomorphisme de E sur T(E), et ceci implique que ${}^t\mathrm{T}$ est surjectif (soit T_1 l'isomorphisme de E sur T(E) défini par T, et soit $\mathrm{V} : \mathrm{T}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}$ son inverse ; pour toute $x^* \in \mathrm{E}^*$, on verra que $x^* = {}^t\mathrm{T}(y^*)$, où $y^* \in \mathrm{E}^*$ est un prolongement de $x^* \circ \mathrm{V} \in (\mathrm{T}(\mathrm{E}))^*$) ; l'adjoint ${}^t\mathrm{S}$ est compact, et ${}^t\mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}^*} - {}^t\mathrm{S}$. Puisque ${}^t\mathrm{T}$ est surjectif, on en déduit $\ker({}^t\mathrm{T}) = \{0\}$ d'après la première partie ; il en résulte que l'image de T est dense, donc $\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ puisque l'image est fermée, et T est surjectif.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, on appelle *codimension* de F la dimension du quotient E/F (finie ou $+\infty$). Si F est de codimension finie n, on peut trouver un sous-espace vectoriel G de dimension n tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, et pour tout sous-espace G' tel que $\dim(\mathrm{G}') > n$, on a $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}' \neq \{0\}$.

Théorème 6.1.2 : Alternative de Fredholm. *Soient* E *un espace de Banach et* $\mathrm{S} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *;*

(i) *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *l'image de* $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ *est fermée et de codimension finie et l'on a*

$$\operatorname{codim} \mathrm{im}(\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}) = \dim \ker(\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S})\,;$$

(ii) *le spectre* Sp(S) *est fini ou formé d'une suite tendant vers* 0.

Pour un opérateur T à image fermée et à noyau de dimension finie, la différence $\dim\ker(\mathrm{T}) - \operatorname{codim}\mathrm{im}(\mathrm{T})$ s'appelle *l'indice* de l'opérateur T et se note ind(T). La première partie du théorème dit que $\mathrm{S} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est d'indice nul pour tout $\lambda \neq 0$.

Démonstration. En remplaçant S par S/λ on se ramène à $\lambda = 1$, et à étudier l'opérateur $\mathrm{T} = \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$, égal à $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ dans ce cas : on a vu que ker(T) est de dimension finie et im(T) fermée. on doit montrer de plus que $\dim\ker(\mathrm{T}) = \operatorname{codim}\mathrm{T}(\mathrm{E})$, c'est à dire que l'indice de T est nul. On va procéder par récurrence sur la dimension de ker(T). Si $\dim\ker(\mathrm{T}) = 0$, on sait que T est surjectif d'après le corollaire 2, donc l'indice est nul dans ce cas ; on suppose donc que n est un entier > 0 et que $\mathrm{ind}(\mathrm{T}') = 0$ pour tout opérateur $\mathrm{T}' = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}'$, où S' est compact et $\dim\ker(\mathrm{T}') < n$. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}$ avec S compact et $\dim\ker(\mathrm{T}) = n > 0$; d'après le corollaire 2, on a $\mathrm{im}(\mathrm{T}) \neq \mathrm{E}$; soit donc $y_0 \notin \mathrm{im}(\mathrm{T})$, et soit $x_0 \in \ker(\mathrm{T})$, x_0 non nul ; on va construire T' de la forme voulue tel que $\mathrm{ind}(\mathrm{T}') = \mathrm{ind}(\mathrm{T})$ et $\dim\ker(\mathrm{T}') < \dim\ker(\mathrm{T})$; d'après l'hypothèse de récurrence, on aura $0 = \mathrm{ind}(\mathrm{T}') = \mathrm{ind}(\mathrm{T})$, d'où le résultat.

Soit $x_0^* \in \mathrm{E}^*$ telle que $x_0^*(x_0) = 1$ et posons $\mathrm{T}'(x) = \mathrm{T}(x) + x_0^*(x)\,y_0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. L'opérateur T' est obtenu en ajoutant à T l'opérateur de rang un $\mathrm{R} : x \to x_0^*(x)\,y_0$, donc $\mathrm{T}' = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \mathrm{S}'$ avec $\mathrm{S}' = \mathrm{S} - \mathrm{R}$ compact. Déterminons le noyau de T' ; la relation

$T'(x) = 0$ entraîne $T(x) = 0$ et $x_0^*(x) = 0$ (parce que $y_0 \notin \mathrm{im}(T)$) ; le noyau de T' est donc le sous-espace de $\ker(T)$ défini par l'équation $x_0^*(x) = 0$, qui élimine x_0 du noyau de T' et montre que $\dim\ker(T') = \dim\ker(T) - 1$. On a donc $\mathrm{ind}(T') = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui montre déjà que $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}(T')$ est finie. Il est clair que $\mathrm{im}(T') \subset \mathrm{im}(T) \oplus \mathbb{K}y_0$; de plus $T'(x_0) = y_0$ (puisque $T(x_0) = 0$), et pour tout $x \in E$ on observe que $x' = x - x_0^*(x)x_0$ annule x_0^*, donc $T'(x') = T(x') = T(x)$, ce qui montre que $\mathrm{im}(T')$ contient $\mathrm{im}(T)$. Finalement $\mathrm{im}(T') = \mathrm{im}(T) \oplus \mathbb{K}y_0$, donc $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}(T) = \mathrm{codim}\,\mathrm{im}(T') + 1$, et $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T') = 0$.

On va maintenant montrer que si 1 est dans le spectre de S, alors 1 est valeur propre et 1 est isolé dans le spectre de S. Si 1 n'est pas valeur propre de S, l'opérateur T est injectif, donc surjectif d'après le corollaire 2, donc $\mathrm{Id}_E - S$ est inversible et 1 n'est pas dans le spectre de S. Posons $T = \mathrm{Id}_E - S$; on a vu que $\dim\ker(T) = \mathrm{codim}\,\mathrm{im}(T)$. Remarquons que $T^k = (\mathrm{Id}_E - S)^k = \mathrm{Id}_E - S_k$ avec S_k compact (utiliser la formule du binôme), donc $\dim\ker(T^n) = \mathrm{codim}\,\mathrm{im}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, c'est une évidence). On a vu qu'il existe un entier k tel que $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$, et on peut prendre pour k le plus petit entier vérifiant cette propriété ; on a $k \geq 1$ puisque 1 est valeur propre de S ; alors $\ker(T^k) \cap \mathrm{im}(T) = \{0\}$, sinon $\ker(T^k) \neq \ker(T^{k+1})$; on a *a fortiori* $\ker(T^k) \cap \mathrm{im}(T^k) = \{0\}$, et d'après l'égalité dimension-codimension il en résulte que

$$E = \ker(T^k) \oplus \mathrm{im}(T^k).$$

L'espace E se trouve décomposé en deux sous-espaces fermés T-invariants. La restriction T_2 de T à $\mathrm{im}(T^k)$ est injective, donc c'est un isomorphisme de $\mathrm{im}(T^k)$ sur $\mathrm{im}(T^k)$ d'après le point (i). La restriction T_1 de T à $\ker(T^k)$ est un endomorphisme en dimension finie, dont la seule valeur propre est 0 ; pour tout $\lambda \neq 0$, $T_1 - \lambda$ est donc bijective de $\ker(T^k)$ sur $\ker(T^k)$, et pour λ assez petit, $T_2 - \lambda$ est encore un isomorphisme ; il en résulte que $T - \lambda$ est un isomorphisme pour $\lambda \neq 0$ et assez petit, ce qui signifie que 0 est isolé dans le spectre de T, ou encore que 1 est isolé dans le spectre de S. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$, autrement dit que toute suite (λ_n) de valeurs spectrales distinctes tend vers 0.

■

On peut donner une démonstration courte mais un peu artificielle du point (ii) du théorème précédent. Si $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ était une suite de valeurs propres de S distinctes de λ et qui converge vers $\lambda \neq 0$, on aurait pour tout $n \geq 0$ un vecteur x_n de norme un tel que $S(x_n) = \lambda_n x_n$. Soit F le sous-espace fermé engendré par la suite $(x_n)_{n\geq 0}$; il est clair que F est S-invariant, ce qui permet de considérer la restriction S' de S à F. Alors $x_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1}(\lambda\,\mathrm{Id}_F - S')(x_n)$ pour tout $n \geq 0$, ce qui montre que $T' = \lambda\,\mathrm{Id}_F - S'$ a une image dense dans F (l'image contient tous les vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$), donc égale à F. Il en résulte que T' est un isomorphisme, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(S')$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{Sp}(S')$ est fermé et contient les (λ_n).

Théorème 6.1.3. *Toute application linéaire compacte normale d'un espace de Hilbert complexe* H *admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres.*

Démonstration. Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ une application linéaire compacte normale ; soit K son spectre. Pour $\lambda \in K$ notons E_λ l'espace propre de T associé. On doit démontrer que :

– les E_λ sont deux à deux orthogonaux ;
– le sous-espace engendré par les E_λ est dense.

Alors si B_λ est une base hilbertienne de E_λ, la famille $\bigcup_{\lambda \in S} B_\lambda$ sera la base voulue. Si $x \in E_\lambda$, comme $TT^*(x) = T^*T(x) = \lambda T^*(x)$ on trouve $T^*(x) \in E_\lambda$. Pour tout $y \in E_\lambda$ on a $\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle \overline{\lambda} x, y\rangle$; donc $T^*(x) - \overline{\lambda} x \in E_\lambda \cap E_\lambda^\perp$ donc $T^*(x) = \overline{\lambda} x$. Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ alors $\langle T(x), y\rangle = \mu\langle x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ ce qui montre que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Notons F le sous-espace de H engendré par les E_λ, pour $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Montrons que F est dense dans H. On a $T(F) \subset F$ et $T^*(F) \subset F$. Il s'ensuit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$ et $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Notons $T_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ la restriction de T. Alors T_1^* est la restriction de T^*, donc T_1 est normal. Remarquons que T_1 est compacte, qu'elle n'a pas de valeur propre non nulle ; par l'alternative de Fredholm, T_1 n'a pas de valeur spectrale non nulle ; par la proposition 5.2.1, $T_1 = 0$, donc $F^\perp = E_0$, d'où le résultat.

∎

Remarque 6.1.3. Il s'agit ici d'un théorème complexe ; déjà en dimension réelle deux, une matrice normale 2×2 n'est pas forcément diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (prendre tout simplement une rotation d'angle différent de $k\pi$) ; on peut cependant décomposer l'espace réel en sous-espaces invariants de dimension ≤ 2. Si H est un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint compact, il existe une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de T.

6.2. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Lemme 6.2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens,* B *une base hilbertienne de* E *et* B′ *une base hilbertienne de* F *; pour tout* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *on a :*

$$\sum_{b \in B, b' \in B'} |\langle b', T(b)\rangle|^2 = \sum_{b \in B} \|T(b)\|^2 = \sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2$$

(valeur finie ≥ 0 *ou bien* $+\infty$*). Cette quantité ne dépend pas des bases* B *et* B′ *choisies.*

Démonstration. Pour $x \in E$ et $y \in F$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle x, b\rangle|^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{b' \in B'} |\langle b', y\rangle|^2,$$

d'où la première assertion. Il est clair que $\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2$ ne dépend pas de B′ et que $\sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2$ ne dépend pas de B, d'où la deuxième assertion.

∎

Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose $\|T\|_2 = \left(\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2\right)^{1/2}$ où B est une base hilbertienne de E. Posons $\mathcal{L}^2(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \|T\|_2 < +\infty\}$.

Théorème 6.2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens ;*

(*i*) *l'ensemble* $\mathcal{L}^2(E, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E, F)$ *;*

(*ii*) *pour tous opérateurs* $S, T \in \mathcal{L}^2(E, F)$ *et toute base hilbertienne* B *de* E*, la famille* $(\langle S(b), T(b)\rangle)_{b \in B}$ *est sommable ; l'application* $(S, T) \to \sum_{b \in B} \langle S(b), T(b)\rangle$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{L}^2(E, F)$*, indépendant de la base* B.

On note $(S, T) \to (S, T)_2$ *ce produit scalaire ;*

(*iii*) *muni de ce produit scalaire,* $\mathcal{L}^2(E, F)$ *est un espace hilbertien ;*

(*iv*) *on a* $\mathcal{L}^2(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$ *;*

(*v*) *soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{K}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *; notons* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *les valeurs propres de* $|\mathrm{T}|$ *(qui est compact par la proposition 1.4) comptées avec leur multiplicité. Alors* $\|\mathrm{T}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2$.

Démonstration. Soient $\mathrm{S},\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et B une base hilbertienne de E ; pour $b \in \mathrm{B}$ on a

$$|\langle \mathrm{S}(b), \mathrm{T}(b)\rangle| \leq \|\mathrm{S}(b)\| \, \|\mathrm{T}(b)\| \leq \frac{1}{2}\,(\|\mathrm{S}(b)\|^2 + \|\mathrm{T}(b)\|^2).$$

On en déduit que $(\langle \mathrm{S}(b), \mathrm{T}(b)\rangle)_{b\in\mathrm{B}}$ est sommable. Comme $\|\mathrm{S}(b) + \mathrm{T}(b)\|^2$ est égal à $\|\mathrm{S}(b)\|^2 + \|\mathrm{T}(b)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle \mathrm{S}(b), \mathrm{T}(b)\rangle)$, on en déduit que $\mathrm{S}+\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$; le point (*i*) est alors clair. Il est clair que $(\mathrm{S},\mathrm{T}) \to \sum_{b\in\mathrm{B}} \langle \mathrm{S}(b), \mathrm{T}(b)\rangle$ est un produit scalaire. On a

$$\sum_{b\in\mathrm{B}} \langle \mathrm{S}(b), \mathrm{T}(b)\rangle = \frac{1}{4}\,(\|\mathrm{S}+\mathrm{T}\|_2^2 - \|\mathrm{S}-\mathrm{T}\|_2^2 + i\|\mathrm{S}+i\mathrm{T}\|_2^2 - i\|\mathrm{S}-i\mathrm{T}\|_2^2),$$

(identité de polarisation - proposition 4.1.1) d'où l'indépendance de la base.

Remarquons que, pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et tout $x \in \mathrm{E}$ de norme 1, prenant une base hilbertienne contenant x, on a $\|\mathrm{T}\|_2 \geq \|\mathrm{T}(x)\|$; ceci ayant lieu pour tout x il en résulte que $\|\mathrm{T}\|_2 \geq \|\mathrm{T}\|$, donc $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Du point (*ii*) il résulte alors que $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un espace préhilbertien ; on doit montrer qu'il est de plus complet. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$; comme $\| \ \| \leq \| \ \|_2$, la suite (T_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ qui est complet, donc la suite (T_n) converge en norme vers un opérateur T. Pour tout ensemble fini $\mathrm{I} \subset \mathrm{B}$ on aura

$$\sum_{b\in\mathrm{I}} \|\mathrm{T}(b)\|^2 = \lim_n \sum_{b\in\mathrm{I}} \|\mathrm{T}_n(b)\|^2 \leq \sup_n \|\mathrm{T}_n\|_2^2 = \mathrm{M},$$

donc $\sum_{b\in\mathrm{B}} \|\mathrm{T}(b)\|^2 \leq \mathrm{M} < +\infty$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Comme (T_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on ait $\|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_\mathrm{N}\|_2 \leq \varepsilon$. L'argument précédent appliqué à la suite $(\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_\mathrm{N})_{n\geq\mathrm{N}}$, qui converge vers $\mathrm{T}-\mathrm{T}_\mathrm{N}$ montre que $\|\mathrm{T}-\mathrm{T}_\mathrm{N}\|_2 \leq \sup_{n\geq\mathrm{N}} \|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_\mathrm{N}\|_2 \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

Soient $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et (e_n) un système orthonormal ; soit B une base contenant les vecteurs e_n ; la famille $(\|\mathrm{T}(b)\|^2)$ est sommable, donc la suite $\|\mathrm{T}(e_n)\|$ tend vers 0. Donc T est compact par la caractérisation (*vi*) du théorème 1.1. Le point (*iv*) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour $|\mathrm{T}|$.

∎

Définition 6.2.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens ; un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est dit de *Hilbert-Schmidt*.

Exercice 6.2.1. Soient (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurés et $\mathrm{K}(s,t)$ une fonction de carré intégrable sur $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$. On définit un opérateur borné $\mathrm{T_K}$ par

$$\mathrm{T_K} f(s) = \int_\mathrm{Y} \mathrm{K}(s,t) f(t)\, dt.$$

Montrer que $\mathrm{T_K}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y},\nu)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$.

Proposition 6.2.1. *Soient* E, F *et* H *des espaces hilbertiens ; pour tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{H})$ *on a :*

(*i*) $\|\mathrm{S}\|_2 = \|\mathrm{S}^*\|_2$;

(*ii*) $\|\mathrm{TS}\|_2 \leq \|\mathrm{T}\|\,\|\mathrm{S}\|_2$ *et* $\|\mathrm{TS}\|_2 \leq \|\mathrm{T}\|_2\|\mathrm{S}\|$;

(*iii*) *si* S *ou* T *est un opérateur de Hilbert-Schmidt alors il en va de même pour* TS.

Démonstration. Le point (*i*) résulte de la définition de $\|S\|_2$ (lemme 1). Pour le point (*ii*), soit B une base hilbertienne de E ; pour tout $b \in B$ on a $\|TS(b)\| \leq \|T\|\,\|S(b)\|$ donc $\|TS\|_2^2 = \sum_{b\in B}\|TS(b)\|^2 \leq \|T\|^2\sum_{b\in B}\|S(b)\|^2 = \|T\|\,\|S\|_2$. La deuxième assertion en résulte en remplaçant S et T par leurs adjoints. Le point (*iii*) résulte aussitôt de (*ii*).

■

En particulier l'espace $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(E,E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

6.3. Opérateurs nucléaires

Proposition 6.3.1. *Soit* E *un espace hilbertien ;*

(*i*) *soit* $T \in \mathcal{L}(E)_+$ *; la quantité (finie ou égale à* $+\infty$*)* $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{b\in B}\langle T(b), b\rangle$ *ne dépend pas de la base hilbertienne* B *de l'espace* E *;*

(*ii*) *pour tous* $S, T \in \mathcal{L}(E)_+$ *et tout* $\lambda \geq 0$ *on a* $\mathrm{Tr}(S+T) = \mathrm{Tr}(S) + \mathrm{Tr}(T)$ *et* $\mathrm{Tr}(\lambda S) = \lambda\,\mathrm{Tr}(S)$ *;*

(*iii*) *soient* F *un espace hilbertien,* $U \in \mathcal{L}(E,F)$ *un opérateur unitaire et* $T \in \mathcal{L}(E)_+$ *; alors* $\mathrm{Tr}(U\,T\,U^*) = \mathrm{Tr}(T)$ *;*

(*iv*) *si* $T \in \mathcal{L}(E)_+$ *est compact,* $\mathrm{Tr}(T)$ *est la somme des valeurs propres de* T *comptées avec leur multiplicité.*

Démonstration. Ecrivons $T = S^*S$ alors $\mathrm{Tr}(T) = \|S\|_2^2$ ne dépend pas de la base, d'où (*i*). Le point (*ii*) est clair. Soit B une base hilbertienne de E ; alors U(B) est une base hilbertienne de F. On a $\sum_{b\in U(B)}\langle UTU^*(b), b\rangle = \sum_{b\in B}\langle T(b), b\rangle$, d'où (*iii*). Enfin, (*iv*) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour T.

■

Soient E, F deux espaces hilbertiens ; pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$ posons $\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|)$ et $\mathcal{L}^1(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F) : \|T\|_1 < +\infty\}$.

Lemme 6.3.1. *Soit* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *;*

(*i*) *soient* H *un espace hilbertien et* $S \in \mathcal{L}(E,H)$ *tels que* $|T| = S^*S$ *; on a alors l'égalité* $\|T\|_1 = \|S\|_2^2$ *;*

(*ii*) *on a* $\|T\|_1 = \sup\{|(TR,S)_2| : R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\,\|S\| \leq 1\}$.

Démonstration. Le point (*i*) est clair. Si $T \in \mathcal{L}^1(E,F)$, alors $|T|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(E)$; soient $R \in \mathcal{L}^2(E)$ et $S \in \mathcal{L}^2(E,F)$ tels que $\|S\|\,\|R\| \leq 1$; soit B une base hilbertienne de E ; on a $(TR,S)_2 = \sum_B\langle TR(b), S(b)\rangle = (|T|^{1/2}R, |T|^{1/2}u^*S)_2$ où u est la phase de T. On en déduit que

$$|(TR,S)_2| \leq \||T|^{1/2}R\|_2\||T|^{1/2}u^*S\|_2 \leq \|u^*S\|\,\|R\|\,\||T|^{1/2}\|_2^2 \leq \||T|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|_1.$$

Donc $\{|(TR,S)_2| : R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\,\|S\| \leq 1\}$ est majoré par $\|T\|_1$. Soient B une base hilbertienne de E et I une partie finie de B ; notons P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par I ; alors

$$\sum_{b\in I}\langle|T|(b), b\rangle = \sum_{b\in I}\langle u^*T(b), b\rangle = (TP, uP)_2 \leq$$
$$\leq \sup\{|(TR,S)_2| : R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\,\|S\| \leq 1\}.$$

Prenant le «sup» sur les parties finies de B on trouve

$$\|T\|_1 \leq \sup\{|(TR,S)_2| : R \in \mathcal{L}^2(E),\ S \in \mathcal{L}^2(E,F),\ \|R\|\,\|S\| \leq 1\}.$$

■

Théorème 6.3.1. *Soient* E, F *et* H *des espaces hilbertiens ;*

(*i*) *l'ensemble* $\mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *;*

(*ii*) *l'application* $\mathrm{T} \to \|\mathrm{T}\|_1$ *est une norme sur* $\mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *pour laquelle* $\mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est complet :*

(*iii*) *pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *on a* $\|\mathrm{T}\|_1 = \|\mathrm{T}^*\|_1$ *;*

(*iv*) *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{H})$ *on a* $\|\mathrm{TS}\|_1 \leq \|\mathrm{S}\|_1\|\mathrm{T}\|$ *et aussi* $\|\mathrm{TS}\|_1 \leq \|\mathrm{S}\|\,\|\mathrm{T}\|_1$.

Démonstration. Soient $\mathrm{S},\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$; pour tous $\mathrm{R}_1 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E})$ et $\mathrm{R}_2 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ tels que $\|\mathrm{R}_1\|\,\|\mathrm{R}_2\| \leq 1$, on a $|((\mathrm{S}+\mathrm{T})\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)_2| \leq |(\mathrm{SR}_1,\mathrm{R}_2)_2| + |(\mathrm{TR}_1,\mathrm{R}_2)_2|$. Par le lemme 1, $\|\mathrm{S}+\mathrm{T}\|_1 \leq \|\mathrm{S}\|_1 + \|\mathrm{T}\|_1$; on en déduit immédiatement que $\mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et que $\|\ \|_1$ est une semi-norme. Par le lemme 1, $\|\mathrm{T}\|_1 = \big\||\mathrm{T}|^{1/2}\big\|_2^2 \geq \big\||\mathrm{T}|^{1/2}\big\|^2 = \|\mathrm{T}\|$ (proposition 4.4.2). En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme.

Par le lemme 1 l'application $\mathrm{T} \to \mathrm{Tr}(|\mathrm{T}|)$ est semi-continue inférieurement et on en déduit comme dans le théorème 2.1 que $\mathcal{L}^1(\mathrm{E})$, muni de cette norme, est complet. On a $|\mathrm{T}^*| = u\,|\mathrm{T}|\,u^* = (|\mathrm{T}|^{1/2}u^*)^*\,(|\mathrm{T}|^{1/2}u^*)$. Donc

$$\|\mathrm{T}^*\|_1 = \big\||\mathrm{T}|^{1/2}u^*\big\|_2^2 \leq \big\||\mathrm{T}|^{1/2}\big\|_2^2 = \|\mathrm{T}\|_1\,;$$

remplaçant T par T^*, on en déduit (*iii*). Soient $\mathrm{R}_1 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E})$ et $\mathrm{R}_2 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{H})$; on a $(\mathrm{TSR}_1,\mathrm{R}_2)_2 = (\mathrm{SR}_1,\mathrm{T}^*\mathrm{R}_2)_2$. Il résulte alors du lemme 1 que $\|\mathrm{TS}\|_1 \leq \|\mathrm{S}\|_1\,\|\mathrm{T}\|$; remplaçant S et T par leurs adjoints il résulte de (*iii*) que $\|\mathrm{TS}\|_1 \leq \|\mathrm{S}\|\,\|\mathrm{T}\|_1$.

■

Théorème 6.3.2. *Soient* E, F *deux espaces hilbertiens ;*

(*i*) *pour tout opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E})$ *et pour toute base hilbertienne* B *de* E *la famille* $(\langle \mathrm{T}(b), b\rangle)_{b\in\mathrm{B}}$ *est sommable et la quantité* $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = \sum_{b\in\mathrm{B}}\langle \mathrm{T}(b), b\rangle$ *ne dépend pas de la base hilbertienne* B *;*

(*ii*) *on a* $|\operatorname{Tr}(\mathrm{T})| \leq \mathrm{Tr}(|\mathrm{T}|)$ *;*

(*iii*) *pour tous* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *si* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *ou si* S *et* T *sont de Hilbert-Schmidt, alors* $\mathrm{Tr}(\mathrm{TS}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ST})$.

Démonstration. On a $\langle \mathrm{T}(b), b\rangle = \langle |\mathrm{T}|^{1/2}(b), |\mathrm{T}|^{1/2}u^*(b)\rangle$. Comme les opérateurs $|\mathrm{T}|^{1/2}$ et $|\mathrm{T}|^{1/2}u^*$ sont dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{E})$, (*i*) résulte du théorème 2.1. De plus

$$|\operatorname{Tr}(\mathrm{T})| = |(|\mathrm{T}|^{1/2}, |\mathrm{T}|^{1/2}u^*)_2| \leq \big\||\mathrm{T}|^{1/2}\big\|_2\,\big\||\mathrm{T}|^{1/2}u^*\big\|_2 \leq \|\mathrm{T}\|_1,$$

d'où (*ii*). L'application $\mathrm{S} \to \mathrm{S}^*$ est une isométrie antilinéaire de $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{F},\mathrm{E})$; pour $\mathrm{S} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on a alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{S}^*\mathrm{S}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{SS}^*)$. Par l'identité polarisation on en déduit que, pour $\mathrm{S},\mathrm{S}_1 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on a $\mathrm{Tr}(\mathrm{S}_1^*\mathrm{S}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{SS}_1^*)$. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{F},\mathrm{E})$; posant $\mathrm{S}_1 = \mathrm{T}^*$, on en déduit $\mathrm{Tr}(\mathrm{TS}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ST})$.

Enfin, soient $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$; donnons nous $\mathrm{S}_1 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\mathrm{S}_2 \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E})$ tels que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$; on a $\mathrm{Tr}(\mathrm{ST}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{T}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{S}_2\mathrm{TS}_1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{TS})$.

■

Définition 6.3.1. Un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E})$ est appelé *nucléaire* ou *à trace*.

Il est clair que $\mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F}) \subset \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Un opérateur de rang fini est nucléaire.

Exercice 6.3.1.

a. On dit qu'un opérateur D de ℓ_q dans ℓ_p est *diagonal* s'il existe une suite de coefficients $\alpha = (\alpha_n)$ telle que pour tout $x = (x_n)$ dans ℓ_q on ait $\mathrm{T}(x) = (\alpha_n x_n)$. Montrer que α définit un opérateur diagonal D_α de ℓ_q dans ℓ_p si et seulement si $\alpha \in \ell_r$, où $1/p = 1/q + 1/r$. Montrer que

$$\|\mathrm{D}_\alpha\|_{\mathcal{L}(\ell_q,\ell_p)} = \|\alpha\|_r.$$

En particulier, α définit un opérateur diagonal D_α de ℓ_∞ dans ℓ_1 si et seulement si $\alpha \in \ell_1$.

b. Soient E et F deux espaces hilbertiens. Montrer que tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{F})$ peut se décomposer en $\mathrm{T} = v \circ \mathrm{D}_\alpha \circ u$, où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \ell_\infty)$, $v \in \mathcal{L}(\ell_1, \mathrm{F})$ et où D_α est un opérateur diagonal de ℓ_∞ dans ℓ_1. Montrer qu'on peut choisir u, v, α de façon que

$$\|u\|\,\|\alpha\|_1\,\|v\| = \|\mathrm{T}\|_1.$$

c. Montrer que réciproquement, tout opérateur T admettant une telle décomposition est nucléaire et que $\|\mathrm{T}\|_1 \leq \|u\|\,\|\alpha\|_1\,\|v\| = \|\mathrm{T}\|_1$.

Il est assez naturel de définir la notion d'opérateur nucléaire entre deux espaces de Banach E et F en disant que T est nucléaire s'il admet la décomposition $\mathrm{T} = v \circ \mathrm{D}_\alpha \circ u$, où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \ell_\infty)$, $v \in \mathcal{L}(\ell_1, \mathrm{F})$ et où D_α est un opérateur diagonal de ℓ_∞ dans ℓ_1. On obtient de cette façon une théorie assez intéressante, mais qui a un défaut incontournable : si T est nucléaire de E dans E, cela n'implique pas en général que la famille des valeurs propres soit sommable.

7. Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints et unitaires

Dans ce chapitre, tous les espaces considérés sont complexes.

7.1. Opérateurs de multiplication et spectre.

Soient $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ (pour abréger nous noterons simplement (X, μ) dans la suite, lorsque la mention de la tribu $\mathcal{A}$ ne sera pas utile) ; on rappelle que la norme $\|f\|_\infty$ de f dans l'espace de Banach L_∞ est donnée par le «sup essentiel» de la classe de fonctions f, c'est à dire le plus petit nombre réel $\mathrm{M} \geq 0$ tel que l'on ait $|f(s)| \leq \mathrm{M}$ pour μ-presque tout $s \in \mathrm{X}$. Si ξ est une fonction de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$, il est clair que le produit $f\xi$ est bien défini en tant que classe de fonctions et que $f\xi$ est de carré intégrable, avec $\|f\xi\|_2 \leq \|f\|_\infty \, \|\xi\|_2$.

Notons $\mathrm{M}_f : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ l'application qui à $\xi \in \mathrm{L}_2$ associe la fonction $f\xi$. Par ce qui précède, on sait que $\mathrm{M}_f \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu))$ et $\|\mathrm{M}_f\| \leq \|f\|_\infty$. Si f, g sont deux fonctions mesurables bornées, il est clair que $\mathrm{M}_g \, \mathrm{M}_f = \mathrm{M}_{fg}$. Pour $\xi, \eta \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$, on a

$$\langle f\xi, \eta\rangle = \int_{\mathrm{X}} f(s)\xi(s)\overline{\eta(s)}\, d\mu(s) = \langle \xi, \overline{f}\eta\rangle,$$

donc $(\mathrm{M}_f)^* = \mathrm{M}_{\overline{f}}$. On en déduit immédiatement que M_f est normal. Remarquons que si f est réelle, alors M_f est autoadjoint, et que si $|f(s)| = 1$ pour μ-presque tout $s \in \mathrm{X}$, alors $(\mathrm{M}_f)^* \, \mathrm{M}_f = \mathrm{M}_{|f|^2} = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)}$.

Proposition 7.1.1. *Le spectre de* M_f *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *l'ensemble* $\{s \in \mathrm{X} : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ *ne soit pas* μ*-négligeable.*

Démonstration. Pour lire la démonstration on pourra penser que f est une *vraie* fonction mesurable bornée (c'est à dire qu'on pourrait choisir un représentant de la classe, etc. . .). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{s \in \mathrm{X} : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ soit μ-négligeable, notons h la fonction définie par $h(s) = (f(s) - \lambda)^{-1}$ si $f(s) \neq \lambda$ et $h(s) = 0$ sinon. Alors pour μ-presque tout $s \in \mathrm{X}$ on a $|h(s)| \leq \varepsilon^{-1}$ et $h(s)(f(s) - \lambda) = 1$. On en déduit que $h \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X}, \mu)$ et

$$\mathrm{M}_h \, (\mathrm{M}_f - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)}) = (\mathrm{M}_f - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)}) \, \mathrm{M}_h = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)} \, .$$

Inversement supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon = \{s \in \mathrm{X} : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ soit tel que $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$; soit $\xi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ nulle hors de A_ε et telle que $\|\xi\|_2 = 1$ (par exemple un multiple convenable de la fonction indicatrice de l'ensemble A_ε) ; on voit alors que $|(\mathrm{M}_f - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)})(\xi)| \leq \varepsilon \, |\xi|$, donc $\|(\mathrm{M}_f - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)})(\xi)\| \leq \varepsilon$; il est clair que $\mathrm{M}_f - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)}$ n'est pas inversible (son inverse devrait avoir une norme $\geq \varepsilon^{-1}$, pour tout $\varepsilon > 0$).

■

Proposition 7.1.2. *Pour toute fraction rationnelle* $g \in \mathbb{C}(\mathrm{X})$ *sans pôles dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_f)$ *on a* $g(\mathrm{M}_f) = \mathrm{M}_{g(f)}$. *Si* M_f *est autoadjoint ou unitaire, pour toute fonction* $g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_f))$ *on a* $g(\mathrm{M}_f) = \mathrm{M}_{g \circ f}$.

Démonstration. L'application $g \to \mathrm{M}_{g(f)}$ est linéaire, et c'est aussi un homomorphisme d'anneaux, d'où la première assertion (par l'unicité dans la proposition 5.4.1) ; si M_f est autoadjoint ou unitaire, l'application $g \to \mathrm{M}_{g \circ f}$ est un morphisme d'anneaux linéaire et continu, d'où la deuxième assertion (par l'unicité dans le théorème 5.4.2).

■

7.2. Décomposition spectrale

Lemme 7.2.1. *Soient* H *un espace hilbertien,* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un élément autoadjoint ou unitaire et* $x \in H$ *un vecteur fixé ;*

(i) *il existe une mesure positive finie* μ_x *sur* Sp(T) *telle que, pour toute fonction continue* $f \in C(\mathrm{Sp}(T))$ *on ait* $\langle f(T)(x), x\rangle = \int_{\mathrm{Sp}(T)} f(t)\, d\mu_x(t)$ *;*

(ii) *notons* $v_x : C(\mathrm{Sp}(T)) \to H$ *l'application linéaire définie par* $v_x(f) = f(T)(x)$ *et* $w_x : C(\mathrm{Sp}(T)) \to L_2(\mathrm{Sp}(T), \mu_x)$ *l'application qui à une fonction continue associe sa classe dans* L_2*. Il existe une isométrie* $u_x : L_2(\mathrm{Sp}(T), \mu_x) \to H$ *telle que* $u_x \circ w_x = v_x$*. On a* $u(1_x) = x$ *où* 1_x *désigne la (classe de la) fonction constante* 1 *dans* $L_2(\mathrm{Sp}(T), \mu_x)$ *; de plus* $u_x M_{z_{\mathrm{Sp}(T)}} = T u_x$ *et* $u_x M_{\overline{z}_{\mathrm{Sp}(T)}} = T^* u_x$*.*

Démonstration. Posons $K = \mathrm{Sp}(T)$ pour simplifier l'écriture. Considérons la forme linéaire $\varphi : f \to \langle f(T)(x), x\rangle$ sur C(K). Si $f \in C(K)$ est positive, $f(T) = f(T)^*$ et $\mathrm{Sp}(f(T)) \subset [0, +\infty[$ (par le théorème 5.4.3), donc $f(T) \in \mathcal{L}(H)_+$; donc $\langle f(T)(x), x\rangle \geq 0$ (théorème 5.4.4). On en déduit que φ est une forme linéaire positive sur C(K) ; donc il existe une unique mesure positive μ_x sur K telle que, pour toute fonction $f \in C(K)$ on ait $\varphi(f) = \int_K f(t)\, d\mu_x(t)$. Passons au second point ; pour $f \in C(K)$ on a

$$\|v_x(f)\|^2 = \langle f(T)(x), f(T)(x)\rangle = \langle \overline{f}(T) f(T)(x), (x)\rangle = \int_K |f(t)|^2\, d\mu_x(t) = \|w_x(f)\|^2 ;$$

désignons par F le sous-espace $w_x(C(K))$ de $L_2(K, \mu_x)$; la relation précédente montre que si $g = w_x(f) \in F$, l'élément $v_x(f) \in H$ ne dépend que de g (si $w_x(f_1) = w_x(f_2)$, alors $\|v_x(f_1 - f_2)\| = \|w_x(f_1 - f_2)\| = 0$). On peut donc définir une application u_x de F dans H en posant $u_x(g) = v_x(f)$ pour f quelconque tel que $w_x(f) = g$; les équations précédentes montrent que u_x est isométrique de F dans H ; par ailleurs F est dense dans $L_2(K, \mu_x)$ (théorème général d'intégration), donc on peut prolonger u_x en application linéaire isométrique de $L_2(K, \mu_x)$ dans H, application que nous noterons encore u_x ; par construction, on a $v_x = u_x \circ w_x$. Notant $1 \in C(K)$ la fonction constante égale à 1, on a $u_x(1_x) = v_x(1) = 1(T)(x) = \mathrm{Id}_H(x) = x$. Enfin, pour tous $f, g \in C(K)$, on a

$$u_x(M_f(w_x(g))) = u_x(w_x(fg)) = v_x(fg) = f(T)g(T)(x) = f(T)v(g) = f(T)u_x(w_x(g)) ;$$

par densité de l'image de w_x, on en déduit que pour tout $f \in C(K)$ et tout vecteur $\xi \in L_2(K, \mu)$ on a $u_x(M_f(\xi)) = f(T)u_x(\xi)$; prenant $f = z_{\mathrm{Sp}(T)}$ et $f = \overline{z}_{\mathrm{Sp}(T)}$ on trouve le résultat annoncé.

■

Donnons une illustration du lemme précédent dans un cas simple. Supposons que T soit un opérateur autoadjoint compact sur H ; il existe alors une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ tendant vers 0 de valeurs propres de T ; supposons ces valeurs propres deux à deux distinctes et non nulles ; le spectre K de T est l'adhérence de l'ensemble des points de la suite (λ_n), c'est à dire que

$$K = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 0\}.$$

Par ailleurs, on peut trouver une base orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ de H formée de vecteurs propres de T, qui vérifient donc $T(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \geq 0$. Choisissons maintenant un vecteur $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n$ tel que $c_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour toute fonction f

continue sur K, l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est l'opérateur qui vérifie $f(\mathrm{T})(e_n) = f(\lambda_n)e_n$ pour tout $n \geq 0$; on a donc $f(\mathrm{T})(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)c_n e_n$, et

$$\langle f(\mathrm{T})(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)|c_n|^2 = \int_{\mathrm{K}} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda),$$

ce qui montre que la mesure μ_x est la mesure sur K donnée par $\mu_x = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 \delta_{\lambda_n}$. Décrivons l'isomorphisme u_x : chaque fonction $g \in \mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu_x)$ se réduit à la donnée de ses valeurs aux points λ_n, disons $g(\lambda_n) = d_n$, qui vérifient $\sum_{n=0}^{+\infty} |d_n|^2|c_n|^2 = \|g\|_2^2 < \infty$. L'opérateur u_x agit par $u_x(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n c_n e_n$. On voit que u_x est surjectif sous les hypothèses que nous avons faites ; mais ce n'est pas toujours le cas : nous aurions pu prendre bêtement un vecteur $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n$ tel que $c_{n_0} = 0$. Dans ce cas, le vecteur de base e_{n_0} ne serait pas dans l'image de u_x ; une difficulté plus subtile vient de la possible multiplicité des valeurs propres ; dans ce cas l'ensemble K des valeurs propres ne traduit pas cette multiplicité ; soit donc (λ_n) la suite des valeurs propres, répétées selon leur multiplicité éventuelle ; si on avait une valeur propre $\lambda \neq 0$ correspondant à un sous-espace propre E_λ de dimension deux exactement, disons $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \lambda$ avec $n_1 \neq n_2$, et si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n$ comme avant (c'est à dire $c_n \neq 0$ pour tout n), la mesure μ_x donnera la masse $\gamma_\lambda = |c_{n_1}|^2 + |c_{n_2}|^2$ au point $\lambda \in \mathrm{K}$; on devra écrire maintenant $\mu_x = \sum_{s \in \mathrm{K}} \gamma_s \delta_s$, avec

$$\gamma_s = \sum \{|c_n|^2 : n \ \text{ tel que } \ \lambda_n = s\}$$

pour tout $s \in \mathrm{K}$, et si g est une fonction sur K on aura

$$u_x(g) = \sum_s g(s) \Big(\sum_{n : \lambda_n = s} c_n e_n \Big).$$

La projection orthogonale de $u_x(g)$ sur $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(e_{n_1}, e_{n_2})$ sera donc toujours proportionnelle à $c_{n_1} e_{n_1} + c_{n_2} e_{n_2}$ et ne donnera jamais le vecteur $c_{n_2} e_{n_1} - c_{n_1} e_{n_2} \in \mathrm{E}_\lambda$ qui lui est orthogonal, donc u_x ne sera jamais surjective. Cette longue explication est censée éclairer ce qui se passe réellement dans le lemme 2 ci-dessous.

Théorème 7.2.1. *Soient* H *un espace hilbertien séparable et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un élément autoadjoint ou unitaire ; il existe un espace mesuré* (X, μ), *une fonction* $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$ *et un isomorphisme* $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ *tels que* $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\, u^*$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{H}$, on note μ_x la mesure sur Sp(T) telle que, pour $f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp(T)})$ on ait $\langle f(\mathrm{T})(x), x\rangle = \int_{\mathrm{Sp(T)}} f(t)\, d\mu_x(t)$ et $u_x : \mathrm{L}_2(\mathrm{Sp(T)}, \mu_x) \to \mathrm{H}$ l'isométrie décrite dans le lemme 1. Notons E_x l'image de u_x ; c'est un sous-espace fermé de H (puisque u_x est une isométrie). On aura besoin du lemme qui suit :

Lemme 7.2.2. *Si* $y \in \mathrm{E}_x^\perp$, *alors* $\mathrm{E}_y \subset \mathrm{E}_x^\perp$. *Il existe une partie* $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}$ *telle que les* E_x *pour* $x \in \mathrm{D}$ *soient deux à deux orthogonaux et que la somme des* E_x *pour* $x \in \mathrm{D}$ *soit dense. Tout vecteur* $z \in \mathrm{H}$ *admet donc une représentation unique* $z = \sum_{x \in \mathrm{D}} z_x$, *où chaque* $z_x \in \mathrm{E}_x$ *est la projection orthogonale de* z *sur* E_x.

Démonstration. Si $y \in \mathrm{E}_x^\perp$, alors pour tout $f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp(T)})$ et tout $\xi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{Sp(T)}, \mu_x)$, on a

$$\langle u_x(\xi), f(\mathrm{T})(y)\rangle = \langle \overline{f}(\mathrm{T}) u_x(\xi), y\rangle = \langle u_x(\mathrm{M}_{\overline{f}}(\xi)), y\rangle = 0.$$

Comme l'ensemble $\{f(\mathrm{T})(y) : f \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))\}$ est dense dans E_y on en déduit le premier point. Pour le second point, notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties D de $\mathrm{H} \setminus \{0\}$ telles que, pour tout $x, y \in \mathrm{D}$, les espaces E_x et E_y soient orthogonaux. Muni de l'ordre de l'inclusion, $\mathcal{D}$ est inductif : soit $\{\mathrm{D}_i : i \in \mathrm{I}\}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{D}$; si $x, y \in \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{D}_i$, tels que $x \neq y$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $x, y \in \mathrm{D}_i$ donc les espaces E_x et E_y sont orthogonaux ; il s'ensuit que $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{D}_i$ est un élément de $\mathcal{D}$ majorant l'ensemble $\{\mathrm{D}_i : i \in \mathrm{I}\}$.

Soit D un élément maximal de $\mathcal{D}$ et soit $y \in \mathrm{H}$ un vecteur orthogonal aux $(\mathrm{E}_x)_{x\in\mathrm{D}}$; comme $x \in \mathrm{E}_x$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a $y \notin \mathrm{D}$. Par le point (i), E_y est orthogonal aux espaces E_x, pour tout $x \in \mathrm{D}$. Si $y \neq 0$, alors $\mathrm{D} \cup \{y\} \in \mathcal{D}$, ce qui contredit la maximalité de D. On a montré que l'orthogonal de la somme des E_x, $x \in \mathrm{D}$ est réduit à $\{0\}$. Donc la somme des E_x pour $x \in \mathrm{D}$ est dense dans H. Soit $z \in \mathrm{H}$ et désignons par z_x la projection orthogonale de z sur le sous-espace fermé E_x, pour tout $x \in \mathrm{D}$. Pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{D}$, on vérifie que $\sum_{x\in\mathrm{J}} z_x$ est la projection orthogonale de z sur le sous-espace fermé $\sum_{x\in\mathrm{J}} \mathrm{E}_x$, donc $\sum_{x\in\mathrm{J}} \|z_x\|^2 \leq \|z\|^2$. Il en résulte que $\sum_{x\in\mathrm{D}} \|z_x\|^2 < +\infty$, donc la famille $\sum_{x\in\mathrm{D}} z_x$ est sommable. Sa somme y est telle que $z - y$ est orthogonal à chaque espace E_x, donc $z - y = 0$ puisque la somme des E_x est dense dans H.

■

Fin de la démonstration du théorème 1 : soit D comme dans le lemme 2 ; pour tout $y \in \mathrm{H}$, on a $y \in \mathrm{E}_y$ donc D est orthogonal ; comme H est séparable, D est (fini ou) dénombrable ; posons $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{X} = \mathrm{K} \times \mathrm{D}$. L'ensemble X est la réunion dénombrable des ensembles disjoints $\mathrm{X}_d = \mathrm{K} \times \{d\}$, qui sont des "copies" du compact K, indexées par $d \in \mathrm{D}$ (qui est au plus dénombrable). Considérons la tribu $\mathcal{A}$ de parties de X formées des ensembles $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ dont l'intersection A_d avec chaque sous-ensemble X_d, $d \in \mathrm{D}$, est un borélien du compact X_d ; l'ensemble A_d est de la forme $\mathrm{A}_d = \mathrm{B}_d \times \{d\}$, où B_d est un borélien de K. On définit alors une mesure μ (σ-finie) sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ en posant

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{y\in\mathrm{D}} \mu_y(\mathrm{B}_y)$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Si g est une fonction sur X, pour tout $y \in \mathrm{D}$ on note g_y la fonction $s \to g(s, y)$ sur K. On voit alors que si $g \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$, chaque fonction g_y, $y \in \mathrm{D}$ est dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu_y)$ et

$$\int_{\mathrm{X}} |g|^2 \, d\mu = \sum_{y\in\mathrm{D}} \int_{\mathrm{K}} |g_y(s)|^2 \, d\mu_y(s).$$

Pour chaque $y \in \mathrm{D}$ on a $\|u_y(g_y)\|^2 = \int_{\mathrm{K}} |g_y(s)|^2 \, d\mu_y(s)$ et les vecteurs $(u_y(g_y))$ sont deux à deux orthogonaux, donc $\sum_{y\in\mathrm{D}} u_y(g_y)$ converge dans H ; si on définit u de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ dans H en posant

$$u(g) = \sum_{y\in\mathrm{D}} u_y(g_y)$$

pour toute fonction g dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$, on aura

$$\|u(g)\|^2 = \sum_{y\in\mathrm{D}} \|u_y(g_y)\|^2 = \sum_{y\in\mathrm{D}} \int_{\mathrm{Sp}(\mathrm{T})} |g_y(s)|^2 \, d\mu_y(s) = \|g\|_2^2,$$

ce qui montre que u est isométrique de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ dans H.

Montrons que u est surjective. Si z est un vecteur de H, on peut écrire $z = \sum_{y\in\mathrm{D}} z_y$ avec $z_y \in \mathrm{E}_y$; pour chaque $y \in \mathrm{D}$ on peut trouver une fonction $g_y \in \mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu_y)$ telle que

$z_y = u_y(g_y)$; définissons une fonction mesurable g sur X en posant $g(s, y) = g_y(s)$ pour tout $(s, y) \in \mathrm{K} \times \mathrm{D}$. On vérifie que $g \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ et $u(g) = \sum_{y \in \mathrm{D}} u_y(g_y) = z$, donc u est surjective.

Désignons par F le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ formé de toutes les fonctions g telles que g_y soit continue sur K pour tout $y \in \mathrm{D}$. Notons $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ l'application $(s, y) \to s \in \mathrm{K} \subset \mathbb{C}$. Si $g \in \mathrm{F}$, on aura $(fg)_y = z_{\mathrm{K}} g_y$ pour tout $y \in \mathrm{D}$, donc également $(fg)_y(\mathrm{T}) = \mathrm{T} g_y(\mathrm{T})$. On en déduit :

$$u(\mathrm{M}_f(g)) = u(fg) = \sum_{y \in \mathrm{D}} (fg)_y(\mathrm{T})(y) = \mathrm{T}\, u(g)\,;$$

par densité de F, on en déduit que pour tout $\xi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ on a l'égalité $u(\mathrm{M}_f(\xi)) = \mathrm{T}u(\xi)$. Cela donne $u\mathrm{M}_f = \mathrm{T}u$, donc $\mathrm{T} = \mathrm{T}\, u\, u^* = u\, \mathrm{M}_f\, u^*$.

∎

Soient H un espace hilbertien séparable et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un élément autoadjoint ou unitaire ; écrivons $\mathrm{T} = u\, \mathrm{M}_f\, u^*$. L'application $g \to u\, \mathrm{M}_{g \circ f}\, u^*$ est un morphisme continu d'algèbres de $\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; par l'unicité dans le théorème 5.4.2, pour toute fonction continue $g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, on a $g(\mathrm{T}) = u\, \mathrm{M}_{g \circ f}\, u^*$.

Théorème 7.2.2. *Soient* H *un espace hilbertien séparable et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un élément autoadjoint ou unitaire ; notons* $\mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ *l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées sur* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. *Il existe un unique morphisme d'algèbres* $\Phi : \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *satisfaisant* $\Phi(1) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, $\Phi(z) = \mathrm{T}$ *et tel que pour toute suite bornée* $g_n \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ *convergeant simplement vers* $g \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ *la suite* $\Phi(g_n)$ *converge fortement vers* $\Phi(f)$. *Si* $g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ *on a* $\Phi(g) = g(\mathrm{T})$.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence ; soient (X, μ) un espace mesuré, f une fonction de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$ et soit $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ un isomorphisme tels que $\mathrm{T} = u\, \mathrm{M}_f\, u^*$ (théorème 1) ; notons $\Phi : \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ l'application $g \to u\, \mathrm{M}_{g \circ f}\, u^*$; l'application Φ est clairement un morphisme d'anneaux linéaire satisfaisant $\Phi(1) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$ et $\Phi(z) = \mathrm{T}$. Soit $g_n \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ une suite bornée par un réel $\mathrm{M} \geq 0$ et convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$; alors, pour tout $\xi \in \mathrm{H}$, la suite $(g_n \circ f)u^*(\xi)$ est une suite dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ dominée par $\mathrm{M}u^*(\xi)$ et convergeant partout vers $(g \circ f)u^*(\xi)$. Par le théorème de convergence dominée, la suite $(g_n \circ f)u^*(\xi)$ converge vers $(g \circ f)u^*(\xi)$ dans L_2, donc $\Phi(g_n)(\xi) = u(g_n \circ f)u^*(\xi)$ converge (en norme) vers $u(g \circ f)u^*(\xi) = \Phi(g)(\xi)$. Remarquons que si $g \in \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ on a $\Phi(g) = g(\mathrm{T})$.

Montrons l'unicité. Soient Φ_1 et Φ_2 deux applications vérifiant les conditions ci-dessus ; posons $\mathrm{A} = \{g \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) : \Phi_1(g) = \Phi_2(g)\}$. On doit montrer que l'ensemble A est égal à $\mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$. Par hypothèse, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ et pour toute suite bornée $g_n \in \mathrm{A}$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, on a $g \in \mathrm{A}$; de plus, par la proposition 5.4.1, A contient les fonctions rationnelles, donc toutes les fonctions continues, (car toute fonction continue sur le spectre est limite uniforme de fonctions rationnelles dans les deux cas autoadjoint ou unitaire). Toute fonction borélienne bornée est limite uniforme de fonctions boréliennes prenant un nombre fini de valeurs ; celles-ci sont combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de sous-ensembles boréliens. Il suffit donc de prouver que A contient toutes les fonctions caractéristiques. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des boréliens de $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ dont la fonction caractéristique est dans A. Comme A est un sous-anneau, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie ; comme A est stable par limite de suites bornées, $\mathcal{C}$ est stable par intersection dénombrable. De plus, si $g \in \mathrm{A}$, on a aussi $1 - g \in \mathrm{A}$, donc $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire. Donc $\mathcal{C}$ est une tribu. Pour savoir que $\mathcal{C}$ contient tous les boréliens, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ contient tous les fermés. Soit K un fermé non vide de Sp(T) ; notons $h_0 : \mathrm{Sp(T)} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in \mathrm{Sp(T)}$ associe sa distance à K. Posons $g = \sup(1 - h_0, 0)$ et $g_n = g^n$. Pour tout n on a $g_n \in \mathrm{C(Sp(T))} \subset \mathrm{A}$; de plus la suite g_n converge vers la fonction caractéristique de K. On a montré que $\mathrm{K} \in \mathcal{C}$.

∎

Soient H un espace hilbertien, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ autoadjoint ou unitaire et f une fonction borélienne sur Sp(T) ; l'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème 2 se note encore $f(\mathrm{T})$.

Remarque 7.2.1. On a démontré une espèce de théorème de représentation de Riesz : quand on a une application linéaire continue de C(K) dans $\mathbb{C}$, on en déduit une mesure μ sur K qui donne une application linéaire continue de $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$, l'espace des fonctions boréliennes bornées sur K, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a réalisé le même programme en partant de l'application linéaire continue $f \to f(\mathrm{T})$ de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$: l'extension opère de $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Remarque 7.2.2. Dans le cas d'un espace de Hilbert réel H, le théorème 2 s'applique encore aux opérateurs autoadjoints, mais il ne s'applique plus aux unitaires réels. On peut déduire le résultat réel autoadjoint en utilisant une complexification de l'espace H.

8. Décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint (non borné).

8.1. Opérateurs « non bornés »

Soient E et F deux espaces vectoriels ; un *opérateur* T de E dans F est donné par un sous-espace vectoriel dom(T) de E appelé *domaine* de T et une application linéaire T de dom(T) dans F. On appelle respectivement *noyau* et *image* d'un opérateur T le sous-espace $\ker(\mathrm{T}) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}(x) = 0\}$ de E et le sous-espace $\mathrm{im}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ de F.

Soit T un opérateur ; le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ égal à $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})\}$. La restriction à Gr(T) de la première projection est injective. Réciproquement, soit G un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ et supposons que la restriction de la première projection à G soit injective. Notons $p_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{E}$ et $p_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{F}$ les projections et définissons l'opérateur T en posant $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = p_1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{T}(p_1(x)) = p_2(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Il est clair que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) = \mathrm{G}$. Comme le noyau de la première projection de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ dans E est le sous-espace $\{0\}\times\mathrm{F}$ de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, la correspondance qui à un opérateur associe son graphe est une correspondance bijective entre opérateurs et sous-espaces G de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ tels que $\mathrm{G} \cap (\{0\} \times \mathrm{F}) = \{0\}$.

On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{S})$. On écrit alors $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$. Soient T un opérateur et D un sous-espace vectoriel de dom(T) ; on note $\mathrm{T}_{|\mathrm{D}}$ l'opérateur tel que $\mathrm{T}_{|\mathrm{D}} \subset \mathrm{T}$ et $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_{|\mathrm{D}}) = \mathrm{D}$.

Soient S et T deux opérateurs de E dans F ; on définit l'opérateur $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ en posant $\mathrm{dom}(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = \mathrm{dom}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et en posant $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x) = \mathrm{S}(x) + \mathrm{T}(x)$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{S} + \mathrm{T})$. Si R, S et T sont des opérateurs de E dans F, on a clairement $\mathrm{R} + \mathrm{S} = \mathrm{S} + \mathrm{R}$ et $(\mathrm{R} + \mathrm{S}) + \mathrm{T} = \mathrm{R} + (\mathrm{S} + \mathrm{T})$.

Soient E, F et G des espaces vectoriels, T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans G ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\mathrm{dom}(\mathrm{ST}) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}(x) \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}\}$ et en posant $(\mathrm{ST})(x) = \mathrm{S}(\mathrm{T}(x))$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{ST})$. Si R est un opérateur de G dans un quatrième espace vectoriel H, on a $(\mathrm{RS})\mathrm{T} = \mathrm{R}(\mathrm{ST})$. De plus, si T est un opérateur de E dans F et si R et S sont des opérateurs de F dans G, on a $(\mathrm{R} + \mathrm{S})\mathrm{T} = \mathrm{RT} + \mathrm{ST}$; cependant, si R et S sont des opérateurs de E dans F et T est un opérateur de F dans G, on a $\mathrm{TR} + \mathrm{TS} \subset \mathrm{T}(\mathrm{R} + \mathrm{S})$ sans avoir en général l'égalité.

Un opérateur T de E dans F est dit *injectif* si l'application $\mathrm{T} : \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \mathrm{F}$ est injective. Soit T un opérateur injectif de E dans F ; le sous-ensemble de $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ égal à $\{(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E} : (x, y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})\}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1} (de domaine im(T)) appelé *inverse* de T. Clairement T^{-1} est injectif et $(\mathrm{T}^{-1})^{-1} = \mathrm{T}$. Si $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{S} : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont injectifs, alors ST est injectif et $(\mathrm{ST})^{-1} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}^{-1}$.

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *densément défini* si son domaine est dense dans E.

Définition 8.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors Gr(S) contient Gr(T), donc son adhérence $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})} \cap (\{0\} \times \mathrm{F}) = \{(0,0)\}$. On en déduit immédiatement :

Proposition 8.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que* T *soit fermable il faut et il suffit que pour toute suite* (x_n) *de* dom(T) *qui converge vers* 0 *dans* E *et telle que* $\mathrm{T}(x_n)$ *converge dans* F *vers un vecteur* y*, on ait* $y = 0$.

■

Proposition 8.1.2. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermé de E dans F ; on a $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1}) = \rho(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$ où $\rho : \mathrm{E}\times\mathrm{F} \to \mathrm{F}\times\mathrm{E}$ est l'homéomorphisme $(x, y) \to (y, x)$, donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1})$ est fermé.

■

Si S est une application linéaire continue de E dans F, elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose dom(S) = E et $\mathrm{S}(x)$ aura le sens habituel pour tout $x \in \mathrm{E}$; si T est un opérateur de E dans F, le domaine de S + T sera égal à celui de T.

Proposition 8.1.3. *Soient* E, F *et* G *des espaces de Banach ;*

(i) *soient* $\mathrm{S} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire continue et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que* S+T *soit fermé il faut et il suffit que* T *le soit ; pour que* S+T *soit fermable il faut et il suffit que* T *le soit et, dans ce cas* $\overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}} = \mathrm{S} + \overline{\mathrm{T}}$ *;*

(ii) *soient* $\mathrm{S} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire continue et* T *un opérateur fermé (resp. fermable) de* F *dans* G *; l'opérateur* TS *est fermé (resp. fermable) ;*

(iii) *soient* S *un opérateur fermé (resp. fermable) de* E *dans* F *et* $\mathrm{T} : \mathrm{G} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire continue injective ; l'opérateur* $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ *est fermé (resp. fermable).*

Démonstration. Le graphe de S + T est $\{(x, y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F} : (x, y - \mathrm{S}(x)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})\}$; si T est fermé, cet ensemble est fermé. Si T est fermable, S + T admet l'extension $\mathrm{S} + \overline{\mathrm{T}}$ qui est fermée par ce qui précède ; il en résulte que S + T est fermable et $\overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}} \subset \mathrm{S} + \overline{\mathrm{T}}$.

Remplaçant T par T+S et S par −S on trouve que si T+S est fermé ou fermable il en va de même pour T et que, dans ce cas $\overline{\mathrm{T}} \subset \overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}} - \mathrm{S}$; donc $\mathrm{S}+\overline{\mathrm{T}} \subset \mathrm{S}+\overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}}-\mathrm{S} = \overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}}$.

Si T est fermé, le graphe de TS est $\{(x, y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{G} : (\mathrm{S}(x), y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})\}$, donc est fermé. Si T est fermable, alors TS admet l'extension fermée $\overline{\mathrm{T}}\mathrm{S}$.

Si S est fermé, le graphe de $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ est $\{(x, y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{G} : (x, \mathrm{T}(y)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{S})\}$, donc est fermé. Si S est fermable, alors $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ admet l'extension fermée $\mathrm{T}^{-1}\overline{\mathrm{S}}$.

■

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur de E dans F ; on appelle *topologie du graphe* associée à l'opérateur T, la topologie sur dom(T) induite par l'injection $x \to (x, \mathrm{T}(x))$ de dom(T) dans E × F. Cette topologie est plus fine que celle induite par E et fait de dom(T) un espace complet si T est fermé.

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermable de E dans F ; un sous-espace D du domaine de T est appelé un *domaine essentiel* pour T si les opérateurs T et $\mathrm{T}_{|\mathrm{D}}$ ont même fermeture. Cela revient à dire que D est dense dans dom(T) pour la topologie du graphe.

8.2. Spectre des opérateurs fermés

Définition 8.2.1. Soient T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une application linéaire bijective de dom(T) sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire continue $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ de E dans lui même. On appelle *spectre* de T le complémentaire Sp(T) dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

Si λ est une valeur régulière de T, alors $(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$ est continue, donc fermée ; donc $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est fermé, donc T est fermé. On en déduit que, si T n'est pas fermé, $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{C}$.

Soit T un opérateur fermé d'un espace de Banach E dans lui-même ; remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est fermé (par la proposition 1.3). Si $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est bijectif de dom(T) sur E, alors λ est une valeur régulière car $(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$ est fermé (proposition 1.2), donc continu par le théorème du graphe fermé (théorème 2.1.4).

Le spectre de T est réunion des trois ensembles disjoints suivants :

– le *spectre ponctuel* $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{T})$ de T est l'ensemble de ses valeurs propres ;

– le *spectre résiduel* $\mathrm{Sp}_r(\mathrm{T})$ de T formé des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne sont pas valeur propre de l'opérateur T et tels que l'image de $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ ne soit pas dense dans E ;

– le complémentaire $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$ dans Sp(T) de la réunion de ces deux ensembles appelé *spectre continu* de T.

Remarque 8.2.1. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$, l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est injectif d'image dense, mais $(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$ n'est pas continu.

Lemme 8.2.1. *Soient* T *un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach* E *dans lui même et* λ *une valeur régulière de* T *non nulle ; alors* λ^{-1} *est une valeur régulière de* T^{-1} *et on a*

$$\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1}) = -\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \lambda^2 \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}).$$

Démonstration. On a $\mathrm{T}^{-1} - \lambda^{-1} \, \mathrm{Id}_\mathrm{E} = -\lambda^{-1}(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E})\mathrm{T}^{-1}$, vu que ces deux opérateurs ont même domaine (l'image de T) et y coïncident. Il en résulte que $\mathrm{T}^{-1} - \lambda^{-1} \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est bijectif de $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1})$ sur E, et son application réciproque est $-\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$. Or on a $\mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) - \lambda \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$; on en déduit l'égalité $-\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E} - \lambda^2 \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$, dont il résulte que $-\lambda \mathrm{T} \, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est continu et le lemme.

∎

Proposition 8.2.1. (*i*) *Le spectre d'un opérateur fermé* T *d'un espace de Banach* E *dans lui même est une partie fermée de* $\mathbb{C}$.

(*ii*) *L'application* $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue et dérivable du complémentaire du spectre dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Démonstration. Montrons le premier point ; si $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{C}$, le spectre est bien fermé ; nous supposons donc maintenant $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \neq \mathbb{C}$; quitte à remplacer T par $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, on peut supposer que 0 est valeur régulière de T. Posons $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^{-1}$. Il résulte alors du lemme 1 que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{S})\}$ et comme Sp(S) est une partie compacte de $\mathbb{C}$, Sp(T) est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

Passons au point (*ii*). Par le lemme 1, on a $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1} \mathrm{S} \, \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{S})$ pour toute valeur régulière non nulle de T. Donc l'application $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus (\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \cup \{0\})$. Comme Sp(T) est fermé et que $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, il existe une valeur régulière non nulle λ_0 de T. Appliquant ce qui précède à $\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{Id_E}$ on en déduit que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus (\mathrm{Sp(T)} \cup \{\lambda_0\})$, ce qui couvre le cas qui manquait (au voisinage de 0).

■

Pour toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$, on peut construire un opérateur T d'un espace hilbertien H dont le spectre Sp(T) soit égal à F :

a. Supposons $\mathrm{F} \neq \emptyset$; soit (λ_n) une suite dense dans F ; considérons l'opérateur T sur ℓ^2 dont le domaine est l'ensemble des $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ tels que $(\lambda_n x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, et tel que, pour $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{dom(T)}$, on ait $\mathrm{T}((x_n)_{n\geq 0}) = (\lambda_n x_n)_{n\geq 0}$. On vérifie sans peine que T est densément défini et fermé, que tout $\lambda \notin \mathrm{F}$ est valeur régulière de T et que les λ_n sont des valeurs propres de T : donc $\mathrm{Sp(T)} = \mathrm{F}$ (c'est en fait le cas particulier $\mathrm{X} = \mathbb{N}$ de l'exemple 4.1 ci-dessous).

b. Considérons l'opérateur V de l'exemple 5.2.1. Comme $0 \in \mathrm{Sp}_c(\mathrm{V})$, V est injectif d'image dense. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$. Comme $\mathrm{V} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, on sait que $0 \notin \mathrm{Sp(T)}$; en appliquant le lemme 1, on voit que $\mathrm{Sp(T)} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda^{-1} \in \mathrm{Sp(V)}\} = \emptyset$, vu que $\mathrm{Sp(V)} = \{0\}$.

8.3. Adjoints

Soient E et F deux espaces hilbertiens et T un opérateur densément défini de E dans F ; on définit *l'adjoint* de T qui est un opérateur T^* de F dans E en posant

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*) = \{(y,x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E} : \forall z \in \mathrm{dom(T)},\ \langle x, z\rangle = \langle y, \mathrm{T}(z)\rangle\}.$$

Un opérateur T de E dans lui même est dit *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$.

Proposition 8.3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* T *un opérateur densément défini de* E *dans* F *; alors* T^* *est fermé. Pour que* T *soit fermable, il faut et il suffit que* T^* *soit densément défini. Dans ce cas, on a* $\overline{\mathrm{T}} = (\mathrm{T}^*)^*$.

Démonstration. Soit $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{F} \oplus \mathrm{E}, \mathrm{E} \oplus \mathrm{F})$ l'opérateur unitaire qui à $(y,x) \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{E}$ associe $(x,-y)$; le graphe $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ de T^* est l'orthogonal dans l'espace hilbertien $\mathrm{F} \oplus \mathrm{E}$ de $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr(T)})$. Donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ est fermé.

Si T^* est densément défini, alors $\mathrm{T} \subset (\mathrm{T}^*)^*$ donc T est fermable. Dans ce cas, $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr(T)}} = \mathrm{Gr(T)}^{\perp\perp} = \mathrm{Gr}((\mathrm{T}^*)^*)$. Soient $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)^\perp$ et $(x,z) \in \mathrm{Gr(T)}^\perp$; alors $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ donc $\langle 0,x\rangle + \langle y,z\rangle = 0$, donc $(0,y) \in \mathrm{Gr(T)}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Gr(T)}}$. Si T est fermable, $y = 0$, donc $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ est dense.

■

Proposition 8.3.2. *Soit* T *un opérateur densément défini d'un espace hilbertien* E *dans un espace hilbertien* F *; alors* $\ker(\mathrm{T}^*) = \mathrm{im(T)}^\perp$.

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{F}$; on a $y \in \ker(\mathrm{T}^*)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{dom(T)}$, on a $\langle 0,x\rangle = \langle y, \mathrm{T}(x)\rangle$; cela a lieu si et seulement si $y \in \mathrm{im(T)}^\perp$.

■

Proposition 8.3.3. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* T *un opérateur densément défini, fermé de* E *dans* F *;*

(*i*) *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *on a* $(\mathrm{S}+\mathrm{T})^* = \mathrm{S}^* + \mathrm{T}^*$ *;*

(*ii*) *si* R *est une extension de* T, *alors* $\mathrm{R}^* \subset \mathrm{T}^*$ *;*

(*iii*) *si* T *est injectif et d'image dense, alors* $(\mathrm{T}^{-1})^* = (\mathrm{T}^*)^{-1}$.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$, on a

$$\langle (\mathrm{S}+\mathrm{T})(x), y\rangle = \langle \mathrm{S}(x), y\rangle + \langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, (\mathrm{S}^*+\mathrm{T}^*)(y)\rangle,$$

donc $\mathrm{S}^*+\mathrm{T}^* \subset (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*$. Pour $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}+\mathrm{T})^*$, on a

$$\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle (\mathrm{S}+\mathrm{T})(x), y\rangle - \langle \mathrm{S}(x), y\rangle = \langle x, (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*(y)\rangle - \langle x, \mathrm{S}^*(y)\rangle,$$

donc $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ et $\mathrm{T}^*(y) = (\mathrm{S}+\mathrm{T})^*(y) - \mathrm{S}^*(y)$, donc $(\mathrm{S}+\mathrm{T})^* = \mathrm{S}^*+\mathrm{T}^*$, ce qui termine le point (i). Si $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{R})$, alors $\mathrm{Gr}(\mathrm{R})^\perp \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$, d'où le deuxième point (ii). Enfin, pour $(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F}$ on a $(x,y) \in \mathrm{Gr}((\mathrm{T}^{-1})^*)$ si et seulement si $(y,-x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1})^\perp$, ce qui équivaut à $(-x,y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$ ou encore à $(y,x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$.

■

Proposition 8.3.4. *Soient* E *et* F *deux espaces hilbertiens et* T *un opérateur fermé densément défini de* E *dans* F *; l'opérateur* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ *est bijectif et* $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ *est un élément positif de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *L'opérateur* $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ *est autoadjoint et son spectre est contenu dans* $[0,+\infty[$.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E}$; comme $\mathrm{U}_0(\mathrm{G}(\mathrm{T}^*))$ est l'orthogonal de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, il existe deux vecteurs $\xi \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ et $\eta \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ tels que $(x,0) = \xi + \mathrm{U}_0(\eta)$; en d'autres termes, il existe $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ tels que $(x,0) = (z,\mathrm{T}(z)) + (\mathrm{T}^*(y),-y)$. Alors $y = \mathrm{T}(z)$ donc $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) = \mathrm{dom}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ et $x = (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)$. Donc $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ est surjectif. Soit $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})$; comme $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(z) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$, on a

$$\langle \mathrm{T}^*(\mathrm{T}(z)), z\rangle = \langle \mathrm{T}(z), \mathrm{T}(z)\rangle.$$

On a $\langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle = \langle z + \mathrm{T}^*\mathrm{T}(z), z\rangle = \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2$. Alors

$$\|z\|^2 \le \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2 = \langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle \le \|z\|\,\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)\|\,;$$

donc $\|z\| \le \|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z)\|$, il en résulte que $\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est injectif, que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est continue et que $\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}\| \le 1$. Enfin, posons $z = (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$; on a

$$\langle x, (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}(x)\rangle = \langle (\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})(z), z\rangle = \|z\|^2 + \|\mathrm{T}(z)\|^2 \ge 0.$$

Donc $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est un élément positif de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Comme $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est injectif et autoadjoint, son image est dense (d'après la proposition 4.4.3). Par la proposition 3, l'opérateur $\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint, donc $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint. Comme l'opérateur $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est positif de norme ≤ 1, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1} \subset [0,1]$; il en résulte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}+\mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [1,+\infty[$ (par le lemme 2.1) et $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [0,+\infty[$.

■

8.4. Décomposition spectrale

Exemple 8.4.1. Soit (X,μ) un espace mesuré et soit $\mathrm{L}_0(\mathrm{X},\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables complexes pour la relation d'égalité μ-presque partout ; si $f,g \in \mathrm{L}_0(\mathrm{X},\mu)$, on voit facilement que la classe de $\widetilde{f}\widetilde{g}$ ne dépend pas des représentants $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ des deux classes, ce qui permet de parler du produit ponctuel de deux classes. On peut alors définir un opérateur M_f dont le domaine est l'ensemble des $\xi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$ telles que $f\xi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$ et tel que $\mathrm{M}_f(\xi) = f\xi$ pour tout $\xi \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)$.

Pour tout $\xi \in L^2(X, \mu)$ et tout $n > 0$, la fonction $\xi_n = (n + |f|)^{-1} n\xi$ est dans le domaine de M_f ; de plus la suite (ξ_n) converge partout vers ξ et est dominée par $|\xi|$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que le domaine de M_f est dense dans L_2. Soient $\xi, \eta \in L_2(X, \mu)$ tels que $f\xi \in L^2(X, \mu)$ et $\overline{f}\eta \in L^2(X, \mu)$; on a

$$\langle f\xi, \eta\rangle = \int f(t)\xi(t)\overline{\eta(t)}\, d\mu(t) = \langle \xi, \overline{f}\eta\rangle.$$

On en déduit que $M_{\overline{f}} \subset M_f^*$. Enfin, soient $\xi, \eta \in L^2(X, \mu)$; posons $\xi_1 = (\xi + \overline{f}\eta)(1 + |f|^2)^{-1}$ et $\eta_1 = (\eta - f\xi)(1 + |f|^2)^{-1}$; clairement $f\xi_1 \in L^2(X, \mu)$, $\overline{f}\eta_1 \in L^2(X, \mu)$ et $(\xi, \eta) = (\xi_1, f\xi_1) + (-\overline{f}\eta_1, \eta_1)$. On en déduit que $L_2(X, \mu) \times L_2(X, \mu) = \mathrm{Gr}(M_f) + \{(-z, y) : (y, z) \in \mathrm{Gr}(M_{\overline{f}})\}$. Comme $\{(-z, y)\,,\ (y, z) \in \mathrm{Gr}(M_{\overline{f}})\} \subset \mathrm{Gr}(M_f)^\perp$, on en déduit que M_f et $M_{\overline{f}}$ sont fermés et adjoint l'un de l'autre.

Posons $g = (1 + |f|)^{-1}$. Remarquons que $M_g \in \mathcal{L}(L_2(X, \mu))$ est injective, que le domaine de M_f est l'image de M_g et que $M_f M_g = M_{fg}$. On en déduit que $M_f - \lambda\, \mathrm{Id}_{L_2(X,\mu)}$ et $M_{fg-\lambda g}$ ont même image. Le noyau de M_f est l'ensemble des fonctions $\xi \in L^2(X, \mu)$ telles que $f\xi$ soit μ-négligeable. Il coïncide avec celui de M_{fg}. Par la proposition 7.1.1, le spectre de M_f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s \in X : |f(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable.

Remarquons que M_f est injectif si et seulement si l'ensemble $\{s \in X : f(s) = 0\}$ est μ-négligeable ; dans ce cas $\mathrm{im}(M_f)$ est dense et $M_f^{-1} = M_{f^{-1}}$.

Théorème 8.4.1. *Soient* H *un espace hilbertien séparable et* T *un opérateur densément défini autoadjoint de* H *dans* H *;*

(i) le spectre de T *est réel :* $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathbb{R}$ *;*

(ii) l'opérateur $U = (T - i\,\mathrm{Id}_H)(T + i\,\mathrm{Id}_H)^{-1}$ *est un élément unitaire de* $\mathcal{L}(H)$ *;*

(iii) il existe un espace mesuré (X, μ)*, une fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *mesurable et un isomorphisme* $u : L_2(X, \mu) \to H$ *d'espaces hilbertiens tels que* $T = u\, M_f\, u^*$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; notons b sa partie imaginaire. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(T)$, on a $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle$ donc $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$; la partie imaginaire de $\langle (T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)(x), x\rangle$ est donc $-b\|x\|^2$. On en déduit que

$$|b|\,\|x\|^2 \le |\langle (T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)(x), x\rangle| \le \|(T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)(x)\|\,\|x\|,$$

donc $\|(T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)(x)\| \ge |b|\,\|x\|$. On voit que pour tout $(x, y) \in \mathrm{Gr}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)$, on a $\|y\| \ge |b|\,\|x\|$, donc $(1+|b|^2)\|y\|^2 \ge |b|^2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. Par la proposition 5.3.1, l'application $(x, y) \to y$ de $\mathrm{Gr}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)$ dans H est injective d'image fermée ; donc $T - \lambda\,\mathrm{Id}_H$ est injective d'image fermée. Comme $(T - \lambda\,\mathrm{Id}_H)^* = T - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_H$ (proposition 3.3) est aussi injective, on en déduit que l'image de $T - \lambda\,\mathrm{Id}_H$ est dense (par la proposition 3.2), d'où le premier point.

Remarquons que l'image de $(T+i\,\mathrm{Id}_H)^{-1}$ est le domaine de $T-i\,\mathrm{Id}_H$, ce qui implique que $U = (T-i\,\mathrm{Id}_H)(T+i\,\mathrm{Id}_H)^{-1}$ est partout défini et bijectif (par (*i*)). Pour $x \in \mathrm{dom}(T)$, on a

$$\begin{aligned}\|(T - i\,\mathrm{Id}_H)(x)\|^2 &= \|T(x)\|^2 + \|x\|^2 - i\langle x, T(x)\rangle + i\langle T(x), x\rangle = \\ &= \|T(x)\|^2 + \|x\|^2 = \|(T + i\,\mathrm{Id}_H)(x)\|^2.\end{aligned}$$

Soit $y \in H$, posons $x = (T + i\,\mathrm{Id}_H)^{-1}(y)$; on a $\|U(y)\| = \|(T - i\,\mathrm{Id}_H)(x)\|$ et aussi $\|U(y)\| = \|(T + i\,\mathrm{Id}_H)(x)\| = \|y\|$, donc U est isométrique, d'où (*ii*).

Passons au dernier point. Soit $y \in \mathrm{H}$, posons $x = (\mathrm{T} + i\,\mathrm{Id_H})^{-1}(y)$; on écrit $\mathrm{U}(y) = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H})(x) = (\mathrm{T} + i\,\mathrm{Id_H})(x) - 2ix = y - 2ix$; donc $x = i/2(\mathrm{U}(y) - y)$; on a donc $(\mathrm{T} + i\,\mathrm{Id_H})^{-1} = i/2(\mathrm{U} - \mathrm{Id_H})$, donc $\mathrm{T} = 2/i(\mathrm{U} - \mathrm{Id_H})^{-1} - i\,\mathrm{Id_H}$. Par le théorème 7.2.1, il existe un espace mesuré (X, μ), une fonction $g : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ mesurable de module 1 et un isomorphisme $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ d'espaces hilbertiens tels que $\mathrm{U} = u\,\mathrm{M}_g\,u^*$. L'application $\mathrm{U} - \mathrm{Id_H}$ est injective, donc M_{g-1} est injective, d'où l'on déduit que $\{t \in \mathrm{X} : g(t) = 1\}$ est μ-négligeable. L'inverse de $\mathrm{U} - \mathrm{Id_H}$ est donc $(u\mathrm{M}_{g-1}u^*)^{-1} = (u^*)^{-1}\mathrm{M}_{(g-1)^{-1}}u^{-1} = u\,\mathrm{M}_{(g-1)^{-1}}\,u^*$, donc $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$ où on a posé $f = 2/i(g-1)^{-1} - i = -i(g+1)(g-1)^{-1}$. ∎

Soient H un espace hilbertien et T un opérateur densément défini autoadjoint de H dans H ; on peut, comme dans le cas borné, définir un calcul fonctionnel borélien pour T : écrivons $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$. Si g est une fonction borélienne bornée sur $\mathrm{Sp(T)}$, on pose $g(\mathrm{T}) = u\,\mathrm{M}_{g\circ f}\,u^*$. Si l'unitaire $\mathrm{U} = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H})(\mathrm{T} + i\,\mathrm{Id_H})^{-1}$ s'écrit $u\,\mathrm{M}_h\,u^*$, on a $f = \varphi \circ h$, où $\varphi : t \to -i(t+1)(t-1)^{-1}$; pour toute fonction borélienne bornée g sur $\mathbb{R}$ on a donc

$$g(\mathrm{T}) = u\,\mathrm{M}_{g\circ f}\,u^* = u\,\mathrm{M}_{g\circ\varphi\circ h}\,u^* = g \circ \varphi(\mathrm{U}).$$

On en déduit que $g(\mathrm{T})$ ne dépend pas de l'écriture $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$.

8.5. Le théorème de Stone

Soit H un espace hilbertien ; on appelle *groupe à un paramètre d'unitaires* une famille $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ telle que :

(i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $v_{s+t} = v_s v_t$;

(ii) pour tout $x \in \mathrm{H}$ l'application $t \to v_t(x)$ est continue.

Lemme 8.5.1. *Soient* H *un espace hilbertien,* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'unitaires,* D *un sous-ensemble dense de* H *tel que pour tout* $z \in \mathrm{D}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *on ait* $v_t(z) \in \mathrm{D}$ *; soient* $x, y \in \mathrm{H}$ *tels que, pour tout* $z \in \mathrm{D}$*, l'application* $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ *soit dérivable en* 0 *de dérivée* $i\langle y, z\rangle$ *; alors* $t \to v_t(x)$ *est continument dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* H *et sa dérivée en* t *est* $iv_t(y)$.

Démonstration. L'application $t \to v_t(y)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans H. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $x_t = x + \int_0^t iv_s(y)\,ds$. L'application $t \to x_t$ est continument dérivable et sa dérivée en t est $iv_t(y)$. Soit $z \in \mathrm{D}$; posons $\varphi(t) = \langle x_t, z\rangle$ et $\psi(t) = \langle v_t(x), z\rangle$. La fonction φ est continument dérivable et sa dérivée en t est $\langle iv_t(y), z\rangle$. Soient $t, s \in \mathbb{R}$; on a $\psi(t + s) = \langle v_t v_s(x), v_t v_{-t}(z)\rangle = \langle v_s(x), v_{-t}(z)\rangle$; par hypothèse, cette fonction de s est dérivable en 0 et sa dérivée est $i\langle y, v_{-t}(z)\rangle = i\langle v_t(y), z\rangle$. On a montré que ψ est dérivable en t et $\psi' = \varphi'$. Comme $\varphi(0) = \psi(0)$, on trouve $\varphi = \psi$; donc, pour tout $z \in \mathrm{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle (x_t - v_t(x)), z\rangle = 0$. Alors $x_t - v_t(x) \in \mathrm{D}^\perp$; donc $v_t(x) = x_t$, d'où le résultat. ∎

Théorème 8.5.1. Théorème de Stone. *Soit* H *un espace hilbertien séparable ;*

(i) *soit* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires. Il existe un opérateur autoadjoint* T *sur* H *dont le graphe est l'ensemble des couples* $(x, y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ *tels que la fonction* $t \to v_t(x)$ *soit dérivable en* 0 *de dérivée* iy*. Pour* $x \in \mathrm{dom(T)}$ *et* t *réel, on a* $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$ *et* $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$.

On dit que T *est le générateur infinitésimal de* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *;*

(*ii*) *tout opérateur autoadjoint* T *est le générateur infinitésimal d'un unique groupe à un paramètre d'unitaires* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Démonstration. Montrons que le domaine de T est dense. Soient $x \in \mathrm{H}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 à support compact ; posons $x_f = \int f(t)v_t(x)\,dt$. On a

$$v_t(x_f) = \int f(s)v_tv_s(x)\,ds = \int f(s-t)v_t(x)\,ds.$$

Donc $(v_t(x_f)-x_f)/t = \int t^{-1}[f(s-t)-f(s)]v_s(x)\,ds$. Quand t tend vers 0, $(v_t(x_f)-x_f)/t$ tend vers $-\int f'(s)v_s(x)\,ds$. On en déduit que $x_f \in \mathrm{dom(T)}$. Soit f_n une suite de fonctions positives de classe C^1 telles que $\int f_n(t)\,dt = 1$ et telles que f_n soit nulle en dehors de $]-1/n, 1/n[$; posons $y_n = \int f_n(t)v_t(x)\,dt$; on a $y_n \in \mathrm{dom(T)}$ et $\lim y_n = x$. Donc dom(T) est dense.

Si $x \in \mathrm{dom(T)}$, pour tout $z \in \mathrm{H}$ la fonction $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ est dérivable en 0. Par le lemme 1, $t \to v_t(x)$ est de classe C^1. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $s \to v_s(v_t(x))$ est dérivable en 0 ; donc $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$.

Soient $x, y \in \mathrm{dom(T)}$; on a $\langle v_t(x), y\rangle = \langle x, v_{-t}(y)\rangle = \overline{\langle v_{-t}(y), x\rangle}$. La dérivée en 0 de $t \to \langle v_{-t}(y), x\rangle$ est $-i\langle \mathrm{T}(y), x\rangle$. On a donc $i\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \overline{-i\langle \mathrm{T}(y), x\rangle} = i\langle x, \mathrm{T}(y)\rangle$. On en déduit que $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$.

Enfin, soit $x \in \mathrm{dom(T^*)}$; pour tout $z \in \mathrm{dom(T)}$, on a $\langle v_t(x), z\rangle = \langle x, v_{-t}(z)\rangle$; donc $t \to \langle v_t(x), z\rangle$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $i\langle x, \mathrm{T}(z)\rangle = i\langle \mathrm{T}^*(x), z\rangle$. Par le lemme 1, $x \in \mathrm{dom(T)}$ et $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}^*(x)$.

Passons au deuxième point. Soient (X, μ) un espace mesuré, $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $u : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{H}$ un isomorphisme d'espaces hilbertiens tels que l'on ait $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^*$ (théorème 4.1) ; pour $t \in \mathbb{R}$, notons $g_t : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ l'application $\exp(itf)$; posons $v_t = u\,\mathrm{M}_{g_t}\,u^*$. Comme $|g_t| = 1$, M_{g_t} est unitaire, donc v_t est unitaire ; comme $g_sg_t = g_{s+t}$, on a $v_sv_t = v_{s+t}$. Si $t_n \to t$, pour tout $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ la suite de fonctions $g_{t_n}\xi$ converge partout vers $g_t\xi$, son module est constant égal à $|\xi|$; par le théorème de convergence dominée, $g_{t_n}\xi$ converge vers $g_t\xi$ dans L_2. Il en résulte que $t \to v_t$ est fortement continu ; c'est donc un groupe à un paramètre d'unitaires. Notons S son générateur infinitésimal. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $|g_t - 1| \le |tf|$; si $\xi \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_f)$, pour toute suite (t_n) tendant vers 0, la suite de fonctions $t_n^{-1}(g_{t_n}\xi - \xi)$ converge partout vers $if\xi$, son module est majoré par $|f\xi|$; par le théorème de convergence dominée, $t_n^{-1}(g_{t_n}\xi - \xi)$ converge vers $if\xi$ dans L_2. Donc $t \to g_t\xi$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $if\xi$. On en déduit que $u\xi \in \mathrm{dom(S)}$ et $i\mathrm{S}(u\xi) = u(if\xi)$. On a montré que $\mathrm{T} = u\,\mathrm{M}_f\,u^* \subset \mathrm{S}$. On en déduit que $\mathrm{S} = \mathrm{S}^* \subset \mathrm{T}^* = \mathrm{T}$. Donc $\mathrm{T} = \mathrm{S}$.

Enfin, soit $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux groupes à un paramètre d'unitaires ayant même générateur infinitésimal T ; pour $x \in \mathrm{dom(T)}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$, $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$, et $w_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$, $\mathrm{T}(w_t(x)) = w_t(\mathrm{T}(x))$. Posons $\varphi(t) = \|v_t(x) - w_t(x)\|^2$ pour tout t réel ; on a

$$\varphi(t) = \|v_t(x)\|^2 + \|w_t(x)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle v_t(x), w_t(x)\rangle = 2(\|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle v_t(x), w_t(x)\rangle)\,;$$

La fonction φ est alors dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et l'on a $\varphi'(t) = -2\,\mathrm{Re}(\langle v_t(x), i\mathrm{T}(w_t(x))\rangle + \langle i\mathrm{T}(v_t(x)), w_t(x)\rangle)$. Comme $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$, on a $\langle \mathrm{T}(v_t(x)), w_t(x)\rangle = \langle v_t(x), \mathrm{T}(w_t(x))\rangle$, donc $\varphi' = 0$. Comme $\varphi(0) = 0$, on trouve $\varphi(t) = 0$. Donc $v_t(x) = w_t(x)$. Comme dom(T) est dense, on en déduit $v_t = w_t$.

∎

On a en fait montré que, si T est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'unitaires $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$, alors $v_t = \exp(it\mathrm{T})$.

Index

Index des notations