

Théorème 5.4.2. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes $\varphi_T : C(\text{Sp}(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi_T(z_{\text{Sp}(T)}) = T$. On notera $f(T) = \varphi_T(f)$.

De plus, φ_T est isométrique, $(f(T))^* = \overline{f}(T)$ et $f(T)$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T (donc $f(T)$ est normal). On a

$$\text{Sp}(f(T)) = \text{Sp}(f) = f(\text{Sp}(T)).$$

Démonstration. On a vu que $K = \text{Sp}(T)$ est contenu dans \mathbb{R} , et surtout que $\|P(T)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P\|_{C(K)}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Aussi, l'algèbre A des fonctions sur K de la forme $s \in K \rightarrow P(s)$, pour P variant dans $\mathbb{C}[X]$, est dense dans $C(K)$ par Stone-Weierstrass : en effet,

- A contient les fonctions constantes.
- A sépare les points de K ; il suffit de prendre la fonction $z_K : s \in K \rightarrow s$ qui provient du polynôme X .
- A est stable par conjugaison ; cela provient du fait que $K \subset \mathbb{R}$; la fonction conjuguée de $s \in K \rightarrow P(s)$ est donnée par la fonction polynomiale $s \rightarrow \overline{P}(s)$.

Supposons que (P_n) soit une suite de polynômes qui converge uniformément sur K vers une fonction f ; la suite (P_n) est de Cauchy dans $C(K)$, donc $(P_n(T))$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(H)$ d'après le caractère isométrique de $P \rightarrow P(T)$; la suite $(P_n(T))$ converge donc en norme vers un opérateur S ; il faut voir que la limite est indépendante de la suite de polynômes : si (Q_n) converge uniformément vers f , on aura $\|P_n - Q_n\|_{C(K)} \rightarrow 0$, donc $P_n(T) - Q_n(T)$ tend vers 0, donc $(Q_n(T))$ tend vers S qu'il devient légitime d'appeler $f(T) = \varphi_T(f)$.

On pourra retenir que : pour toute suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément sur K vers la fonction f , la suite $(P_n(T))$ tend en norme dans $\mathcal{L}(H)$ vers $f(T)$.

Il en résulte par continuité de la norme que

$$\|f(T)\| = \lim_n \|P_n(T)\| = \lim_n \|P_n\|_{C(K)} = \|f\|_{C(K)},$$

ce qui montre que l'application $\varphi_T : f \in C(K) \rightarrow f(T) \in \mathcal{L}(H)$ est isométrique.

Si (P_n) converge uniformément vers f sur K et (Q_n) converge uniformément vers g sur K , alors $f(T)g(T) = \lim(P_n Q_n)(T) = (fg)(T)$ (utiliser la continuité du produit par rapport au couple de variables, ou bien procéder en deux temps : $(fQ_n)(T) = f(T)Q_n(T)$ par une première limite, puis $(fg)(T) = \lim f(T)Q_n(T) = f(T)g(T)$), donc φ_T est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes, isométrique. Il en résulte que $\text{Sp } f(T) = f(K)$, d'après un principe général sur $C(K)$ qui a été démontré précédemment.

Si $ST = TS$, on en déduit que $SP_n(T) = P_n(T)S$ pour tout n , donc $Sf(T) = f(T)S$ par continuité du produit par S , à droite et à gauche.

L'adjoint $(f(T))^*$ est la limite de $(P_n(T))^* = \tilde{P}_n(T)$; mais puisque $K \subset \mathbb{R}$, la fonction $s \in K \rightarrow \sum_j \bar{c}_j s^j$ est bien la complexe conjuguée de la fonction polynomiale P_n , donc \tilde{P}_n tend uniformément sur K vers la fonction \overline{f} , donc $\overline{f}(T) = (f(T))^*$; il en résulte que $f(T)^* f(T) = (\overline{f}f)(T) = (f\overline{f})(T) = f(T)f(T)^*$ donc $f(T)$ est normal.

On termine avec l'unicité (ce point a été oublié à l'amphi). Si φ est un homomorphisme d'algèbres unitaires tel que $\varphi(z_K) = T$, on aura $\varphi(P) = P(T)$ pour toute fonction polynomiale P ; l'ensemble des $f \in C(K)$ telles que $\varphi(f) = \varphi_T(f)$ est fermé par continuité, et contient le sous-ensemble dense A , donc il est égal à $C(K)$.

Compléments sur les hermitiens

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et soit T un endomorphisme de H .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\langle T(x), x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$, alors T est hermitien.

En effet, en décomposant le nombre supposé réel $\langle T(x+y), x+y \rangle$ on voit que $\langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle$ est réel ce qui indique que $\langle T(x), y \rangle$ et $\langle x, T(y) \rangle$ ont la même partie imaginaire; en appliquant à ix on conclut que les deux nombres sont égaux, pour tous $x, y \in H$, donc T est hermitien.

Soit p un projecteur continu sur H ($p^2 = p$); alors p est hermitien si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

Soit $F = p(H)$; ce sous-espace est fermé car il est le noyau de $\text{Id}_H - p$; pour tout $y \in F$ on a si p est hermitien :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

ce qui montre que $x - p(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs y de F , donc $p = P_F$. Réciproquement, on a

$$\langle P_F(x), y \rangle = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle = \langle x, P_F(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in H$.

Si T est hermitien, son noyau est l'orthogonal de l'adhérence de l'image. On a donc $H = \ker(T) \oplus \overline{\text{im}(T)}$.

Dire que $T(x) = 0$ équivaut à dire que $\langle T(x), y \rangle = 0$ pour tout y , c'est à dire que $\langle x, T(y) \rangle = 0$ pour tout y ; ceci signifie que x est dans le noyau de T si et seulement si x est orthogonal à l'image de T . Pour finir, l'orthogonal de l'image est égal à l'orthogonal de l'adhérence de l'image (continuité du produit scalaire).

Si T est hermitien et s'il existe $c > 0$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout x , alors T est inversible. Il en résulte que toute valeur du spectre est une valeur propre approchée.

En effet, l'hypothèse entraîne que le noyau est réduit à 0, donc l'image est dense; mais on a vu que l'hypothèse entraîne aussi que l'image est fermée, donc égale à H ; on a alors T bijectif, et on a même une majoration de la norme de l'inverse par c^{-1} .

Si λ est une valeur spectrale de T , λ est réel, l'opérateur $T - \lambda \text{Id}_H$ est hermitien et n'est pas inversible, donc il existe une suite $(x_n) \subset H$ telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et $T(x_n) - \lambda x_n \rightarrow 0$; il en résulte que

$$\lambda = \lim_n \langle \lambda x_n, x_n \rangle = \lim_n \langle T(x_n), x_n \rangle.$$

On dit que T est hermitien positif si T est hermitien et si $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Dans le cas complexe, il suffit de dire que $\langle T(x), x \rangle$ est réel et positif pour tout $x \in H$ (l'opérateur sera automatiquement hermitien d'après l'un des points précédents; dans le cas réel on peut avoir $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$ sans que T soit hermitien: il suffit que T soit proche de Id_H , $T = \text{Id}_H + R$ avec $\|R\|$ petite; mais l'opérateur T ne sera hermitien que si R est hermitien).

D'après ce qui précède il est clair que le spectre d'un hermitien positif est contenu dans $[0, +\infty[$.

Si T est hermitien positif,

$$\|T\| = \sup\{\langle T(x), x \rangle : \|x\| \leq 1\}.$$

Il est clair que $\langle T(x), x \rangle \leq \|T\| \|x\|^2 \leq \|T\|$ pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$. Pour montrer l'inégalité inverse, on peut utiliser Cauchy-Schwarz appliqué à la forme sesquilinéaire positive $\varphi(x, y) = \langle T(x), y \rangle$, ou bien utiliser le spectre et les valeurs propres approchées : si T est hermitien positif, $\text{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$. Comme on sait que $\|T\| = \rho(T)$, il existe une valeur spectrale de module $\|T\|$, il en résulte donc que $\|T\|$ appartient au spectre ; il existe donc une suite $(x_n) \subset H$ de vecteurs de norme un telle que $\langle T(x_n), x_n \rangle$ tende vers $\lambda = \|T\|$.

Exemples d'hermitiens positifs : les projecteurs orthogonaux ; les produits S^*S , avec S quelconque ; le carré d'un hermitien.

Exemples, commentaires.

Supposons que T soit diagonal dans une base orthonormée, avec coefficients diagonaux (λ_n) (réels) ; l'opérateur $f(T)$ est l'opérateur diagonal de coefficients $(f(\lambda_n))$; démonstration : passer à la limite à partir du cas polynomial.

Supposons que T soit l'opérateur $M_\varphi : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ de multiplication par une fonction φ réelle continue. On voit que pour tout polynôme P l'opérateur $P(M_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $s \in [0, 1] \rightarrow P(\varphi(s))$, donc à la limite $f(M_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par $s \rightarrow f(\varphi(s))$, c'est à dire que $f(M_\varphi) = M_{f \circ \varphi}$.

Si f est une fonction réelle positive sur $K = \text{Sp}(T)$, alors $f(T)$ est hermitien positif : il suffit de considérer $g(s) = \sqrt{f(s)}$ qui est une fonction continue sur K . Alors $g(T)$ est hermitien et $f(T) = (g(T))^2$ est hermitien positif.

Exercice proposé : soient S un opérateur quelconque sur H , et f une fonction continue sur $[0, +\infty[$; montrer que $Sf(S^*S) = f(SS^*)S$.

Le cas hermitien sur un espace réel. Complexification

Soit H un espace de Hilbert réel, dont le produit scalaire sera noté $x \cdot y$ pour éviter les confusions avec le produit scalaire dans le complexifié ; le complexifié de H est l'espace $H_{\mathbb{C}} = H + iH$ de tous les vecteurs $z = x + iy$ où $x, y \in H$; cette écriture est simplement une écriture symbolique commode pour un couple $(x, y) \in H \times H$. Si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose $\lambda z = (ax - by) + i(by + ax)$. On vérifiera les axiomes d'espace vectoriel complexe. . .

On définit le produit scalaire (complexe) sur $H_{\mathbb{C}}$ en posant

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle = (x + iy) \cdot (x' - iy') = (x \cdot x' + y \cdot y') + i(y \cdot x' - x \cdot y').$$

Lorsque $z = x + iy$, on voit que $\langle z, z \rangle = x \cdot x + y \cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2$, ce qui donne un produit scalaire sur $H \times H$ dont la norme associée est $\|z\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$. Si $z = x + i0$, on a $\|z\| = \|x\|$.

A tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ on associe l'application $T_{\mathbb{C}}$ de $H_{\mathbb{C}}$ dans lui-même définie par $T_{\mathbb{C}}(x + iy) = T(x) + iT(y)$; on vérifie facilement que $T_{\mathbb{C}}$ est \mathbb{C} -linéaire. De plus :

l'application $T \rightarrow T_{\mathbb{C}}$ est un homomorphisme isométrique de \mathbb{R} -algèbres de Banach unitaires. De plus, $(T^)_{\mathbb{C}} = (T_{\mathbb{C}})^*$ et $T_{\mathbb{C}}$ est inversible si et seulement si T est inversible.*

Il est clair que l'application est \mathbb{R} -linéaire, que $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}}T_{\mathbb{C}}$, $(\text{Id}_H)_{\mathbb{C}} = \text{Id}_{H_{\mathbb{C}}}$; si $z = x + iy$,

$$\|T_{\mathbb{C}}(z)\|^2 = \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 \leq \|T\|^2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|T\|^2 \|z\|^2,$$

donc $\|T_{\mathbb{C}}\| \leq \|T\|$; l'inégalité inverse est claire en regardant les vecteurs $z = x + i0$. Pour l'adjoint,

$$\langle T(x) + iT(y), x' + iy' \rangle = (T(x) + iT(y)) \cdot (x' - iy');$$

En développant, chaque produit scalaire $T(u) \cdot v'$, avec $u = x, y$ et $v' = x', y'$ sera transformé en $u \cdot T^*(v')$ et il n'y a plus qu'à remonter les morceaux.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, il résulte de la propriété d'homomorphisme unitaire que $(P(T))_{\mathbb{C}} = P(T_{\mathbb{C}})$. Si T est hermitien, son image $T_{\mathbb{C}}$ est un opérateur hermitien de spectre $K = \text{Sp}(T_{\mathbb{C}})$ réel.

Cours n° 17, Mercredi 24 Novembre 1999.

Spectre réel

Si H est un espace de Hilbert réel et si $T \in \mathcal{L}(H)$, on constate que le complexifié $T_{\mathbb{C}}$ est inversible dans $\mathcal{L}(H_{\mathbb{C}})$ si et seulement si T est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

En effet, s'il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $ST = TS = \text{Id}_H$ il en résulte que $S_{\mathbb{C}}T_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}}S_{\mathbb{C}} = \text{Id}_{H_{\mathbb{C}}}$, donc $T_{\mathbb{C}}$ est inversible. Inversement, supposons $T_{\mathbb{C}}$ inversible; alors T est injectif: si $T(x) = 0_H$, alors $T_{\mathbb{C}}(x + i0_H) = 0_{H_{\mathbb{C}}}$, donc $x + i0 = 0$, donc $x = 0_H$; de plus T est surjectif: pour tout $x \in H$ il existe $z = x' + iy'$ tel que $T_{\mathbb{C}}(z) = x + i0$, ce qui donne $T(x') = x$; on en déduit que l'inverse est continu, soit par le théorème des isomorphismes, soit en utilisant la norme de $(T_{\mathbb{C}})^{-1}$.

Il en résulte que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $T - \lambda \text{Id}_H$ est inversible si et seulement si $T_{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{H_{\mathbb{C}}}$ est inversible. Si on introduit le spectre réel de T en posant

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda \text{Id}_H \text{ non inversible} \}$$

on voit que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \mathbb{R} \cap \text{Sp}(T_{\mathbb{C}})$. Cette notion de spectre réel n'est pas très intéressante en général, car il est possible que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T)$ soit vide et ne donne aucune information. Mais dans le cas où T est hermitien, on sait que $T_{\mathbb{C}}$ est hermitien aussi, donc son spectre est réel et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \text{Sp}(T_{\mathbb{C}})$ dans ce cas.

Passons au calcul fonctionnel continu pour les hermitiens réels. Si P est un polynôme réel et si $T \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien, on a $T_{\mathbb{C}}$ hermitien, $P(T_{\mathbb{C}})$ hermitien, donc

$$\|P(T)\| = \|(P(T))_{\mathbb{C}}\| = \|P(T_{\mathbb{C}})\| = \|P\|_{C(\text{Sp}(T_{\mathbb{C}}))}.$$

Si on pose $K = \text{Sp}(T_{\mathbb{C}}) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(T)$ et si f est une fonction réelle continue sur K , on a dit qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $|f(s) - P(s)| < \varepsilon$ pour tout $s \in K$. Comme s est réel, il est clair que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est le polynôme obtenu à partir de P en prenant comme coefficients les parties réelles des coefficients de P , alors $Q(s) = \text{Re} P(s)$, donc $|f(s) - Q(s)| = |\text{Re}(f(s) - P(s))| \leq |f(s) - P(s)| < \varepsilon$. On voit donc que l'algèbre $A_{\mathbb{R}}$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans $C_{\mathbb{R}}(K)$. On continue la démonstration comme avant. On obtient donc

Corollaire. Soient H un espace hilbertien réel et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires réelles $\varphi_T : C_{\mathbb{R}}(\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi_T(z_{\text{Sp}(T)}) = T$. On notera $f(T) = \varphi_T(f)$.

De plus, φ_T est isométrique, $(f(T))^* = f(T)$ est hermitien pour toute f (forcément réelle dans ce contexte) et $f(T)$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T . On a

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f(T)) = f(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T)).$$

La démonstration de l'unicité a été oubliée dans le théorème complexe; elle se démontre comme l'unicité dans le cas réel, que nous allons donner maintenant. Soit $K = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T)$ et soit φ un homomorphisme d'algèbres de Banach réelles unitaires de $C_{\mathbb{R}}(K)$ dans $\mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi(z_K) = T$; par définition, on a $\varphi(z_K^0) = \varphi(1) = \mathrm{Id}_H = T^0$, et $\varphi(z_K^k) = T^k$ pour tout $k \geq 1$ (la fonction z_K^k est la fonction monôme $s \rightarrow s^k$); il en résulte puisque φ est de plus linéaire que pour toute fonction polynomiale $f : s \rightarrow P(s)$, l'image $\varphi(f)$ est $P(T) = \varphi_T(f)$. De plus, φ est continue par définition des homomorphismes d'algèbres de Banach, et l'ensemble

$$E = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : \varphi(f) = \varphi_T(f)\}$$

est donc fermé, et il est dense puisqu'il contient l'algèbre $A_{\mathbb{R}}$ qui est dense dans $C_{\mathbb{R}}(K)$; cet ensemble E est donc égal à $C_{\mathbb{R}}(K)$, donc $\varphi = \varphi_T$.

Composition de fonctions

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; soient T un opérateur hermitien sur H , et f une fonction réelle sur $K = \mathrm{Sp}(T)$; alors $S = f(T)$ est hermitien et $\mathrm{Sp}(S) = f(K)$. Posons $L = f(K)$; pour toute fonction continue g sur L , à valeurs dans \mathbb{K} , on peut considérer l'opérateur $g(S) = g(f(T))$. On a

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T).$$

Démonstration : l'application $\psi : g \rightarrow g \circ f$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes de $C(L)$ dans $C(K)$. La composition $\varphi = \varphi_T \circ \psi$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes de $C(L)$ dans $\mathcal{L}(H)$, et $\varphi(z_L) = \varphi_T(\psi(z_L)) = \varphi_T(f) = f(T) = S$. D'après l'unicité, φ est égal à l'homomorphisme φ_S , donc $\varphi(g) = (g \circ f)(T) = g(S) = g(f(T))$.

Remarque. La limitation à f réelle vient du fait que nous n'avons introduit pour l'instant que le calcul fonctionnel $g(S)$ pour S hermitien; nous devons donc demander pour l'instant que $S = f(T)$ soit hermitien, donc f réelle; cette restriction sera levée plus tard.

Application : racine carrée des hermitiens positifs

On prend encore $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On rappelle que si T est hermitien positif, alors $\mathrm{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$. La fonction $s \geq 0 \rightarrow \sqrt{s}$ est continue sur le spectre de T , ce qui permet de définir $\sqrt{T} = f(T)$. D'après la propriété d'homomorphisme, on a $(\sqrt{T})^2 = f^2(T) = z_K(T) = T$. De plus, on a vu que $f(T)$ est hermitien positif puisque f est réelle ≥ 0 sur le spectre de T .

Proposition 5.1.1. *Pour T hermitien positif, l'opérateur \sqrt{T} est l'unique hermitien positif S tel que $S^2 = T$.*

Démonstration. Soit S un opérateur hermitien positif tel que $S^2 = T$; considérons le spectre $K = \mathrm{Sp}(S) \subset [0, +\infty[$, et considérons sur K la fonction $f : s \rightarrow s^2$, puis sur

$L = f(K) \subset [0, +\infty[$ la fonction $g(t) = \sqrt{t}$. Du fait que $K \subset [0, +\infty[$, on vérifie que $g(f(s)) = \sqrt{s^2} = s$ pour tout $s \in K$, donc le résultat de composition nous donne, puisque $g \circ f = z_K$

$$S = (g \circ f)(S) = g(f(S)) = g(S^2) = g(T) = \sqrt{T}.$$

Bien entendu il n'y a pas unicité si on ne demande pas que la racine soit positive : il suffit de considérer $-\sqrt{T}$ pour avoir une autre racine hermitienne.

Calcul fonctionnel, suite : le cas unitaire

Un $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit unitaire si $U^*U = UU^* = \text{Id}_H$. Remarquer qu'un unitaire est normal. La théorie est plus intéressante si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce que nous supposerons dans ce paragraphe.

Exemples. Soient T un opérateur hermitien, et $K = \text{Sp}(T)$; si f est une fonction continue sur K , à valeurs complexes et telle que $|f(s)| = 1$ pour tout $s \in K$, il en résulte que $U = f(T)$ est unitaire. En effet, $(f(T))^* = \overline{f}(T)$ donc

$$U^*U = \overline{f}(T)f(T) = (\overline{f}f)(T) = 1(T) = \text{Id}_H,$$

et $U^*U = UU^*$. Considérons par exemple $f(t) = (1 + it)/(1 - it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; on vérifie que cette fonction est de module 1 ; elle donne une bijection continue de \mathbb{R} sur le cercle unité privé du point -1 . Si T est hermitien, alors $f(T) = (\text{Id}_H + iT)(\text{Id}_H - iT)^{-1}$ est unitaire.

Exercice proposé. Soit A un opérateur sur H , tel que $\|A\| \leq 1$; montrer qu'il existe un unitaire U sur $H \oplus H$, admettant une représentation matricielle

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B, C et D sont à choisir parmi $\pm A^*$, $\pm\sqrt{\text{Id}_H - AA^*}$, $\pm\sqrt{\text{Id}_H - A^*A}$.

Remarque. On a $U^*U = \text{Id}_H$ si et seulement si U est une isométrie de H dans H , c'est à dire que $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.

On écrit

$$\|U(x)\|^2 = \langle U(x), U(x) \rangle = \langle U^*U(x), x \rangle.$$

Si $U^*U = \text{Id}_H$, il en résulte que $\|U(x)\|^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in H$; réciproquement, si U est isométrique il en résulte que

$$\langle (U^*U)(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$$

pour tout x , ce qui entraîne $\langle (U^*U)(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y par polarisation, puis $U^*U = \text{Id}_H$.

Les opérateurs unitaires sont exactement les opérateurs isométriques surjectifs.

Si U est unitaire, il est surjectif puisqu'inversible, et isométrique puisque $U^*U = \text{Id}_H$. à l'envers, si U est isométrique, alors $U^*U = \text{Id}_H$; si U est surjectif, son inverse algébrique existe et sera lui aussi isométrique donc continu, donc U est inversible, et l'inverse est U^* puisque c'est déjà l'inverse à gauche.

Si on a seulement $U^*U = \text{Id}_H$, U est une isométrie de H sur $\text{im}(U)$.

Exemple : isométrie U de $L_2(0, 1)$ sur $L_2(0, 1/2)$ donnée pour toute $f \in L_2$ par $U(f)(s) = \sqrt{2} f(2s)$ si $0 \leq s < 1/2$ et 0 sinon.

Lemme. Si U est unitaire, son spectre est contenu dans le cercle unité \mathbb{T} .

Démonstration. Il est clair que $\|U\| = 1$, donc $\text{Sp}(U)$ est contenu dans le disque unité fermé. Par ailleurs si $|\lambda| < 1$, on écrit $U - \lambda \text{Id}_H = U(\text{Id}_H - \lambda U^*)$ qui est inversible puisque $\|\lambda U^*\| = |\lambda| < 1$.

Rappel : la norme de $P(T)$ quand T est normal est égale au max de $|P(\lambda)|$ pour $\lambda \in \text{Sp}(T)$ (quand T est normal, alors $P(T)$ est normal, donc sa norme est égale au rayon spectral, et par le petit théorème spectral, le spectre de $P(T)$ est $P(\text{Sp}(T))$). Les unitaires sont normaux, donc cette remarque peut leur être appliquée.

Le problème de Stone-Weierstrass ici : les polynômes ne sont plus denses dans $C(\mathbb{T})$; il faut ajouter la fonction \bar{z} (qui est égale à $1/z$ pour les points z du cercle).

On considère ici l'algèbre de toutes les fonctions f sur $K = \text{Sp}(U) \subset \mathbb{T}$ de la forme

$$\forall z \in K, \quad f(z) = \sum_{k=-N}^N a_k z^k = \sum_{k=0}^N a_k z^k + \sum_{k=1}^N a_{-k} \bar{z}^k.$$

Il est facile de constater qu'il s'agit d'une algèbre de fonctions (plus facile sur la première expression), stable par conjugaison (plus clair sur la deuxième), contenant les constantes et séparant les points de \mathbb{T} , donc de K (prendre $z \rightarrow z$!) Cette nouvelle algèbre A est donc dense dans $C(K)$, et on va appliquer la même stratégie : définir une isométrie linéaire de A dans $\mathcal{L}(H)$.

Soit

$$f(z) = \sum_{k=-N}^N a_k z^k$$

une fonction de A et

$$P = a_{-N} + a_{-N+1}X + \cdots + a_0X^N + \cdots + a_NX^{2N}.$$

On a $f(z) = z^{-N}P(z)$, donc $|f(z)| = |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Considérons $T = \sum_{k=-N}^N a_k U^k$, que l'on aura envie d'appeler $f(U)$. On note que $T = U^{-N}P(U)$. Ceci aide à vérifier que l'on a bien l'isométrie cherchée, puisque $\|T\| = \|P(U)\|$ grâce au caractère unitaire de U^{-N} .

Pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{T}$, on a $|f(\lambda)| = |P(\lambda)|$, donc

$$\|f\|_{C(K)} = \|P\|_{C(K)} = \|P(U)\| = \left\| \sum_{k=-N}^N a_k U^k \right\|,$$

ce qui donne comme avant une isométrie à partir de la nouvelle algèbre A . On termine comme avant.

Fin du cas unitaire : on considère un opérateur unitaire U d'un espace de Hilbert complexe H ; le spectre $K = \text{Sp}(U)$ est contenu dans le cercle unité \mathbb{T} du plan complexe. On considère l'algèbre A de toutes les fonctions f sur K de la forme

$$\forall z = e^{i\theta} \in K, \quad f(z) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta},$$

où les (c_k) sont des coefficients complexes. On a vu que si on pose $V = \sum_{k=-N}^N c_k U^k$ (les puissances négatives s'interprètent facilement puisque U est inversible), on a

$$\|V\| = \sup\left\{ \left| \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta} \right| : e^{i\theta} \in K \right\}.$$

Ceci permet de voir d'abord que V ne dépend que de la fonction $f \in A$, et permet de définir $f(U)$ pour $f \in A$, avec de plus $\|f(U)\| = \|f\|_{C(K)}$. De plus l'algèbre A est dense dans $C(K)$ par Stone-Weierstrass. On en déduit comme d'habitude un prolongement à $C(K)$. On peut maintenant énoncer un énoncé très voisin de celui qui est dans le poly, énoncé qui regroupe les cas hermitien et unitaire.

Théorème 5.4.2. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ou unitaire ; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes $\varphi_T : C(\text{Sp}(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi_T(z_{\text{Sp}(T)}) = T$. De plus, φ_T est isométrique ; $\varphi_T(f)$ commute avec tout opérateur qui commute avec T et, pour tout $f \in C(\text{Sp}(T))$ on a $\varphi_T(f)^* = \varphi_T(\bar{f})$ (donc $f(T)$ est normal). Enfin,

$$\text{Sp}(f(T)) = f(\text{Sp}(T)).$$

Exemples et applications

Faisons le point sur les hermitiens positifs ; les différents morceaux ont été vus déjà, mais de façon un peu éparpillée ; si T est un opérateur hermitien, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur T est hermitien positif.
2. Le spectre de T est contenu dans $[0, +\infty[$.
3. Il existe un opérateur S tel que $T = S^*S$ (ou bien il existe V hermitien tel que $T = V^2$).

Démonstration. Si T est hermitien, on a vu que pour toute valeur spectrale λ de T il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme un telle que $\lambda = \lim_n \langle T(x_n), x_n \rangle$. Si T est positif, il en résulte que λ est réel ≥ 0 .

Si $K = \text{Sp}(T)$ est contenu dans $[0, +\infty[$, on peut considérer la fonction continue f définie sur K par $f(t) = \sqrt{t}$. Puisque cette fonction est réelle, $V = f(T)$ est hermitien. De plus, $f^2(t) = t$ pour tout $t \in K$ (parce que $t \geq 0$), donc f^2 est la fonction identique z_K ; il en résulte que $T = f^2(T) = (f(T))^2 = V^2 = V^*V$.

Si $T = S^*S$, alors $T^* = S^*S^{**} = S^*S$ est hermitien, et on a pour tout $x \in H$

$$\langle T(x), x \rangle = \langle S^*S(x), x \rangle = \langle S(x), S(x) \rangle \geq 0.$$

On en déduit une majoration de $\langle T(x), x \rangle$ à partir des bornes du spectre : si T est hermitien et si $\text{Sp}(T) \subset [a, b]$, alors

$$a\langle x, x \rangle \leq \langle T(x), x \rangle \leq b\langle x, x \rangle$$

pour tout $x \in H$. En effet, $S = T - a\text{Id}_H$ est hermitien parce que $a \in \mathbb{R}$, et on voit facilement que $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(T) - a \subset [0, b - a]$, ce qui montre que S est hermitien positif, donc

$$0 \leq \langle S(x), x \rangle = \langle T(x), x \rangle - a\langle x, x \rangle.$$

On procède de même pour b en considérant $b\text{Id}_H - T$.

Exemple. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ considérons la fonction f_s définie sur \mathbb{R} par $f_s(t) = e^{ist}$. Si T est hermitien, on peut considérer pour tout s l'opérateur $U_s = f_s(T) = e^{isT}$. C'est un opérateur unitaire (j'ai oublié de dire pourquoi à l'amphi : c'est parce que $f_s \overline{f_s} = 1$, ce qui entraîne que $U_s U_s^* = f_s(T) \overline{f_s}(T) = U_s^* U_s = \text{Id}_H$). De plus $f_{s_1} f_{s_2} = f_{s_1+s_2}$ pour tous s_1, s_2 , donc $U_{s_1} U_{s_2} = U_{s_1+s_2}$. On dit qu'on a un groupe d'unitaires. On verra plus loin dans le cours (dernière page du poly, théorème de Stone) une réciproque de ce fait, mais elle demandera de considérer des hermitiens *non bornés*.

Exemple. Le shift bilatéral sur $\ell_2(\mathbb{Z})$. A toute suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $\ell_2(\mathbb{Z})$ on associe $S(x) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ définie par $S(x)_n = x_{n-1}$ (décalage d'un cran vers la droite). Il est clair que S est isométrique, et bijective (l'inverse est le décalage à gauche), donc S est unitaire. On va voir que son spectre est le cercle unité entier. Pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, considérons un vecteur x_n ayant n coordonnées successives non nulles égales à $n^{-1/2}(1, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{n-1})$. On voit facilement que $\|x_n\| = 1$ et $\|S(x_n) - \lambda x_n\| = 2/\sqrt{n} \rightarrow 0$, donc $S - \lambda \text{Id}_H$ n'est pas inversible. On va montrer un autre *modèle* pour l'opérateur S , qui rend son calcul fonctionnel facile.

Opérateurs unitairement équivalents. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et $U : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur unitaire, c'est à dire que $U^*U = \text{Id}_{H_1}$ et $UU^* = \text{Id}_{H_2}$. A tout opérateur $S_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ associons l'opérateur $S_1 = U^*S_2U \in \mathcal{L}(H_1)$. On vérifie que $S_2 \rightarrow S_1$ est un homomorphisme ψ d'algèbres de Banach unitaires de $\mathcal{L}(H_2)$ dans $\mathcal{L}(H_1)$, et de plus $\text{Sp}(S_2) = \text{Sp}(S_1)$ (parce que $S_1 - \lambda \text{Id}_{H_1} = U^*(S_2 - \lambda \text{Id}_{H_2})U$). Si $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ est hermitien ou unitaire, $K = \text{Sp}(T_2) = \text{Sp}(T_1)$, et si on considère $\varphi = \psi \circ \varphi_{T_2}$, on obtient un homomorphisme φ d'algèbres de Banach unitaires complexes de $C(K)$ dans $\mathcal{L}(H_1)$ tel que $\varphi(z_K) = T_1$, donc $\varphi = \varphi_{T_1}$. Il en résulte que pour toute fonction continue f sur K ,

$$f(T_1) = \psi(f(T_2)) = U^*f(T_2)U.$$

Revenons au shift bilatéral. Considérons l'espace $H_2 = L_2([0, 2\pi])$ muni de la mesure $dt/2\pi$ et de la base $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où h_n est la fonction définie par $h_n(t) = e^{int}$ (base de Fourier). Considérons sur H_2 l'opérateur T_2 de multiplication par la fonction g définie par $g(t) = e^{it}$. Par ailleurs on considère l'espace $H_1 = \ell_2(\mathbb{Z})$, avec sa base naturelle $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (le vecteur e_n a pour coordonnées $e_n(m) = \delta_{n,m}$, symbole de Kronecker). Considérons l'isométrie surjective U de H_1 sur H_2 définie par $U(e_n) = h_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis l'opérateur U^*T_2U . On voit que cet opérateur envoie e_n sur e_{n+1} pour tout n : c'est le shift à droite S . On voit donc que le shift S sur $\ell_2(\mathbb{Z})$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par la fonction $t \rightarrow e^{it}$ sur H_2 .

On a dit que le calcul fonctionnel des opérateurs de multiplication est simple : si f est une fonction continue sur \mathbb{T} , l'opérateur $f(T_2)$ est l'opérateur de multiplication par la

fonction $t \rightarrow f(e^{it})$. Les considérations de ce paragraphe sont un prélude au contenu du chapitre 7 : on y verra que les longs développements de ce chapitre 5, un peu prolongés, permettent de dire que tout opérateur hermitien ou unitaire est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication, pour lequel on a dit que le calcul fonctionnel était simple !

Autrement dit : on verra que tout était simple, mais c'était difficile de s'en apercevoir.

Le cas général : opérateurs normaux

Il n'y a pas vraiment de raison de s'arrêter aux opérateurs hermitiens ou unitaires. Ce ne sont que deux cas particuliers des opérateurs normaux, et la théorie du calcul fonctionnel continu se généralise dans son bon cadre à ces opérateurs. Il y a cependant des difficultés supplémentaires, qui ont conduit à renoncer à faire figurer ce cas dans le poly.

Dans les deux cas particuliers de calcul fonctionnel traités en cours, l'opérateur adjoint T^* était directement une fonction de T : trivialement dans le cas hermitien, puisqu'alors $T^* = T$, mais aussi dans le cas unitaire où $T^* = T^{-1}$. Cela ne sera plus vrai dans le cas général d'un opérateur normal, et il faudra demander explicitement que l'homomorphisme φ_T envoie la fonction \bar{z}_K sur T^* (en notant comme d'habitude $K = \text{Sp}(T)$).

Il faut aussi généraliser nos polynômes : si la fonction z_K est envoyée sur T et la fonction \bar{z}_K sur T^* , alors l'image de $z_K \bar{z}_K$ doit être TT^* ; dans le cas hermitien ou unitaire, la fonction $z_K \bar{z}_K$ s'exprime à partir d'un polynôme en z_K (z_K^2 dans le cas hermitien et 1 dans le cas unitaire) ; ceci n'est plus vrai maintenant, et la fonction $z_K \bar{z}_K$ est une nouvelle fonction qui doit être gardée dans notre algèbre de "polynômes" ; bien sûr le problème ne s'arrête pas là, et nous devons considérer $z_K^p \bar{z}_K^q$ pour tous entiers $p, q \geq 0$. On pourrait dire que nous devons considérer l'algèbre $\mathbb{C}[X, Y]$ des polynômes en deux variables, puis prendre l'ensemble des fonctions sur $K = \text{Sp}(T)$ obtenues en remplaçant X par z_K et Y par \bar{z}_K . Disons simplement que notre algèbre de base A qui remplacera l'algèbre des polynômes sera l'algèbre de toutes les fonctions f sur K de la forme

$$\forall z \in K, \quad f(z) = \sum_{p,q=0}^N c_{p,q} z^p \bar{z}^q.$$

On a envie de poser ensuite

$$f(T) = \sum_{p,q=0}^N c_{p,q} T^p (T^*)^q,$$

mais on n'est pas encore sûr que l'opérateur ainsi écrit ne dépend que de la fonction f sur K .

La stratégie de démonstration sera toujours la même : l'algèbre A considérée est dense dans $C(K)$ par Stone-Weierstrass (facile), et l'application que nous avons en tête sera isométrique. Nous admettons sans démonstration le résultat qui suit.

Théorème. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ normal ; posons $K = \text{Sp}(T)$; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes $\varphi_T : C(K) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tel que $\varphi_T(z_K) = T$ et $\varphi_T(\bar{z}_K) = T^*$. On notera $f(T) = \varphi_T(f)$.

De plus, φ_T est isométrique, $(f(T))^* = \overline{f}(T)$ (donc $f(T)$ est normal) et $f(T)$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T . On a

$$\text{Sp}(f(T)) = \text{Sp}(f) = f(\text{Sp}(T)).$$

Composition : le cas général

Soient T un opérateur normal, $K = \text{Sp}(T)$ et soit f une fonction continue sur K . Posons $L = f(K) \subset \mathbb{C}$; on a un homomorphisme d'algèbres de Banach ψ de $C(L)$ dans $C(K)$ défini par $\psi(g) = g \circ f$ pour toute $g \in C(L)$. Considérons l'homomorphisme $\varphi = \psi \circ \varphi_T$, et cherchons les images de z_L et \overline{z}_L . On voit que $\psi(z_L)(t) = z_L(f(t)) = f(t)$ pour tout $t \in K$, donc $\psi(z_L) = f$, et $\psi(\overline{z}_L)(t) = \overline{f(t)}$, donc $\psi(\overline{z}_L) = \overline{f}$. On a donc $\varphi(z_L) = f(T)$ et $\varphi(\overline{z}_L) = \overline{f}(T) = (f(T))^*$; d'après l'unicité, on en déduit que $\varphi = \varphi_{f(T)}$. On obtient donc en toute généralité :

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T).$$

Cours n° 19, Mercredi 1er Décembre 1999.

6. Quelques classes d'opérateurs

6.1. Applications linéaires compactes

Définition 6.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite *compacte* si l'image $T(B_E)$ par l'application T de la boule unité fermée B_E de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F . On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F . On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* dans X si \overline{A} est compacte. Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E , il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E , il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :

- l'ensemble A est borné ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset E$ de dimension finie tel que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de L_ε :

$$\forall x \in A, \quad \text{dist}(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait ; on va esquisser la démonstration de l'autre direction. Supposons les deux conditions du critère vérifiées et soit (x_n) une suite dans \overline{A} . On va montrer d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut extraire une sous-suite telle que $\|x_{n_k} - x_{n_\ell}\| < \varepsilon$ pour tous k, ℓ . On commence par trouver x'_n dans A tel que $\|x_n - x'_n\| < \varepsilon/8$ pour tout n ; ensuite d'après le critère appliqué avec $\varepsilon/8$ il existe un espace de dimension finie L tel que tout point de A soit à distance $< \varepsilon/8$ d'un point de L ; on peut donc trouver $y_n \in L$ tel que $\|y_n - x'_n\| < \varepsilon/8$, ce qui donne $\|x_n - y_n\| < \varepsilon/4$. Par ailleurs la suite (x_n) est bornée, donc il existe M tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout n , donc $\|y_n\| \leq M + \varepsilon/4$ est bornée aussi, et située dans l'espace de dimension finie L ; d'après Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite (y_{n_k})

convergente, qui vérifiera donc pour k, ℓ assez grands $\|y_{n_k} - y_{n_\ell}\| < \varepsilon/2$. En revenant aux (x_n) on obtient $\|x_{n_k} - x_{n_\ell}\| < \varepsilon$ avec l'inégalité triangulaire.

On appliquera ce premier pas successivement avec $\varepsilon = 1/2, 1/4, \text{etc.}$ en prenant à chaque fois une sous-suite de la sous-suite précédente, puis on prendra une sous-suite diagonale qui sera de Cauchy, donc convergente dans l'espace complet E .

Proposition 6.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach ; l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Soient T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F , et considérons les ensembles $A_1 = T_1(B_E)$, $A_2 = T_2(B_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(B_E)$; appliquons le critère précédent à l'ensemble A ; tout d'abord, $T_1 + T_2$ est continue, donc A est borné ; ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux sous-espaces vectoriels L_1 et L_2 de dimension finie de F tels que, pour $j = 1, 2$, tout point de A_j soit à une distance $< \varepsilon/2$ de l'espace L_j . Le sous-espace $L = L_1 + L_2$ est de dimension finie et les points de A_j sont *a fortiori* à une distance $< \varepsilon/2$ de L . Soit y un point quelconque de A ; on peut écrire $y = T_1(x) + T_2(x)$, avec $x \in B_E$, donc $T_j(x) \in A_j$. Il existe $z_1, z_2 \in L$ tels que $\|T_j(x) - z_j\| < \varepsilon/2$, d'où résulte que $\|x - (z_1 + z_2)\| < \varepsilon$ et $\text{dist}(y, L) < \varepsilon$.

Pour voir que l'ensemble des opérateurs compacts est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$: voir le poly.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E, F)$ compacte ; si $K \subset F$ est compact et contient l'image $S(B_E)$, alors $T(K)$ est compact et contient l'image $TS(B_E)$, donc TS est compacte. Pour l'autre cas, voir le poly. ■

Exemples 6.1.1.

1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(B_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts : par exemple, si $c_n \rightarrow 0$, l'opérateur Δ_c de ℓ_p dans ℓ_p (ou de c_0 dans c_0) défini par $\Delta_c((x_n)) = (c_n x_n)$ est compact.

On commence par remarquer que la norme de Δ_c dans $\mathcal{L}(\ell_p)$ est majorée par $\|c\|_\infty$. Ensuite, pour tout entier N on considère la suite $c^{(N)}$ telle que $c_n^{(N)} = c_n$ si $n \leq N$ et $c_n^{(N)} = 0$ sinon ; l'opérateur $T_N = \Delta_{c^{(N)}}$ est de rang fini, et $\|\Delta_c - T_N\|$ est majoré par $\|c - c^{(N)}\|_\infty = \sup_{n > N} |c_n|$ qui tend vers 0 parce que la suite (c_n) tend vers 0.

Exercice proposé. On prend $c_n = 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$. Alors Δ_c est compact de c_0 dans c_0 d'après ce qui précède ; montrer que pourtant l'image de la boule unité fermée de c_0 n'est pas fermée.

2. Pour toute fonction f intégrable sur $[0, 1]$ définissons la fonction continue $V(f)$ comme dans l'exemple 5.2.1,

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s) ds ;$$

pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, désignons par V_p l'opérateur de $L_p = L_p(0, 1)$ dans $C([0, 1])$ qui associe à $f \in L_p$ la fonction continue $V(f)$; alors V_p est compact lorsque

$p > 1$: on voit en effet en appliquant Hölder que $|V(f)(s) - V(f)(t)| \leq |s - t|^{1/q}$ pour toute $f \in B_{L_p}$ (où $1/p + 1/q = 1$), donc $A = V_p(B_{L_p})$ est borné dans $C([0, 1])$ et équicontinu (ici $q < +\infty$, donc $1/q > 0$ et la fonction $\delta(t) = t^{1/q}$ tend vers 0 avec t), donc A est relativement compact dans $C([0, 1])$ par Ascoli.

On verra un peu plus loin que V_1 n'est pas compact de L_1 dans $C([0, 1])$.

Critères de non compacité

S'il existe $\delta > 0$ tel que A contienne une suite (infinie) (x_n) telle que $\|x_n - x_m\| \geq \delta$ pour tous $m \neq n$, alors A n'est pas relativement compact : en effet, la suite ne peut avoir de sous-suite convergente.

Il suffit d'un peu moins : s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ on puisse trouver x_1, \dots, x_N dans A tels que $\|x_i - x_j\| \geq \delta$ pour tous $i \neq j$, alors A n'est pas relativement compact.

En effet, si A était relativement compact on pourrait recouvrir \bar{A} , donc A , par une famille finie de boules ouvertes de rayon $\delta/2$ centrées en des points y_1, \dots, y_p ; si x_1, \dots, x_N sont des points de A tels que $\|x_i - x_j\| \geq \delta$, on constate que chaque boule $B(y_k, \delta/2)$ ne peut contenir qu'un seul des points x_i ; il en résulte que $N \leq p$.

Revenons à V_1 ; pour tout N considérons N fonctions f_1, \dots, f_N dans la boule unité de L_1 définies ainsi : la première fonction f_1 vaut N sur $[0, 1/(2N)[$, puis $-N$ sur $[1/(2N), 1/N[$; les fonctions suivantes sont translatées de $1/N$ à chaque fois ; on a $\int_0^1 |f_j(s)| ds = 1$ pour tout j ; on constate que les fonctions $V(f_1), \dots, V(f_N)$ sont des "fonctions triangle" à supports disjoints, dont le maximum est $1/2$, ce qui entraîne que pour tout N , l'ensemble $A = V_1(B_{L_1}) \subset C([0, 1])$ contient N points $y_j = V(f_j)$ tels que $\|V(f_i) - V(f_j)\|_\infty = 1/2$ pour tous $i \neq j$, donc A n'est pas relativement compact.

Proposition 6.1.3. Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$; notons B_E la boule unité fermée de E .

(i) Supposons T compact ; alors T est continu de B_E , munie de la topologie faible, dans F muni de la topologie de la norme ; en conséquence, pour toute suite (x_n) de points de E convergeant faiblement vers 0 la suite $(T(x_n))$ converge en norme vers 0.

(ii) Supposons E réflexif ; alors T est compact si et seulement si : pour toute suite (x_n) de points de E convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))$ converge en norme vers 0 ; de plus, l'ensemble $T(B_E)$ est compact (en norme) dans F lorsque T est compact.

Démonstration. Supposons T compact, et soit K un compact de F contenant $T(B_E)$; l'identité de K , muni de la topologie de la norme, dans K muni de la topologie faible est continue ; comme K est compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de B_E muni de la topologie faible dans K muni de la topologie faible, il en résulte que T est continu de B_E faible dans F muni de la norme. Si (x_n) est une suite qui converge faiblement vers 0 dans E , elle est bornée dans E , donc $(T(x_n))$ tend vers 0 en norme par ce qui précède.

Lorsque E est réflexif, la boule B_E est faiblement compacte, donc son image $T(B_E)$ est faiblement compacte dans F , donc faiblement fermée, donc fermée ; puisque $T(B_E)$ est relativement compacte, elle est en fait compacte. Supposons encore E réflexif et que $(T(x_n))$ converge vers 0 en norme dans F pour toute suite (x_n) qui tend faiblement vers 0 en E ; soit (x_n) une suite dans B_E ; d'après le théorème 3.3.1, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers un point $x \in B_E$; alors $(x_{n_k} - x)$ converge faiblement vers 0, donc $T(x_{n_k}) - T(x)$ converge en norme vers 0 d'après l'hypothèse ; on a ainsi montré

que pour toute suite $(x_n) \subset B_E$, il existe une sous-suite $(T(x_{n_k}))$ qui converge en norme, donc T est compact.

Théorème de Riesz

Lemme. Soit Z un espace normé de dimension n ; on peut trouver dans la boule unité de Z une famille A d'au moins 2^n points dont les distances mutuelles sont $\geq 1/2$: si $x, y \in A$ et $x \neq y$, alors $\|x - y\| \geq 1/2$, et $\text{card } A \geq 2^n$.

Démonstration. Soit A une famille maximale de points de la boule unité B_Z de Z dont les distances mutuelles soient $\geq 1/2$. Alors les boules de rayon $1/2$ centrées aux points de A recouvrent B_Z : en effet, si $x \in B_Z$ et $x \notin A$, on ne peut pas, d'après la maximalité de A , ajouter le point x à la famille A pour former une nouvelle famille A' de points à distances mutuelles $\geq 1/2$; cela signifie qu'il existe un point $y \in A$ tel que $d(y, x) < 1/2$, donc x est bien contenu dans une boule de rayon $1/2$ centrée en un point y de A . Soit V le volume de B_Z ; puisque Z est de dimension n , les boules de rayon $1/2$ ont un volume égal à $2^{-n}V$ (dans le cas réel : j'ai oublié de le dire à l'amphi ; si on est en dimension complexe n , la dimension réelle est $2n$, et le résultat sera vrai aussi, mais pas précis) ; puisque les boules de ce rayon centrées aux points de A recouvrent B_Z , on a $(\text{card } A) 2^{-n}V \geq V$, d'où le résultat.

Théorème. Si la boule unité d'un espace normé X est compacte, alors X est de dimension finie.

Démonstration. Si X était de dimension infinie, il contiendrait pour tout n un espace F_n de dimension n . Alors B_X contiendrait B_{F_n} , donc contiendrait pour tout n une famille d'au moins 2^n points à distances mutuelles $\geq 1/2$. Le critère de non compacité précédent nous dit que B_X ne peut pas être compacte.

Théorie spectrale des opérateurs compacts

Proposition. Soit E un espace de Banach, réel ou complexe ; si $S \in \mathcal{L}(E)$ est compact et si $\lambda \neq 0$, le sous-espace $E_\lambda = \ker(S - \lambda \text{Id}_E) = \{y \in E : S(y) = \lambda y\}$ est de dimension finie.

Démonstration. Pour tout x de $F = E_\lambda$ on a $S(x) = \lambda x$, ou bien $x = \lambda^{-1}S(x)$. L'opérateur $\lambda^{-1}S$ est compact, ce qui entraîne que sa restriction à F est compacte, et égale à l'identité de F . Il en résulte que l'identité de F est compacte, ce qui implique que la boule unité B_F est compacte, donc F est de dimension finie.

Corollaire 6.1.2. Soient $S \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$; l'opérateur $S - \lambda \text{Id}_E$ est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif, ou bien si et seulement s'il est surjectif.

Démonstration. Puisque $\lambda \neq 0$, on écrira $S - \lambda \text{Id}_E = -\lambda(\text{Id}_E - \lambda^{-1}S)$, et on se ramènera à l'étude de $T = \text{Id}_E - S'$, avec $S' = \lambda^{-1}S$ compact.

Considérons donc $T = \text{Id}_E - S$, avec S compact. On montre d'abord que la chaîne croissante des noyaux $N_k = \ker T^k$ est stationnaire.

Supposons le contraire ; puisque $ST = TS$, on a aussi $T^k S = S T^k$ donc $S(N_k) \subset N_k$. Puisque $N_{k-1} \subset N_k$ et $N_{k-1} \neq N_k$ pour tout $k \geq 1$ (et N_{k-1} fermé, comme noyau de T^{k-1} continue), on peut trouver un vecteur $x_k \in N_k$ tel que $\|x_k\| = 1$ et $\text{dist}(x_k, N_{k-1}) > 1/2$.

Considérons $1 \leq j < k$; alors $T(x_k) \in N_{k-1}$, $S(x_j) \in N_j \subset N_{k-1}$, donc $T(x_k) + S(x_j) \in N_{k-1}$ est loin de x_k :

$$\|x_k - (T(x_k) + S(x_j))\| = \|S(x_k) - S(x_j)\| > 1/2.$$

L'image de la boule unité par S contient alors une suite de points à distances mutuelles $> 1/2$, ce qui contredit la compacité de S .

Supposons l'opérateur T surjectif et $\ker(T) \neq \{0\}$; il existe $y_1 \neq 0$ tel que $T(y_1) = 0$; puisque T est surjectif, on peut trouver par récurrence y_k tel que $T(y_k) = y_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$. Alors $T^k(y_k) = 0$ mais $T^{k-1}(y_k) = y_1 \neq 0$, ce qui montre que $\ker(T^{k-1}) \neq \ker(T^k)$ pour tout $k \geq 1$, contrairement à ce qui a été vu ci-dessus. L'opérateur T est donc injectif, donc bijectif continu, donc un isomorphisme.

On continue l'étude de la théorie de F. Riesz des opérateurs compacts. On suppose donc que $S \in \mathcal{K}(E)$, et on pose $T = \text{Id}_E - S$. On va d'abord revenir sur le principe qui a fait marcher la démonstration de "T surjectif si et seulement si T inversible".

A. Si $M_1 \subset M_2 \subset E$, avec M_1 sous-espace fermé, $T(M_2) \subset M_1$, alors pour tout $x \in M_2$ on aura

$$\text{dist}(S(x), M_1) = \text{dist}(x, M_1).$$

C'est à peu près évident : on suppose que $T(x) = x - S(x) \in M_1$, c'est à dire que x et $S(x)$ sont équivalents pour la relation d'équivalence qui définit le quotient M_2/M_1 , et par ailleurs $\text{dist}(z, M_1)$ est la norme de la classe de z dans le quotient, pour tout $z \in M_2$.

B. Si (K, d) est un espace métrique compact, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $N_K(\varepsilon)$ qui majore le cardinal des familles (x_i) de points de K telles que $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ pour tout $i \neq j$.

Il suffit de recouvrir K par un nombre fini N de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$, et de s'apercevoir que N convient comme nombre $N_K(\varepsilon)$.

C. Soit $T = \text{Id}_E - S$ avec S compact et soit une chaîne $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k$ de sous-espaces fermés de E , deux à deux distincts tels que $T(M_j) \subset M_{j-1}$ pour $j = 1, \dots, k$. Alors $k \leq N_K(1/2)$, où $K = \overline{S(B_E)}$.

Puisque $M_j \neq M_{j-1}$, on peut trouver pour tout $j \geq 1$ un vecteur $x_j \in M_j$ tel que $\|x_j\| \leq 1$ et $\text{dist}(x_j, M_{j-1}) > 1/2$. On note que $T(M_i) \subset M_{i-1}$ entraîne que $S(M_i) \subset M_i$ pour tout $i > 0$. Si $1 \leq i < j \leq k$, on aura $S(x_i) \in M_i \subset M_{j-1}$, donc

$$\|S(x_j) - S(x_i)\| \geq \text{dist}(S(x_j), M_{j-1}) = \text{dist}(x_j, M_{j-1}) > 1/2,$$

ce qui montre que les points $(S(x_i))_{i=1}^k$ sont des points du compact $K = \overline{S(B_E)}$ qui sont $1/2$ -écartés ; leur nombre est donc inférieur ou égal à $N_K(1/2)$.

On a encore besoin d'un lemme :

Lemme. Si la restriction de T au sous-espace fermé $F \subset E$ est injective, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c \|x\|$ pour tout $x \in F$; il en résulte que $T(F)$ est fermé.

Sinon, il existe une suite $(x_n) \subset F$ de vecteurs de norme un telle que $T(x_n) = x_n - S(x_n) \rightarrow 0$. Comme S est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $S(x_{n_k})$ converge vers un vecteur y ; puisque $x_{n_k} - S(x_{n_k})$ converge vers 0, il en résulte que (x_{n_k}) converge vers y , donc $y \in F$, $\|y\| = 1$ et $T(y) = y - S(y) = 0$, contradiction de l'injectivité de T sur F . Donc $c > 0$ existe, et on sait alors que T est un isomorphisme de F sur $T(F)$, donc l'image de F est fermée.

Terminons la démonstration commencée la semaine dernière :

Corollaire 6.1.2. Soient $S \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$; l'opérateur $S - \lambda \text{Id}_E$ est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif, ou bien si et seulement s'il est surjectif.

On a déjà vu le côté surjectif, et on se ramène comme avant au cas de $T = \text{Id}_E - S$.

Supposons T injectif ; on a vu dans le lemme précédent que T est alors un isomorphisme de E sur $T(E)$, donc l'image de tout sous-espace fermé est fermée ; il en résulte par récurrence que $T^k(E)$ est fermé pour tout $k \geq 1$; si T n'était pas surjectif, on aurait $\text{im}(T^k) \neq \text{im}(T^{k-1})$ pour tout $k \geq 1$ (facile). On pourrait alors former une chaîne arbitrairement longue

$$M_0 = T^k(E) \subset M_1 = T^{k-1}(E) \subset \dots \subset M_{k-1} = T(E) \subset M_k = E$$

de sous-espaces fermés, deux à deux distincts, tels que $T(M_j) \subset M_{j-1}$, ce qui contredit le principe **C** démontré ci-dessus.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E , on appelle *codimension* de F la dimension du quotient E/F (finie ou $+\infty$). Si F est de codimension finie n , on peut trouver un sous-espace vectoriel G de dimension n tel que $E = F \oplus G$.

Supposons que X soit de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(X)$; la codimension de $T(X)$, c'est à dire la dimension de $X/T(X)$, est égale à $\dim X - \dim T(X)$. La relation classique de l'algèbre linéaire $\dim(X) = \dim \ker(T) + \dim(T(X))$ peut donc se traduire par

$$\dim \ker(T) = \text{codim } T(X).$$

On va voir que cette propriété subsiste pour $T = \text{Id}_E - S$ quand S est compact.

Théorème 6.1.2 : alternative de Fredholm. Soient E un espace de Banach et $S \in \mathcal{K}(E)$;

(i) pour tout $\lambda \neq 0$, l'image de $\lambda \text{Id}_E - S$ est fermée et de codimension finie et l'on a

$$\text{codim } \text{im}(\lambda \text{Id}_E - S) = \dim \ker(\lambda \text{Id}_E - S) ;$$

(ii) (ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) le spectre $\text{Sp}(S)$ est fini ou formé d'une suite tendant vers 0. Toute valeur spectrale non nulle est valeur propre.

Démonstration. En remplaçant S par S/λ on se ramène à $\lambda = 1$, et à étudier l'opérateur $T = \lambda \text{Id}_E - S$, égal à $\text{Id}_E - S$ dans ce cas : on a vu que $\ker(T)$ est de dimension finie.

On doit montrer de plus que $\dim \ker(T) = \text{codim } T(E)$. Dans le poly, on procède par récurrence sur la dimension de $\ker(T)$; ici, on va seulement expliquer les cas des dimensions 0 et 1. Si $\dim \ker(T) = 0$, on sait que T est surjectif d'après le corollaire 2, donc $\text{codim } T(E) = 0 = \dim \ker(T)$ dans ce cas ; soit $T = \text{Id}_E - S$ avec S compact et $\dim \ker(T) = 1$; d'après le corollaire 2, on a $\text{im}(T) \neq E$; on choisit x_0 de norme un de façon que $\ker(T) = \mathbb{K}x_0$, puis une forme linéaire continue x_0^* telle que $\|x_0^*\| = 1$ et $x_0^*(x_0) = \|x_0\| = 1$. On considère la projection P continue de E sur $\ker(T)$ définie par $P(x) = x_0^*(x)x_0$; on désigne par E_0 son noyau, c'est à dire que $E_0 = \ker x_0^*$. On a $E = \ker(T) \oplus E_0$, et on voit que la restriction de T à E_0 est injective et que $T(E) = T(E_0)$. On a vu que sous ces conditions $T(E_0) = T(E)$ est fermé. On sait que $T(E) \neq E$; soit donc $y_0 \notin \text{im}(T)$ et posons $T'(x) = T(x) + x_0^*(x)y_0$ pour tout $x \in E$. L'opérateur T' est obtenu en ajoutant à T l'opérateur de rang un $R : x \rightarrow x_0^*(x)y_0$, donc $T' = \text{Id}_E - S'$ avec $S' = S - R$ compact. Déterminons le noyau de T' ; la relation $T'(x) = 0$ entraîne $T(x) = 0$ et $x_0^*(x) = 0$ (parce que $y_0 \notin \text{im}(T)$) donc $x \in E_0$, puis $x = 0$ parce que T est injectif sur E_0 . On voit donc que T' est injectif ; d'après ce qui a été vu, il en résulte que T' est surjectif. Mais clairement, $E = T'(E) \subset T(E) + \mathbb{K}y_0 \subset E$, donc $E = T(E) \oplus \mathbb{K}y_0$ ce qui montre bien que $\text{codim } T(E) = 1$.

On va maintenant montrer que si 1 est dans le spectre de S , alors 1 est valeur propre et 1 est isolé dans le spectre de S . Si 1 n'est pas valeur propre de S , l'opérateur T est

injectif, donc surjectif d'après le corollaire 2, donc $\text{Id}_E - S$ est inversible et 1 n'est pas dans le spectre de S .

On va donner une démonstration courte mais un peu artificielle du point (ii) : on montre que si $\lambda \neq 0$ est dans le spectre de S , il est isolé dans ce spectre. Si $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ était une suite de valeurs propres de S distinctes de λ et qui converge vers $\lambda \neq 0$, on aurait pour tout $n \geq 0$ un vecteur x_n de norme un tel que $S(x_n) = \lambda_n x_n$. Soit F le sous-espace fermé engendré par la suite $(x_n)_{n \geq 0}$; il est clair que F est S -invariant, ce qui permet de considérer la restriction S' de S à F . Alors $x_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1}(\lambda \text{Id}_F - S')(x_n)$ pour tout $n \geq 0$, ce qui montre que $T' = \lambda \text{Id}_F - S'$ a une image dense dans F (l'image contient tous les vecteurs $(x_n)_{n \geq 0}$), donc égale à F puisqu'on sait que l'image d'un tel T' est fermée d'après la partie (i). Il en résulte que T' est un isomorphisme, donc $\lambda \notin \text{Sp}(S')$, ce qui est impossible puisque $\text{Sp}(S')$ est fermé et contient les (λ_n) . Donc λ est isolé.

Exercice proposé. Si $T = \text{Id}_E - S$, S compact, on a vu que l'image $T(E)$ est fermée et de codimension finie ; montrer que la dimension de $E/T(E)$ est égale à la dimension du noyau de tT . Si x_1^*, \dots, x_k^* est une base du noyau de tT , montrer que $y \in T(E)$ si et seulement si $x_1^*(y) = \dots = x_k^*(y) = 0$.

Formulation classique de l'alternative de Fredholm (1903). Soit S un opérateur compact de E . On admettra que tS est compacte de E^* dans E^* (voir poly).

– ou bien les deux équations $x - S(x) = y$, $x^* - {}^tS(x^*) = y^*$ admettent pour tous seconds membres $y \in E$, $y^* \in E^*$ une solution unique $x \in E$, $x^* \in E^*$.

– ou bien les équations homogènes $x - S(x) = 0$, $x^* - {}^tS(x^*) = 0$ admettent un même nombre fini $k > 0$ de solutions indépendantes, x_1, \dots, x_k et x_1^*, \dots, x_k^* . Dans ce cas, pour que l'équation $x - S(x) = y$ admette une solution $x \in E$, il faut et il suffit que $x_1^*(y) = x_2^*(y) = \dots = x_k^*(y) = 0$, et pour que l'équation $x^* - {}^tS(x^*) = y^*$ admette une solution $x^* \in E^*$, il faut et il suffit que $y^*(x_1) = y^*(x_2) = \dots = y^*(x_k) = 0$.

Pour ce point de vue classique, on pourra consulter le livre de F. Riesz (Leçons d'Analyse Fonctionnelle).

Exercice proposé (et commencé) : équation du type de Volterra (1897). La fonction g étant donnée, C^1 sur $[0, 1]$ et nulle en 0, montrer qu'on peut trouver pour tout $\lambda \neq 0$ une fonction continue f telle que

$$\int_0^s (1 - \lambda^{-1} \sin(s^2 - t^2)) f(t) dt = g(s)$$

pour tout $s \in [0, 1]$.

On commence par dériver pour obtenir

$$(1 - \lambda^{-1} \sin(s^2 - s^2)) f(s) - \lambda^{-1} \int_0^s 2s \cos(s^2 - t^2) f(t) dt = g'(s)$$

c'est à dire

$$f(s) - \lambda^{-1} \int_0^s 2s \cos(s^2 - t^2) f(t) dt = g'(s).$$

Montrer que l'opérateur V défini sur $C([0, 1])$ par

$$(Vf)(s) = \int_0^s 2s \cos(s^2 - t^2) f(t) dt$$

est compact, que son rayon spectral est nul, et que le problème posé se ramène à l'étude de $V - \lambda \text{Id}$.

Théorème 6.1.3. *Toute application linéaire compacte normale d'un espace de Hilbert complexe H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres.*

Démonstration. Soient H un espace de Hilbert complexe et $S \in \mathcal{L}(H)$ une application linéaire compacte normale ; pour chaque valeur propre λ notons E_λ l'espace propre de S associé (il est possible que 0 soit, ou ne soit pas valeur propre ; si H est de dimension infinie, 0 est toujours dans le spectre, mais S peut quand même être injectif). Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre, on sait que E_λ est de dimension finie ; l'espace E_0 (qui est le noyau de S) peut être de dimension infinie, ou bien de dimension finie, ou encore réduit à $\{0\}$ si S est injectif. On doit démontrer que :

- les E_λ sont deux à deux orthogonaux ;
- le sous-espace engendré par les E_λ est dense.

Alors si B_λ est une base hilbertienne de E_λ , la famille $\bigcup_\lambda B_\lambda$ sera la base voulue.

Si T est normal on remarque que

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*T(x) \rangle = \langle x, TT^*(x) \rangle = \|T^*(x)\|^2,$$

ce qui montre en appliquant à $T = S - \lambda \text{Id}_H$ que $S(x) = \lambda x$ équivaut à $S^*(x) = \bar{\lambda}x$. Les espaces E_λ sont donc stables par S et S^* , donc leur somme est stable, ainsi que l'adhérence F de cette somme.

Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ alors $\langle S(x), y \rangle = \mu \langle x, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ce qui montre que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

On a noté F le sous-espace fermé de H engendré par les E_λ . Montrons que F est égal à H , c'est à dire que $F^\perp = \{0\}$. On a $S(F) \subset F$ et $S^*(F) \subset F$. Il s'ensuit que $S(F^\perp) \subset F^\perp$ et $S^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Notons $S_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ la restriction de S . Alors S_1^* est la restriction de S^* , donc S_1 est normal. Remarquons que S_1 est compacte, qu'elle n'a pas de valeur propre (puisque tous les sous-espaces propres sont dans F) ; par le théorème 2, le spectre de S_1 est réduit à $\{0\}$. Par la proposition 5.2.1, la norme de S_1 est égale au rayon spectral de S_1 , c'est à dire 0 ; on a donc $S_1 = 0$; si on avait $F^\perp \neq \{0\}$, les vecteurs non nuls de F^\perp seraient dans le noyau E_0 de S , ce qui est impossible comme on l'a expliqué (on a mis le noyau dans F). On a donc $F^\perp = \{0\}$, d'où le résultat.

Cours n° 21, Mercredi 8 Décembre 1999.

Oubli : lorsque $S \in \mathcal{K}(E)$, on a vu que tout $\lambda \neq 0$ qui est dans le spectre de S est isolé dans le spectre, et alors ? il en résulte que dans toute couronne $\{z : \varepsilon \leq |z| \leq \|S\|\}$ (avec $\varepsilon > 0$) il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres (sinon il y aurait un point d'accumulation). On découpe en couronnes successives $C_n = \{z : 2^{-n-1} < |z| \leq 2^{-n} \|S\|\}$, pour $n \geq 0$, on range le nombre fini de valeurs propres contenues dans C_n à la suite des précédentes, et on construit ainsi une suite (λ_n) qui tend vers 0.

Compact hermitien réel

Dans le cas d'un opérateur hermitien compact S sur un espace de Hilbert réel H , le théorème de diagonalisation marche aussi. Quand $H \neq \{0\}$, on peut démontrer l'existence de valeurs propres ainsi : l'opérateur complexifié $S_{\mathbb{C}}$ est hermitien compact (exercice facile) ; si $H \neq \{0\}$, alors $H_{\mathbb{C}} \neq \{0\}$, donc il existe λ (réel) et un vecteur $z = x + iy \in H_{\mathbb{C}}$ non nul tels que $S_{\mathbb{C}}(z) = \lambda z$, ce qui donne puisque λ est réel que $S(x) = \lambda x$, $S(y) = \lambda y$; puisque z est non nul, x ou y est non nul, et on a obtenu un vecteur propre de S . La

démonstration fonctionne comme avant : si F désigne l'espace engendré par tous les sous-espaces propres E_λ de S , on vérifie comme avant que F^\perp est stable par S . La restriction de S à F^\perp n'admet aucun vecteur propre (ils sont tous dans F), donc $F^\perp = \{0\}$.

Remarque 6.1.3. Le théorème de diagonalisation des normaux est un théorème sur \mathbb{C} ; déjà en dimension réelle deux, une matrice normale 2×2 n'est pas forcément diagonalisable sur \mathbb{R} (prendre tout simplement une rotation d'angle différent de $k\pi$).

Exemple. Etude de V^*V , où $(Vf)(s) = \int_0^s f(t) dt$, opérant sur $L_2(0, 1)$. On a

$$(V^*V)(f)(s) = \int_s^1 (Vf)(t) dt.$$

Puisque V^*V est hermitien compact, on peut trouver une base orthonormée de $L_2(0, 1)$ formée de vecteurs propres ; les valeurs propres sont ≥ 0 . Les fonctions de l'image de V^*V sont dérivables, et si $(V^*V)(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, il en résulte que f est de classe C^∞ . En dérivant deux fois, $f'' = -\lambda^{-1}f$, $\lambda > 0$. On résout par les méthodes habituelles cette équation différentielle du second ordre, en tenant compte des conditions $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$. D'après le signe de λ , on cherche une combinaison de sin et cos. La valeur de la dérivée en 0 exclut les sinus, donc $f(s) = \cos(\alpha t)$ avec $\cos(\alpha) = 0$, et $\alpha^2 = \lambda$. On obtient $\lambda_k = (\pi/2 + k\pi)^2$, $k = 0, 1, \dots$. De plus, V est injectif, donc V^*V aussi et il n'y a pas de noyau : on est sûr d'avoir trouvé tous les vecteurs propres possibles, donc les fonctions $(f_k)_{k \geq 0}$ définies par $f_k(s) = \cos((\pi/2 + k\pi)s)$ forment une base orthogonale de $L_2(0, 1)$.

Exercice proposé. Exprimer V^*V comme opérateur à noyau $K(s, t)$.

6.2. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Bases hilbertiennes en deux variables : si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L_2(X, \mu)$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de $L_2(Y, \nu)$, il en résulte que les fonctions $(s, t) \rightarrow f_m(s)g_n(t)$ (où m, n prennent toutes les valeurs entières ≥ 0) donnent une base orthonormée de l'espace $L_2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

Exemple. Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés et $K(s, t)$ une fonction de carré intégrable sur $X \times Y$. On définit un opérateur T_K par

$$T_K f(s) = \int_Y K(s, t) f(t) d\nu(t).$$

On va d'abord montrer que $t \rightarrow K(s, t)f(t)$ est intégrable pour presque tout s , et on va montrer que T_K est défini de $L_2(Y, \nu)$ dans $L_2(X, \mu)$.

Avec Cauchy-Schwarz, on a

$$|T_K f(s)|^2 \leq \left(\int_Y |K(s, t)| |f(t)| d\nu(t) \right)^2 \leq \left(\int_Y |K(s, t)|^2 d\nu(t) \right) \left(\int_Y |f(t)|^2 d\nu(t) \right)$$

ce qui donne en réintégrant

$$\int_X |T_K f(s)|^2 d\mu(s) \leq \left(\int_{X \times Y} |K(s, t)|^2 d\mu(s) d\nu(t) \right) \left(\int_Y |f(t)|^2 d\nu(t) \right).$$

On trouve *a posteriori* que l'intégrale qui définit T_K est absolument convergente pour presque tout s . On voit donc que $\|T_K\| \leq \|K\|_2$.

Si K_N est de la forme $\sum_{m,n=0}^N a_{m,n} f_m(s) g_n(t)$, on voit facilement que T_{K_N} est de rang fini (l'image est contenue dans $\text{Vect}(f_0, \dots, f_N)$). Si K_n tend vers K en norme L_2 , il en résulte que les opérateurs de rang fini T_{K_n} convergent en norme d'opérateur vers T_K , qui est donc compact. On verra un peu mieux un peu plus loin.

On calcule l'adjoint de T_K : c'est l'opérateur de noyau $K^*(t, s) = \overline{K(s, t)}$.

Supposons que $X = Y$ et que K soit un noyau hermitien ; il existe alors une base orthonormée (f_n) telle que $T_K(f_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \geq 0$. Si on exprime $K(s, t) = \sum_{m,n} c_{m,n} f_m(s) \overline{f_n(t)}$, on voit que

$$T_K(f_p)(s) = \sum_{m,n} c_{m,n} \int f_m(s) \overline{f_n(t)} f_p(t) dt = \sum_m c_{m,p} f_m(s) = \lambda_p f_p(s),$$

ce qui montre que $c_{p,p} = \lambda_p$, et les autres coefficients $c_{m,p}$, pour $m \neq p$ sont nuls. On voit donc que tout noyau hermitien K sur X^2 se représente sous la forme

$$K(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n(s) \overline{f_n(t)}$$

où les λ_n sont réels, et (f_n) une base orthonormée.

Lemme 6.2.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens, B une base hilbertienne de E et B' une base hilbertienne de F ; pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :

$$\sum_{b \in B, b' \in B'} |\langle b', T(b) \rangle|^2 = \sum_{b \in B} \|T(b)\|^2 = \sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2$$

(valeur finie ≥ 0 ou bien $+\infty$). Cette quantité ne dépend pas des bases B et B' choisies.

Démonstration. Pour $x \in E$ et $y \in F$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle x, b \rangle|^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{b' \in B'} |\langle b', y \rangle|^2,$$

d'où la première assertion. Il est clair que $\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2$ ne dépend pas de B' et que $\sum_{b' \in B'} \|T^*(b')\|^2$ ne dépend pas de B , d'où la deuxième assertion. ■

Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose $\|T\|_2 = \left(\sum_{b \in B} \|T(b)\|^2 \right)^{1/2}$ où B est une base hilbertienne de E . Posons $\mathcal{L}^2(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \|T\|_2 < +\infty\}$.

Définition 6.2.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens ; un opérateur $T \in \mathcal{L}^2(E, F)$ est dit de *Hilbert-Schmidt*.

Exemples.

Prenons d'abord $E = F = \mathbb{C}^n$. Un opérateur T est représenté par une matrice $(a_{i,j})$ dans la base canonique ; si (e_j) désigne la base canonique, on a $\|T(e_j)\|^2 = \sum_i |a_{i,j}|^2$, donc la norme Hilbert-Schmidt est égale à

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $E = F = \ell_2$, un opérateur T peut se représenter par une matrice infinie $(a_{i,j})$, et on voit de même que la norme Hilbert-Schmidt est égale à

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i,j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Revenons aux opérateurs T_K . Si on écrit

$$K(s, t) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{m,n} f_m(s) \overline{g_n(t)},$$

on constate que $T_K(g_p) = \sum_m c_{m,p} f_m$, donc $\|T_K(g_p)\|^2 = \sum_m |c_{m,p}|^2$, et ensuite

$$\sum_p \|T_K(g_p)\|^2 = \sum_{m,p} |c_{m,p}|^2 = \|K\|_2^2 < +\infty.$$

Exercice proposé. Réciproquement, soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt de $L_2(Y)$ dans $L_2(X)$, et soit (g_n) une base hilbertienne de $L_2(Y)$. Soit $F_n = T(g_n)$. Alors

$$K(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(s) \overline{g_n(t)}$$

définit une fonction de $L_2(X \times Y)$, et $T = T_K$.

Théorème 6.2.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens ;

- (i) l'ensemble $\mathcal{L}^2(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$;
- (ii) pour tous opérateurs $S, T \in \mathcal{L}^2(E, F)$ et toute base hilbertienne B de E , la famille $(\langle S(b), T(b) \rangle)_{b \in B}$ est sommable ; l'application $(S, T) \rightarrow \sum_{b \in B} \langle S(b), T(b) \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(E, F)$, indépendant de la base B .

On note $(S, T) \rightarrow (S, T)_2$ ce produit scalaire ;

- (iii) muni de ce produit scalaire, $\mathcal{L}^2(E, F)$ est un espace hilbertien ;
- (iv) on a $\mathcal{L}^2(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$.

Démonstration. Voir poly.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert réel ou complexe. On appelle *module* de l'opérateur T l'opérateur $|T| = \sqrt{T^*T}$. Il s'agit d'un opérateur hermitien positif.

On remarque que

$$\forall x \in H, \quad \|T(x)\| = \||T|(x)\|.$$

En effet,

$$\||T|(x)\|^2 = \langle |T|(x), |T|(x) \rangle = \langle |T|^2(x), x \rangle = \langle T^*T(x), x \rangle = \|T(x)\|^2.$$

On montre qu'il existe un unique opérateur u nul sur $\ker(T)$ tel que $T = u|T|$. On dit que u est la phase de T .

Soit $T \in \mathcal{L}_2(E)$; d'après l'égalité ci-dessus il est clair que $|T|$ est Hilbert-Schmidt aussi, avec la même norme Hilbert-Schmidt que T . Puisque $|T|$ est hermitien positif et compact, il possède une suite de valeurs propres $(\lambda_n(|T|))$ (comptées avec leur multiplicité : j'ai oublié de le préciser). On dit que ces valeurs propres sont les *nombre*s *singuliers* de T , et ils sont notés $(s_n(T))$. On a donc

$$\|T\|_2 = \||T|\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(T)^2 \right)^{1/2}.$$

Réparation d'une omission

Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(T)$; nous distinguerons trois cas :

1. Le scalaire λ est une valeur propre de T , autrement dit $T - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.
2. Le scalaire λ est une valeur propre de tT , mais n'est pas une valeur propre de T ; d'après le lemme 5.2.4, cela se produit si et seulement si $T - \lambda \text{Id}_E$ est injectif mais n'a pas une image dense dans E .
3. Le scalaire λ n'est une valeur propre ni de T , ni de tT , mais λ est quand même dans le spectre de T . Alors, $T - \lambda \text{Id}_E$ est injectif, son image est dense mais n'est pas fermée.

Définition. Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$; on appelle *spectre ponctuel* de T l'ensemble $\text{Sp}_p(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda \text{Id}_E$ ne soit pas injectif (c'est l'ensemble des valeurs propres de T). On appelle *spectre résiduel* de T l'ensemble $\text{Sp}_r(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda \text{Id}_E$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense. On appelle *spectre continu* de T l'ensemble $\text{Sp}_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda \text{Id}_E$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

On voit que l'on a $\lambda \in \text{Sp}_c(T)$ si et seulement si : $\lambda \in \text{Sp}(T)$ **et** $T - \lambda \text{Id}_E$ est injectif à image dense ; en effet, l'image de $T - \lambda \text{Id}_E$ n'est alors pas fermée : si elle était fermée, elle serait égale à E , l'opérateur $T - \lambda \text{Id}_E$ serait un isomorphisme et λ ne serait pas dans le spectre de T .

7. Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints et unitaires

Un des objets importants que l'on veut introduire dans ce chapitre est celui de *projecteur spectral*. Commençons par un exemple simple. Supposons que T soit un opérateur hermitien d'un espace de Hilbert H séparable, réel ou complexe. Supposons de plus T compact. Si on veut découper l'espace de Hilbert H en deux sous-espaces tels que le premier concerne les valeurs propres positives ou nulles, et l'autre les valeurs propres < 0 , la solution est très simple : on sait qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ formée de vecteurs propres de T , c'est à dire que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout n ; on sait que λ_n est réel pour tout n . Posons

$$H_+ = \overline{\text{Vect}\{e_n : \lambda_n \geq 0\}}, \quad H_- = \overline{\text{Vect}\{e_n : \lambda_n < 0\}}.$$

Il est clair que l'on obtient ainsi une décomposition orthogonale de H en deux sous-espaces fermés invariants par T , et la restriction de T à H_+ est hermitienne positive. Notons P_+ le projecteur orthogonal sur H_+ et P_- le projecteur orthogonal sur H_- .

On peut envisager la question sous l'angle du calcul fonctionnel. Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} , on a vu que $f(T)(e_n) = f(\lambda_n)e_n$ pour tout n ; on voit donc qu'on obtiendrait P_- si on appliquait froidement cette formule à la fonction *non continue* $g = 1_{]-\infty, 0[}$; on aurait ainsi $g(T)(e_n) = e_n$ si $\lambda_n < 0$ et $g(T)(e_n) = 0$ sinon, ce qui donne bien $g(T) = P_-$. L'un des objectifs du chapitre est de justifier ce *calcul fonctionnel borélien*.

On va traiter le cas particulier de cette fonction g "à la main". La fonction g est l'indicatrice d'un ouvert. On peut l'obtenir comme limite simple croissante d'une suite de fonctions continues, par exemple en définissant f_n par $f_n(t) = 1$ si $t \leq -2^{-n}$, $f_n(t) = 0$

si $t \geq 0$ et f_n linéaire sur le segment $[-2^{-n}, 0]$. On vérifiera que (f_n) est croissante. On sait que $S_n = f_n(T)$ est un opérateur hermitien. De plus, puisque $f_{n+1} - f_n$ est une fonction réelle positive, il en résulte que $S_{n+1} - S_n$ est hermitien positif, c'est à dire que

$$\langle S_n(x), x \rangle \leq \langle S_{n+1}(x), x \rangle$$

pour tout $x \in H$. De plus, la norme de S_n est le sup de f_n sur le spectre de T , donc $\|S_n\| \leq 1$.

Lemme. Soit (S_n) une suite bornée d'opérateurs hermitiens, croissante pour l'ordre des hermitiens. Il existe un opérateur hermitien S tel que

$$\forall x \in H, \quad \|S_n(x) - S(x)\| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Soit $M = \sup_n \|S_n\|$; puisque la suite $\langle S_n(x), x \rangle$ est croissante et bornée par $\|S_n\| \|x\|^2 \leq M \|x\|^2$, elle est donc convergente. Par polarisation il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle S_n(x), y \rangle = B(x, y)$$

existe pour tous x, y , et $|B(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$. En passant à la limite et en utilisant le caractère hermitien de S_n on trouve que $(x, y) \rightarrow B(x, y)$ est une forme hermitienne. Pour y fixé, on a une forme linéaire continue $x \rightarrow B(x, y)$, que l'on peut représenter par un produit scalaire avec un vecteur qu'on appellera $S(y)$. On aura donc $B(x, y) = \langle x, S(y) \rangle$, et en utilisant le caractère hermitien on a aussi $B(x, y) = \langle S(x), y \rangle$. Il est clair que S est linéaire et la majoration précédente donne $\|S\| \leq M$. Par ailleurs S est hermitien parce que B est hermitienne.

Puisque $\langle S(x), x \rangle = B(x, x)$ est limite croissante de $\langle S_n(x), x \rangle$, on a $\langle S_n(x), x \rangle \leq \langle S(x), x \rangle$, ce qui montre que $S - S_n$ est positif. Mais pour un hermitien positif V on a vu avec Cauchy-Schwarz appliqué à la forme positive $\varphi(x, y) = \langle V(x), y \rangle$ que

$$\|V(x)\|^2 = \varphi(x, V(x)) \leq \sqrt{\varphi(x, x)} \sqrt{\varphi(V(x), V(x))} \leq \sqrt{\langle V(x), x \rangle} \sqrt{\|V\|} \|V(x)\|.$$

Il en résulte en appliquant à $V = S - S_n$ que

$$\|S(x) - S_n(x)\| \leq \sqrt{2M} \sqrt{\langle S(x) - S_n(x), x \rangle}$$

tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Revenons au problème de P_- ; la suite croissante de fonctions continues (f_n) tend vers $1_{]-\infty, 0[}$, donc $S_n = f_n(T)$ est une suite croissante bornée d'opérateurs hermitiens, qui converge vers un hermitien S au sens du lemme précédent (c'est la topologie forte des opérateurs, voir poly, chapitre 3). On va montrer que S est un projecteur. Fixons m et $x \in H$. Alors $f_m(T)(f_n(T)(x))$ converge vers $f_m(T)(S(x))$ quand n tend vers l'infini.

Je n'ai pas réussi à conclure à l'amphi. J'aurais dû dire : la suite $(f_m f_n)_n$ converge en croissant vers f_m , mais aussi uniformément (petit exercice), donc $f_m(T) f_n(T)$ converge vers $f_m(T)$ quand n tend vers l'infini. Le paragraphe précédent montre donc que $f_m(T)(S(x)) = f_m(T)(x)$. En reprenant la limite en m , il en résulte que $S(S(x)) = S(x)$, donc S est un projecteur hermitien, donc un projecteur orthogonal.

On pourrait poursuivre cette approche : on vient en gros d'expliquer comment définir les projecteurs spectraux pour les ouverts du spectre ; on suit la démonstration du théorème de Riesz (dual de $C(K)$) pour arriver jusqu'aux fonctions boréliennes bornées. . .

Mais en fait on choisira une autre voie dans la section suivante. Le théorème final est le suivant :

Théorème 7.2.2. *On se donne un espace de Hilbert H et un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose, ou bien que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que T est normal, ou bien que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que T est hermitien. Soit $K = \text{Sp}(T)$, et soit $\mathcal{L}_\infty(K, \mathcal{B})$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur K , à valeurs dans \mathbb{K} ; il existe un unique homomorphisme ψ_T d'algèbres de Banach unitaires sur \mathbb{K} , de $\mathcal{L}_\infty(K, \mathcal{B})$ dans $\mathcal{L}(H)$ tel que :*

$\psi_T(z_K) = T$ et pour toute suite bornée $(g_n) \subset \mathcal{L}_\infty(K, \mathcal{B})$ convergeant simplement vers g , la suite $\psi_T(g_n)$ converge fortement vers $\psi_T(g)$, c'est à dire que

$$\forall x \in H, \quad \|\psi_T(g_n)(x) - \psi_T(g)(x)\| \rightarrow 0.$$

De plus, en notant $f(T) = \psi_T(f)$, on a $(f(T))^ = \overline{f}(T)$. Si $f = 1_B$ est la fonction indicatrice d'un borélien B de K , l'opérateur $P_B = 1_B(T)$ est un projecteur orthogonal. Son image E_B est invariante par T et par T^* , et le spectre de la restriction $T|_{E_B}$ de T à E_B est contenu dans \overline{B} .*

Remarques. Première remarque, que j'ai oubliée de dire à l'amphi : évidemment $\psi_T(f)$ coïncide avec le résultat $\varphi_T(f)$ du calcul fonctionnel continu lorsque f est continue ; cela vient de l'unicité dans le calcul fonctionnel continu.

ATTENTION. L'homomorphisme ψ_T n'est pas isométrique (pour la norme uniforme sur \mathcal{L}_∞) ; en fait il n'est pas injectif en général. Si λ_0 est un point du spectre et si $f = 1_{\{\lambda_0\}}$, le projecteur spectral P_{λ_0} correspondant peut être nul : en effet, on peut vérifier que tout vecteur non nul de l'image de ce projecteur doit être vecteur propre de T , avec valeur propre λ_0 . Si λ_0 n'est pas valeur propre, l'image du projecteur sera nulle.

Démythification des opérateurs normaux

On dit que deux opérateurs $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ sont *unitairement équivalents* s'il existe un opérateur unitaire U de H_1 sur H_2 tel que

$$T_1 = U^* T_2 U.$$

On a expliqué que dans ce cas, T_1 et T_2 ont le même spectre K ; l'un des deux est normal si et seulement si l'autre est normal, et dans ce cas, le calcul fonctionnel continu pour T_1 se déduit de celui de T_2 par la même formule

$$f(T_1) = U^* f(T_2) U,$$

pour toute fonction continue f sur K . On va suivre cette idée pour le calcul borélien : trouver un modèle simple pour les opérateurs normaux (le modèle des opérateurs de multiplication), expliquer le calcul borélien pour ces opérateurs simples, et ramener le résultat par équivalence unitaire. Le théorème de représentation des normaux s'énonce ainsi :

Théorème 7.2.1. *Soient H un espace hilbertien séparable complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal ; il existe un espace mesuré σ -fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, une fonction $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tels que T soit unitairement équivalent à l'opérateur M_g de multiplication par g , défini sur $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ par*

$$\forall \xi \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad M_g(\xi)(\omega) = g(\omega)\xi(\omega).$$

La restriction H séparable est une restriction technique, qui tient à des problèmes de théorie de la mesure : on a envie de se limiter au cas σ -fini, et c'est ça qui introduit un caractère dénombrable.

A ce détail près, expliquons comment on déduira l'homomorphisme ψ_T de ces considérations : on va construire le calcul fonctionnel borélien ψ_{M_g} pour l'opérateur de multiplication M_g ; puisque T est unitairement équivalent à M_g , il existe un unitaire $U : H \rightarrow L_2(\Omega, \mu)$ tel que $T = U^* M_g U$, les deux opérateurs T et M_g ont même spectre K , et on posera

$$\psi_T(f) = U^* \psi_{M_g}(f) U$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur K .

Opérateurs de multiplication et spectre

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (pour abrégé nous noterons simplement (Ω, μ) dans la suite, lorsque la mention de la tribu \mathcal{A} ne sera pas utile) ; si ξ est une fonction de $L_2(\Omega, \mu)$, il est clair que le produit $g\xi$ est bien défini en tant que classe de fonctions et que $\|g\xi\|_2 \leq \|g\|_\infty \|\xi\|_2$. Par ce qui précède, $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. On voit facilement que M_g est normal (point oublié à l'amphi).

Proposition 7.1.1. *Le spectre de M_g est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{s \in X : |g(s) - \lambda| < \varepsilon\}$ ne soit pas μ -négligeable.*

Admis, voir poly.

On posera $K = \text{Sp}(M_g)$; c'est l'ensemble des *valeurs essentielles* de g ; c'est donc un compact de \mathbb{C} . On admettra (exercice) qu'on peut choisir un représentant \hat{g} de g , qui soit une vraie fonction mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$, mais qui de plus prenne toutes ses valeurs dans K . Dans toute la suite, on supposera qu'on a choisi ce représentant particulier \hat{g} , et on traitera g comme une vraie fonction mesurable, prenant ses valeurs dans K .

On a vu en exemple dans le chapitre calcul fonctionnel que le calcul des opérateurs de multiplication est simple : si f est une fonction continue sur K , on a

$$f(M_g) = M_{f \circ g}.$$

On va se laisser guider par cette formule pour définir le calcul borélien de M_g . Posons pour toute fonction borélienne bornée f sur K

$$\psi(f) = M_{f \circ g}.$$

On remarque que $f \circ g$ est la composition de deux vraies fonctions mesurables, donc c'est une fonction mesurable sur (Ω, \mathcal{A}) , bornée puisque f est bornée, ce qui permet de considérer l'opérateur de multiplication par $f \circ g$ sur $L_2(\Omega, \mu)$.

Il faut montrer que ψ possède les propriétés demandées dans l'énoncé du théorème 7.2.2. Il est clair que $\psi(f_1 f_2) = \psi(f_1) \psi(f_2)$, car $\psi(f_1 f_2)$ est l'opérateur qui multiplie $\xi(\omega)$ par

$$(f_1 f_2)(g(\omega)) = f_1(g(\omega)) f_2(g(\omega))$$

et qui peut s'obtenir en multipliant successivement ξ par $f_2 \circ g$ puis par $f_1 \circ g$. Si $f = 1$ sur K , alors $1 \circ g$ est la fonction constante égale à 1 sur Ω , donc $\psi(1)$ est l'identité

de $L_2(\Omega, \mu)$. Ceci montre que ψ est un homomorphisme d'algèbres unitaires. De plus $\|M_{f \circ g}\| \leq \|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ montre que ψ est continue de $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K}, \mathcal{B})$, muni de la norme du sup, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ muni de la norme d'opérateur.

Passons aux autres propriétés : on voit que $z_{\mathbf{K}} \circ g = g$, donc $\psi(z_{\mathbf{K}})$ est la multiplication par g , soit $\psi(z_{\mathbf{K}}) = M_g$. Pour finir, soit (f_n) une suite de fonctions bornées, disons par M , qui converge simplement vers f sur \mathbf{K} ; pour toute $\xi \in L_2(\Omega, \mu)$, la suite de fonctions

$$\omega \rightarrow |f_n(g(\omega))\xi(\omega) - f(g(\omega))\xi(\omega)|^2$$

converge simplement vers 0 sur Ω en étant dominée par la fonction intégrable fixe $4M^2 |\xi|^2$. D'après le théorème de Lebesgue, on aura que

$$\|\psi(f_n)(\xi) - \psi(f)(\xi)\|^2 = \int_{\Omega} |f_n(g(\omega))\xi(\omega) - f(g(\omega))\xi(\omega)|^2 d\mu(\omega)$$

tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

7.2. Décomposition spectrale

On va maintenant esquisser l'approche du théorème de représentation 7.2.1. Donnons une illustration dans un cas simple. Supposons que \mathbf{T} soit un opérateur autoadjoint compact sur \mathbf{H} ; il existe alors une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ tendant vers 0 de valeurs propres de \mathbf{T} ; supposons ces valeurs propres deux à deux distinctes et non nulles ; le spectre \mathbf{K} de \mathbf{T} est l'adhérence de l'ensemble des points de la suite (λ_n) , c'est à dire que

$$\mathbf{K} = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 0\}.$$

Par ailleurs, on peut trouver une base orthonormée $(e_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{H} formée de vecteurs propres de \mathbf{T} , qui vérifient donc $\mathbf{T}(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \geq 0$. Choisissons maintenant un vecteur $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n$ tel que $c_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour toute fonction f continue sur \mathbf{K} , l'opérateur $f(\mathbf{T})$ est l'opérateur qui vérifie $f(\mathbf{T})(e_n) = f(\lambda_n)e_n$ pour tout $n \geq 0$; on a donc $f(\mathbf{T})(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)c_n e_n$; considérons la mesure μ_x sur \mathbf{K} donnée par $\mu_x = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 \delta_{\lambda_n}$. On a

$$\|f(\mathbf{T})(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |f(\lambda_n)|^2 |c_n|^2 = \int_{\mathbf{K}} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) = \|f\|_{L_2(\mathbf{K}, \mu_x)}^2,$$

ce qui montre que l'application $f \rightarrow f(\mathbf{T})(x)$, définie de $C(\mathbf{K})$ dans \mathbf{H} , se prolonge en une isométrie u_x de $L_2(\mathbf{K}, \mu_x)$ dans \mathbf{H} . Décrivons plus en détail l'application u_x : chaque fonction $g \in L_2(\mathbf{K}, \mu_x)$ est déterminée par la donnée de ses valeurs aux points λ_n , disons $g(\lambda_n) = d_n$, qui vérifient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |d_n|^2 |c_n|^2 = \|g\|_2^2 < \infty.$$

L'opérateur u_x agit par $u_x(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n c_n e_n$. On voit que u_x est surjectif sous les hypothèses que nous avons faites ; par ailleurs, faisons agir la multiplication par $z_{\mathbf{K}}$ sur $L_2(\mathbf{K}, \mu_x)$; la fonction g devient $g' = z_{\mathbf{K}}g$, dont la valeur au point λ_n sera $d'_n = \lambda_n d_n$, et sa traduction $u_x(g') = u_x(z_{\mathbf{K}}g)$ est

$$u_x(z_{\mathbf{K}}g) = \sum_{n=0}^{+\infty} d'_n c_n e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n d_n c_n e_n = \mathbf{T}(u_x(g)).$$

On voit qu'à travers le "dictionnaire" u_x , l'opérateur T correspond à la multiplication par z_K sur $L_2(K, \mu_x)$: c'est l'équivalence unitaire cherchée.

L'opérateur u_x est surjectif sous les hypothèses que nous avons faites ; mais ce n'est pas toujours le cas : supposons que les valeurs propres (λ_n) restent comme avant, mais que chaque espace propre E_{λ_n} soit maintenant de dimension deux, engendré par deux vecteurs propres e_n et e'_n de norme un et orthogonaux. L'espace H se découpe en deux morceaux, le morceau H_1 engendré par les (e_n) et le morceau H_2 engendré par les (e'_n) ; si on garde $x = \sum_n c_n e_n$, on voit que les vecteurs $f(T)(x)$ restent toujours du côté du morceau H_1 ; l'isométrie u_x définie sur $L_2(K, \mu_x)$ n'est plus surjective, son image est le premier morceau H_1 , et on a simplement représenté un morceau de l'opérateur T . Si on veut récupérer l'autre morceau, il faudra prendre un deuxième vecteur $x' = \sum_n c_n e'_n$, qui fournira une isométrie $u_{x'}$ d'une autre copie de $L_2(K, \mu_x)$ sur le deuxième morceau H_2 . Pour représenter T , il faudra recoller les deux morceaux, en définissant un espace mesuré Ω formé de deux copies de K , par exemple $K \times \{1\}$ et $K \times \{2\}$, ce qui donne $\Omega = K \times \{1, 2\}$, définir la fonction de multiplication g sur Ω par $g(\lambda, j) = \lambda$ (la multiplication par z_K sur chaque copie de K), et la mesure μ en ajoutant les deux mesures définies sur les deux bouts. Cette longue explication est censée éclairer ce qui se passe réellement dans le cas général.

Soient H un espace hilbertien complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément normal et $x \in H$ un vecteur fixé non nul ; il sera commode de noter

$$f \cdot x = f(T)(x)$$

pour toute fonction continue f sur $K = \text{Sp}(T)$ (certains reconnaîtront qu'on est en train de définir une structure de $C(K)$ -module sur H). On notera F_x le sous-espace vectoriel de H obtenu en considérant tous les vecteurs de la forme $f \cdot x$, lorsque f varie dans $C(K)$; ce sous-espace n'est pas fermé en général.

On va généraliser ce qui a été dit ci-dessus : on va montrer qu'on peut représenter ce qui se passe sur F_x pour l'opérateur T , en utilisant la multiplication par z_K dans un espace $L_2(K, \mu_x)$. On veut donc que

– la correspondance $f \in C(K) \rightarrow f \cdot x \in F_x$ soit isométrique, de la norme $L_2(K, \mu_x)$ vers la norme de H ;

– que la multiplication par z_K du côté de $L_2(K, \mu_x)$ corresponde à l'action de T du côté de H , c'est à dire que $(z_K f) \cdot x = T(f \cdot x)$.

Le deuxième point est automatique, puisque $(z_K f) \cdot x = (z_K f)(T)(x) = Tf(T)(x) = T(f \cdot x)$. Le problème est de trouver μ_x . Si on a isométrie, on aura aussi conservation du produit scalaire de $L_2(K, \mu_x)$ à H , donc on aura

$$\langle f_1 \cdot x, f_2 \cdot x \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle = \int_K f_1 \bar{f}_2 d\mu_x$$

pour toutes f_1, f_2 , et en particulier si $f_2 = 1$, on devra avoir, puisque $1 \cdot x = x$

$$\int_K f d\mu_x = \langle f, 1 \rangle = \langle f \cdot x, x \rangle = \langle f(T)(x), x \rangle$$

pour toute fonction continue f sur K . Mais $\ell : f \rightarrow \langle f(T)(x), x \rangle$ définit une forme linéaire continue sur $C(K)$; de plus, lorsque f est réelle positive, $f(T)$ est hermitien positif donc $\ell(f) \geq 0$ dans ce cas ; d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure positive μ_x sur K qui vérifie les équations voulues.

Pour l'instant la correspondance isométrique $f \rightarrow f \cdot x$ est définie de $C(K)$, muni de la norme $L_2(K, \mu_x)$, à valeurs dans le sous-espace non fermé F_x ; puisque $C(K)$ est dense dans $L_2(K, \mu_x)$, on peut prolonger en une isométrie u_x de $L_2(K, \mu_x)$ sur $E_x = \overline{F_x}$. On a de plus

$$T(u_x(f)) = u_x(z_K f)$$

pour toute fonction $f \in L_2(K, \mu_x)$. Tout ceci montre que la restriction de T au sous-espace stable E_x est unitairement équivalente à la multiplication par z_K dans $L_2(K, \mu_x)$.

Pour continuer, on décomposera H en somme directe orthogonale d'espaces de la forme E_x , correspondant à une famille dénombrable de vecteurs x (parce que H est séparable), et on fabriquera Ω en recollant cette suite de morceaux : voir poly !!

Cours n° 23, Mercredi 15 Décembre 1999.

Exercice proposé. Soit $f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$, μ une mesure σ -finie sur (Ω, \mathcal{A}) ; soit (B_n) une base dénombrable d'ouverts de \mathbb{C} (tout ouvert de \mathbb{C} est réunion d'une sous-famille de cette famille) ; on pose

$$V = \bigcup \{B_m : \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B_m\} = 0\}.$$

Montrer que $K = \mathbb{C} \setminus V$ est un compact non vide. Montrer que $\|f\|_{L_\infty(\Omega, \mu)} = \max\{|z| : z \in K\}$. Soit $\lambda_0 \in K$ et soit \hat{f} définie sur Ω par $\hat{f}(\omega) = f(\omega)$ si $f(\omega) \in K$ et $\hat{f}(\omega) = \lambda_0$ sinon. Montrer que $\hat{f} = f$ presque partout (pour μ). Montrer qu'il existe une classe $g \in L_\infty(\Omega, \mu)$ telle que $gf = 1$ (presque partout) si et seulement si $0 \notin K$.

8. Décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint (non borné).

8.1. Opérateurs « non bornés »

Préliminaires algébriques

Dans cette sous-section il ne sera question que d'algèbre linéaire : pas un poil de topologie. Soient E et F deux espaces vectoriels ; une *application linéaire partiellement définie* (plus loin, on dira un *opérateur*) T de E dans F est donnée par un sous-espace vectoriel $\text{dom}(T)$ de E appelé *domaine* de T et une application linéaire (usuelle) f de $\text{dom}(T)$ dans F ; pour tout $x \in \text{dom}(T)$ on pose $T(x) = f(x)$.

Autrement dit, la donnée T est celle de $(E, F, \text{dom}(T), f)$. Dans la suite, on ne fera plus la distinction entre $f(x)$ et $T(x)$, lorsque $x \in \text{dom}(T)$, et on laissera tomber complètement f .

On appelle *image* de T le sous-espace $\text{im}(T) = T(\text{dom}(T))$ de F .

Soit T une application linéaire partiellement définie ; le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $E \times F$ égal à $\text{Gr}(T) = \{(x, T(x)) : x \in \text{dom}(T)\}$. La restriction à $\text{Gr}(T)$ de la première projection est injective.

Réciproquement, soit G un sous-espace vectoriel de $E \times F$ et supposons que la restriction de la première projection à G soit injective. Autrement dit, si $(x, y) \in G$ et $(x, y') \in G$, alors $y = y'$; ou encore : si $(0, y) \in G$, alors $y = 0$. On pourra dire que G est un *graphe partiel*.

Tout graphe partiel ainsi défini est le graphe d'une unique application linéaire partiellement définie T : exercice facile. La correspondance qui à T associe son graphe est

une correspondance bijective entre applications linéaires partiellement définies et graphes partiels.

Désormais on dira *opérateur* au lieu d'application linéaire partiellement définie.

On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\text{Gr}(T) \subset \text{Gr}(S)$. On écrit alors $T \subset S$.

Soient S et T deux opérateurs de E dans F ; on définit l'opérateur $S + T$ en posant $\text{dom}(S + T) = \text{dom}(S) \cap \text{dom}(T)$ et en posant $(S + T)(x) = S(x) + T(x)$ pour tout vecteur $x \in \text{dom}(S + T)$.

Soient E, F et G des espaces vectoriels, T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans G ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\text{dom}(ST) = \{x \in \text{dom}(T) : T(x) \in \text{dom}(S)\}$ et en posant $(ST)(x) = S(T(x))$ pour tout $x \in \text{dom}(ST)$.

Exercice évident proposé : Si R est un opérateur de G dans un quatrième espace vectoriel H , on a $(RS)T = R(ST)$.

Un opérateur T de E dans F est dit *injectif* si l'application $T : \text{dom}(T) \rightarrow F$ est injective. Soit T un opérateur injectif de E dans F ; le sous-ensemble de $F \times E$ égal à $\{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \text{Gr}(T)\}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1} (de domaine $\text{im}(T)$) appelé *inverse* de T . Clairement T^{-1} est injectif et $(T^{-1})^{-1} = T$.

Exemples.

1. On prend $E = F = L_2(\mathbb{R})$, $\text{dom}(T)$ est l'espace des fonctions C^1 à support compact et $T(f) = f'$ pour $f \in \text{dom}(T)$.

2. Cet exemple se décline en trois variantes.

– 2a : on prend $E = F = L_2([0, 1])$, $\text{dom}(T_1)$ est l'espace des fonctions C^1 sur $[0, 1]$ et $T_1(f) = f'$ pour $f \in \text{dom}(T_1)$.

– 2b : on prend $E = F = L_2([0, 1])$, $\text{dom}(T_2)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$, et $T_2(f) = f'$ pour $f \in \text{dom}(T_2)$.

– 2c : on prend $E = F = L_2([0, 1])$, $\text{dom}(T_3)$ est l'espace des fonctions f qui sont C^1 sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = f(1)$, et $T_3(f) = f'$ pour $f \in \text{dom}(T_3)$.

Ça a l'air de pinaillages ridicules, mais on verra plus loin à propos des adjoints qu'il y a des différences importantes dans les propriétés de T_1, T_2 et T_3 .

La topologie revient

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *densément défini* si son domaine est dense dans E .

Par exemple, les opérateurs T, T_1, T_2 et T_3 des exemples ci-dessus sont tous densément définis.

Définition 8.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors $\text{Gr}(S)$ contient $\text{Gr}(T)$, donc son adhérence $\overline{\text{Gr}(T)}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\text{Gr}(T)}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur \overline{T} tel que $\text{Gr}(\overline{T}) = \overline{\text{Gr}(T)}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\text{Gr}(T)} \cap (\{0\} \times F) = \{(0, 0)\}$. On en déduit immédiatement :

Proposition 8.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur de E dans F ; pour que T soit fermable il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) de $\text{dom}(T)$ qui converge vers 0 dans E et telle que $T(x_n)$ converge dans F vers un vecteur y , on ait $y = 0$.

Exemple. Fermetures de T , T_1 , T_2 et T_3 .

Commençons par T de l'exemple **1**, défini sur $L_2(\mathbb{R})$. On va montrer que T est fermable et isoler un candidat pour la fermeture. Supposons que (f, g) soit dans l'adhérence de $\text{Gr}(T)$; il existe une suite $(f_n) \subset C_{\text{comp}}^1$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans L_2 et $f_n' \rightarrow g$ dans L_2 . Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} \setminus E$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in E$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans \mathbb{R} . Fixons $a \in E$, et soit $x \in E$; pour tout n on a

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt,$$

et la convergence dans L_2 implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc compte tenu de tout

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Mais la fonction $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ est continue pour tout x , et on peut redéfinir f sur l'ensemble négligeable $\mathbb{R} \setminus E$ par la formule $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Il en résulte que f est continue, et qu'il existe une fonction $g \in L_2$ telle que

$$\forall x < y, \quad f(y) = f(x) + \int_x^y g(t) dt.$$

On a introduit l'ensemble

$$G_1 = \{(f, g) \in L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) : \forall x < y, \quad f(y) = f(x) + \int_x^y g(t) dt\}.$$

On vient de montrer que l'adhérence de $\text{Gr}(T)$ est contenue dans G_1 ; pour savoir que T est fermable, il suffit de voir que G_1 est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si $(0, g) \in G_1$, on aura $\int_x^y g = 0$ pour tous $x < y$, ce qui signifie que g est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans $L_2(\mathbb{R})$, donc $g = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice proposé. Montrer que l'adhérence du graphe de T est égale à G_1 .

On appelle $H_1(\mathbb{R})$ (espace de Sobolev) l'espace des fonctions $f \in L_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $g \in L_2(\mathbb{R})$ telle que $(f, g) \in G_1$. On dit que g est la dérivée généralisée de f , et on note simplement $g = f'$. La fermeture de T de l'exemple **1** et donc l'opérateur \bar{T} de $L_2(\mathbb{R})$ dans lui-même dont le domaine est $H_1(\mathbb{R})$ et qui est défini par $\bar{T}(f) = f'$ pour $f \in H_1(\mathbb{R})$.

On définit de même l'espace $H_1([0, 1])$ des fonctions $f \in L_2([0, 1])$ (en fait f sera continue) telles qu'il existe une fonction $g \in L_2([0, 1])$ telle que $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt$, pour tout $x \in [0, 1]$.

Si on se rappelle l'opérateur-exemple V de $L_2([0, 1])$ dans lui-même qui associe à chaque $g \in L_2([0, 1])$ sa "primitive" nulle en zéro, on voit que $H_1([0, 1])$ est égal à $\text{im}(V) + \mathbb{K}1$.

On peut vérifier que les fermetures des variantes 2a, 2b, 2c sont définies sur les domaines

- a : $f \in H_1([0, 1])$
- b : $f \in H_1([0, 1])$ et $f(0) = f(1) = 0$
- c : $f \in H_1([0, 1])$ et $f(0) = f(1)$.

Dans les trois cas $j = 1, 2, 3$ la valeur de $\overline{T}_j(f)$ quand f est dans le domaine est égale à f' , la dérivée généralisée de f .

Proposition 8.1.2. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermé de E dans F ; on a $\text{Gr}(T^{-1}) = \rho(\text{Gr}(T))$ où $\rho : E \times F \rightarrow F \times E$ est l'homéomorphisme $(x, y) \rightarrow (y, x)$, donc $\text{Gr}(T^{-1})$ est fermé. ■

Exemple. Revenons à l'opérateur borné V de $L_2([0, 1])$ dans lui-même; si S est une application linéaire continue de E dans F , elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose $\text{dom}(S) = E$ et $S(x)$ aura le sens habituel pour tout $x \in E$; c'est ce qu'on fera pour V ; on se rappelle que V est injectif; on peut donc définir un V^{-1} au sens des non bornés, dont le domaine est $\text{im}(V)$; puisque V est continu, son graphe est fermé, donc V^{-1} est fermé. On peut vérifier que V^{-1} est densément défini. Les opérateurs fermés et densément définis forment la classe la plus intéressante dans cette théorie.

8.2. Spectre des opérateurs fermés

Définition 8.2.1. Soient T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $T - \lambda \text{Id}_E$ est une application linéaire bijective de $\text{dom}(T)$ sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire continue de E dans lui-même. On appelle *spectre* de T le complémentaire $\text{Sp}(T)$ dans \mathbb{C} de l'ensemble des valeurs régulières de T .

Exemple. Soit F un sous-ensemble fermé non vide de \mathbb{C} , et désignons par $dxdy$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Dans l'espace $L_2(F, dxdy)$, on veut définir un opérateur non borné M qui multiplie une fonction f par la fonction $z_F : z \in F \rightarrow z$. On a un domaine tout indiqué,

$$\text{dom}(M) = \left\{ f \in L_2(F, dxdy) : \int_F |(x + iy) f(x + iy)|^2 dxdy < +\infty \right\}.$$

Montrons que tout $\lambda \notin F$ est une valeur régulière, c'est à dire que $\text{Sp}(M) \subset F$. Si $\lambda \notin F$, il existe puisque F est fermé un $\varepsilon > 0$ tel que $|z - \lambda| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in F$. L'application de multiplication par $(z - \lambda)^{-1}$ est donc bornée par ε^{-1} sur $L_2(F, dxdy)$, et elle sera l'inverse de $M - \lambda \text{Id}$. Il resterait à vérifier que $M - \lambda \text{Id}$ est injective, surjective...

Oubli : on appelle $R_\lambda(T)$ l'inverse de $T - \lambda \text{Id}$, quand λ est une valeur régulière de l'opérateur T .

Retour sur un exemple de spectre. Soit μ une mesure sur \mathbb{C} , positive et non nulle, donnant une mesure finie à tout compact. On considère dans $L_2(\mu) = L_2(\mathbb{C}, \mu)$ l'application de multiplication par z , définie sur le domaine

$$D = \{f \in L_2(\mu) : \int_{\mathbb{C}} |z|^2 |f(z)|^2 d\mu(z) < +\infty\},$$

ce qui donne un opérateur, en général non borné, qu'on notera M , qui agit sur $f \in D$ par $(Mf)(z) = zf(z)$, et $Mf \in L_2(\mu)$. On peut décrire l'appartenance de f au domaine D en une seule formule,

$$\int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2) |f(z)|^2 d\mu(z) < +\infty.$$

On suppose d'abord que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait que $B = B(\lambda, \varepsilon)$ vérifie $\mu(B) > 0$. On peut considérer la fonction $f = 1_B$, qui est dans le domaine D , et qui n'est pas dans la classe nulle puisque $\mu(B) > 0$. On a $|(M - \lambda)f| = |z - \lambda| 1_B \leq \varepsilon 1_B$. Ceci montre que $\|(M - \lambda)f\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_2$; si l'inverse $R_\lambda(M)$ de $M - \lambda \text{Id}$ existait, il devrait vérifier $\|R_\lambda(M)\| \geq 1/\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est impossible. Il en résulte que $\lambda \in \text{Sp}(T)$.

Remarquons en passant : si μ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{C} , toutes les boules ouvertes sont de mesure > 0 , donc le spectre de M est \mathbb{C} tout entier dans ce cas. On obtient aussi que $\text{Sp}(T) = \mathbb{C}$ dans un cas un peu dégénéré, celui où T n'est pas fermé : en effet, s'il existe une valeur régulière λ pour T , l'opérateur $R_\lambda(T)$ est continu, donc son graphe est fermé, donc le graphe de l'inverse $T - \lambda \text{Id}$ de $R_\lambda(T)$ est fermé, donc $T - \lambda \text{Id}$ est fermé, donc T est fermé ; si T n'est pas fermé, il n'existe donc aucune valeur régulière, par conséquent $\text{Sp}(T) = \mathbb{C}$.

On suppose inversement que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mu(B(\lambda, \varepsilon_0)) = 0$. Considérons la fonction mesurable bornée g définie sur \mathbb{C} par $g(z) = (z - \lambda)^{-1}$ si $|z - \lambda| \geq \varepsilon_0$ et $g(z) = 0$ sinon. La multiplication M_g est bornée sur $L_2(\mu)$ puisque g est bornée, et on va voir que $M_g = R_\lambda(M)$. Si $f \in \text{dom}(M)$, on voit que $M_g(M(f) - \lambda f) = g(z - \lambda)f$ est égale à f en dehors de B , et à 0 dans B ; mais puisque $\mu(B) = 0$, on a bien $M_g(M(f) - \lambda f) = f$ en tant que classe. Inversement, si $h \in L_2(\mu)$, on vérifie que $M_g(h) \in \text{dom}(M)$ (en effet,

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^2 |(M_g h)(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |z|^2 |g(z)h(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |zg(z)|^2 |h(z)|^2 d\mu(z) < +\infty$$

parce que $zg(z)$ est bornée sur \mathbb{C}) et ensuite $(M - \lambda \text{Id})(M_g(h)) = h$. On a bien montré que $M_g = R_\lambda(M)$.

En bref, le spectre de T est exactement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ décrit précédemment, c'est à dire les λ dont tout voisinage a une μ -mesure > 0 .

Si $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \delta_{z_n}$, où (z_n) est une suite quelconque de points de \mathbb{C} , on déduit de ce qui précède que le spectre de M est l'adhérence F de l'ensemble des points de la suite. Cela nous permet de dire que tout fermé non vide de \mathbb{C} est le spectre d'un opérateur. C'est vrai aussi pour l'ensemble vide, comme on le verra avec l'exemple qui suit.

Exemple.

On désigne par V l'opérateur borné de $E = L_2([0, 1])$ dans lui-même défini par $(Vf)(t) = \int_0^t f(s) ds$. L'image de V est l'ensemble D des fonctions F de $H^1([0, 1])$ qui sont nulles en 0, et on a vu que V est injectif. On peut donc considérer l'opérateur $T = V^{-1}$, dont le domaine est D .

Evidemment, 0 est valeur régulière de T et $R_0(T) = V$. Pour $\lambda \neq 0$, cherchons à résoudre l'équation $Tx - \lambda x = y$, pour $y \in E$ donné (on cherche $x \in D$). Puisque T est surjectif, on peut écrire $y = Tz$, avec $z = V(y) \in D$. En appliquant V on trouve $x - \lambda Vx = z$, soit $Vx - \lambda^{-1}x = -\lambda^{-1}z$. On sait que λ^{-1} n'est pas dans le spectre de V (qui est réduit à $\{0\}$) donc on peut résoudre,

$$x = R_{\lambda^{-1}}(V)(-\lambda^{-1}z) = -\lambda^{-1}R_{\lambda^{-1}}(V)(Vy).$$

On vient donc d'identifier $R_\lambda(T) = -\lambda^{-1}R_{\lambda^{-1}}(V)V$. Finalement, on constate que tout nombre complexe est valeur régulière de T , donc le spectre de $T = V^{-1}$ est vide.

Lemme 8.2.1. *Soient T un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui-même et λ une valeur régulière de T non nulle ; alors λ^{-1} est une valeur régulière de T^{-1} et on a*

$$R_{\lambda^{-1}}(T^{-1}) = -\lambda TR_\lambda(T) = -\lambda \text{Id}_E - \lambda^2 R_\lambda(T).$$

Démonstration. On veut résoudre pour tout $y \in E$ l'équation $(T^{-1} - \lambda^{-1} \text{Id}_E)(x) = y$ (on cherche $x \in \text{dom}(T^{-1}) = \text{im}(T)$). Puisque λ est régulière pour T , on peut écrire $y = (T - \lambda \text{Id})(z)$, avec $z = R_\lambda(T)(y)$. On sait alors que $z \in \text{dom}(T) = \text{im}(T^{-1})$, donc il existe $u \in \text{im}(T)$ tel que $z = T^{-1}(u)$. L'équation proposée est donc

$$T^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = (T - \lambda \text{Id})(T^{-1}(u)) = u - \lambda T^{-1}(u) = T^{-1}(-\lambda u) - \lambda^{-1}(-\lambda u).$$

Il en résulte que $x_0 = -\lambda u$ convient. Par ailleurs, $T^{-1} - \lambda^{-1} \text{Id}$ est injectif (donc la solution x_0 est unique) : si $x \in \text{dom}(T^{-1})$ et $T^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = 0$, alors $x = \lambda T^{-1}(x) \in \text{dom}(T)$ et $T(x) = \lambda x$ implique $x = 0$ puisque λ est régulière pour T . Si $R_{\lambda^{-1}}(T^{-1})$ existe, on a donc

$$x = R_{\lambda^{-1}}(T^{-1})(y) = -\lambda u = -\lambda T(z) = -\lambda TR_\lambda(T)(y).$$

Il reste à expliquer pourquoi l'opérateur $TR_\lambda(T)$ est borné. Cela provient de l'égalité $(T - \lambda \text{Id})R_\lambda(T) = \text{Id}$, qui donne $TR_\lambda(T) = \lambda R_\lambda(T) + \text{Id}$, qui est bien continu. ■

Proposition 8.2.1. (i) *Le spectre d'un opérateur fermé T d'un espace de Banach E dans lui-même est une partie fermée de \mathbb{C} .*

(ii) *L'application $\lambda \rightarrow R_\lambda(T)$ est continue et dérivable du complémentaire du spectre dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. Montrons le premier point ; si $\text{Sp}(T) = \mathbb{C}$, le spectre est bien fermé ; nous supposons donc maintenant $\text{Sp}(T) \neq \mathbb{C}$; quitte à remplacer T par $T - \lambda \text{Id}_E$, on peut supposer que 0 est valeur régulière de T . Posons $S = R_0(T) = T^{-1}$. Il résulte alors du lemme 1 que $\text{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda^{-1} \in \text{Sp}(S)\}$ et comme $\text{Sp}(S)$ est une partie compacte de \mathbb{C} , $\text{Sp}(T)$ est une partie fermée de \mathbb{C} .

Pour le point (ii), voir le poly.

8.3. Adjoint

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur densément défini de E dans F ; on définit *le transposé* de T , qui est un opérateur de F^* dans E^* , de la façon suivante : le domaine de tT est l'ensemble des $y^* \in F^*$ telles que la forme linéaire $x \in \text{dom}(T) \rightarrow y^*(T(x))$ soit continue.

Dans le cas où $y^* \in \text{dom}({}^tT)$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\text{dom}(T) \subset E$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in E^*$ continue sur E . On pose alors ${}^tT(y^*) = x^*$. On a donc

$$({}^tT)(y^*)(x) = y^*(T(x))$$

pour tous $x \in \text{dom}(T)$ et $y^* \in \text{dom}({}^tT)$.

Soient E et F deux espaces hilbertiens et T un opérateur densément défini de E dans F ; on refait la même chose en identifiant les formes linéaires continues sur E ou sur F à des produits scalaires avec des vecteurs de E ou de F . On définit *l'adjoint* de T qui est un opérateur T^* de F dans E en définissant $\text{dom}(T^*)$ comme l'ensemble des $y \in F$ tels que $x \in \text{dom}(T) \rightarrow \langle T(x), y \rangle$ soit continue ; dans ce cas cette forme linéaire se prolonge à E tout entier par densité, donc il existe un vecteur $T^*(y) \in E$ tel que

$$\forall x \in \text{dom}(T), \langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle.$$

Un opérateur T de E (hilbertien) dans lui-même est dit *autoadjoint* si $T = T^*$.

On dit que T (densément défini sur un Hilbert) est *symétrique* si

$$\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$$

pour tous $x, y \in \text{dom}(T)$. Tout autoadjoint est symétrique mais l'inverse n'est pas vrai.

Cours n° 25, Mercredi 5 Janvier 2000.

Résumé. Soient E et F deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de E dans F . Le couple $(y, x) \in F \times E$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$(*) \quad \langle T(u), y \rangle = \langle u, x \rangle$$

pour tout $u \in \text{dom}(T)$. En effet, la forme linéaire $u \rightarrow \langle T(u), y \rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \rightarrow \langle x, u \rangle$ et dans ce cas on a $x = T^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition (*) définit un ensemble fermé de couples (y, x) , ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

On dit que T densément défini sur E hilbertien est symétrique si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in \text{dom}(T)$. Cela revient à dire que $T \subset T^*$. Si $T = T^*$, on dit que T est autoadjoint.

Exercice traité. Adjoint des exemples 2a, 2b, 2c du cours numéro 23.

Posons $E = L_2([0, 1])$. Dans l'exemple 2c, on définit un opérateur T_c dont le domaine est

$$D_c = \{f \in H^1([0, 1]) : f(0) = f(1)\}$$

et on pose ensuite $T_c(f) = if'$ pour toute $f \in D_c$; on va montrer que T_c est autoadjoint (ça n'est pas tout à fait la même définition qu'auparavant, mais c'est celle qu'il faut pour trouver un exemple d'opérateur autoadjoint).

On montre d'abord que T_c est symétrique, c'est à dire que

$$\langle f_1, T_c(f_2) \rangle = \langle T_c(f_1), f_2 \rangle$$

pour toutes $f_1, f_2 \in D_c$. Or

$$\langle f_1, T_c(f_2) \rangle = \int_0^1 f_1 \overline{(if_2')} = [f_1 \overline{(if_2)}]_0^1 - \int_0^1 f_1' \overline{(if_2)} = \int_0^1 (if_1') \overline{f_2} = \langle T_c(f_1), f_2 \rangle$$

(le terme $[.]_0^1$ est nul parce que toutes les fonctions ont la même valeur en 0 et en 1 par définition de D_c). On montrerait de la même façon que l'exemple 2b, défini sur $D_b = \{f \in H^1([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ est symétrique : c'est évident puisque $T_b \subset T_c$.

On sait donc déjà que $D_c \subset \text{dom}(T_c^*)$, et que $T_c^*(f) = T(f) = if'$ pour $f \in D_c$. Il reste à voir que $\text{dom}(T_c^*) \subset D_c$. Dire que (g, h) est dans le graphe de T_c^* signifie que $g \in E$ est dans le domaine de T_c^* et que $h = T_c^*(g) \in E$ vérifie

$$\langle f, h \rangle = \langle T_c(f), g \rangle$$

pour toute fonction $f \in D_c$. On a si $(g, h) \in \text{Gr}(T_c^*)$

$$\int_0^1 f \bar{h} = \int_0^1 (if') \bar{g}$$

pour toute $f \in D_c$. Posons $H(t) = \int_0^t h(s) ds$. On obtient par intégration par parties

$$\int_0^1 f \bar{h} = [f \bar{H}]_0^1 - \int_0^1 f' \bar{H} = f(1) \bar{H}(1) - \int_0^1 f' \bar{H},$$

ce qui donne

$$f(1) \bar{H}(1) - \int_0^1 f' \bar{H} = \int_0^1 (if') \bar{g} = - \int_0^1 f' \overline{(ig)}$$

ou encore

$$f(1) \bar{H}(1) = \int_0^1 f' \overline{(H - ig)}$$

pour toute $f \in D_c$. Puisque la fonction $f_0 = 1$ est dans D_c , on obtient puisque $f_0' = 0$ que $H(1) = 0$. On remarque que l'ensemble des f' , lorsque $f \in D_c$, est exactement l'ensemble de toutes les fonctions k de $E = L_2$ qui sont d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ (en effet, $K(t) = \int_0^t k(s) ds$ est une fonction de D_c puisque $K(0) = 0$ et $K(1) = \int_0^1 k = 0$, donc $K \in H^1([0, 1])$ vérifie $K(0) = K(1)$, donc k est la dérivée (généralisée) d'un élément de D_c). Cet ensemble des fonctions d'intégrale nulle est égal à $(\mathbb{C}1)^\perp$, et l'équation précédente indique que $H - ig$ est orthogonale à $(\mathbb{C}1)^\perp$, donc $H - ig \in (\mathbb{C}1)^{\perp\perp} = \mathbb{C}1$. On obtient que $H - ig$ est une fonction constante, donc $g = -iH + Cte$; comme $H(0) = H(1)$

et que H est une fonction de $H^1([0, 1])$, il en résulte que $g \in D_c$. On a déjà vu que $D_c \subset \text{dom}(T_c^*)$, et on a maintenant $\text{dom}(T_c^*) \subset D_c$, donc $\text{dom}(T_c^*) = D_c$ et pour $g \in \text{dom}(T_c^*)$ on a $T_c^*(g) = ig' = T_c(g)$, ce qui montre que T_c est autoadjoint.

En suivant la même méthode, on vérifie que l'adjoint de T_a , défini sur $D_a = H^1([0, 1])$ par $T_a(f) = if'$, est l'opérateur T_b défini sur $D_b = \{f \in D_a : f(0) = f(1) = 0\}$ par $T_b(f) = if'$. L'adjoint de T_b est T_a . Il en résulte que T_b est un exemple d'opérateur symétrique qui n'est pas autoadjoint.

Exercice. Montrer que l'opérateur T défini sur $L_2(\mathbb{R})$ par $\text{dom}(T) = H^1(\mathbb{R})$ et $T(f) = if'$ pour $f \in \text{dom}(T)$ est autoadjoint.

a. Soit X le sous-espace de $L_2(\mathbb{R})$ formé des fonctions k à support borné et d'intégrale nulle; montrer que si $k \in X$, alors $K(t) = \int_{-\infty}^t k(s) ds$ définit une fonction $K \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer que X est dense dans $L_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que T est symétrique (utiliser le fait que si $f_1, f_2 \in H^1(\mathbb{R})$, il existe des suites $t_n \rightarrow \pm\infty$ telles que $f_1(t_n)f_2(t_n) \rightarrow 0$).

c. Soient $(g, h) \in \text{Gr}(T^*) \subset L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$ et $H(t) = \int_0^t h(s) ds$; en travaillant sur un intervalle borné $[a, b]$, avec des fonctions f nulles hors de $[a, b]$, montrer que $H - ig$ est constante sur $[a, b]$; en déduire que $H - ig$ est constante sur \mathbb{R} et conclure.

Proposition 8.3.1. Soient E et F deux espaces hilbertiens et T un opérateur densément défini de E dans F ; alors T^* est fermé. Pour que T soit fermable, il faut et il suffit que T^* soit densément défini. Dans ce cas, on a $\overline{T} = (T^*)^*$.

Démonstration. Voir poly.

8.4. Décomposition spectrale

Proposition. Soit T un opérateur autoadjoint sur E hilbertien complexe; alors $\pm i$ est valeur régulière de T .

Démonstration. On montre d'abord que $\|(T \pm i \text{Id})(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in \text{dom}(T)$. En effet, l'égalité

$$\langle T(x), x \rangle = \langle x, T(x) \rangle$$

montre que $\langle T(x), x \rangle$ est réel, puis

$$|\langle T(x) \pm ix, x \rangle| = |\langle T(x), x \rangle \pm i\langle x, x \rangle| \geq \langle x, x \rangle$$

montre que $\|x\|^2 \leq \|T(x) \pm ix\| \|x\|$. Il en résulte que $T \pm i \text{Id}$ est injectif, et que l'inverse, s'il existe, est continu (de norme ≤ 1).

On montre ensuite que l'image de $T \pm i \text{Id}$ est dense dans E . Prenons $T + i \text{Id}$ par exemple; sinon, il existe $y \neq 0$ orthogonal à l'image, $\langle T(x) + ix, y \rangle = 0$ pour tout $x \in \text{dom}(T)$. On a donc

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, iy \rangle$$

pour tout $x \in \text{dom}(T)$, ce qui montre par (*) que $y \in \text{dom}(T^*) = \text{dom}(T)$ et $T(y) = T^*(y) = iy$, donc $\langle T(y), y \rangle = i\langle y, y \rangle \neq 0$. Ceci est impossible puisque $\langle T(y), y \rangle$ est réel.

Finalement, on montre que $T \pm i \text{Id}$ est surjectif. Écrivons pour $T + i \text{Id}$ par exemple. Soit $y \in E$; il existe une suite $(x_n) \subset \text{dom}(T)$ telle que $T(x_n) + ix_n \rightarrow y$. Puisque $\|(T(x_n) + ix_n) - (T(x_m) + ix_m)\| \geq \|x_n - x_m\|$, il en résulte que (x_n) est de Cauchy, donc converge vers $x \in E$. Puisque $T(x_n) + ix_n$ converge, il en résulte que $T(x_n)$ converge, donc la suite $(x_n, T(x_n))$ du graphe de T converge. Puisque T est fermé, il en résulte que la limite est dans le graphe, et c'est $(x, T(x))$. On a donc $y = T(x) + ix \in \text{im}(T + i \text{Id})$.

Proposition. Soit T un opérateur autoadjoint sur E hilbertien complexe ; considérons l'opérateur borné $S = R_i(T) = (T - i \text{Id})^{-1}$. On a $S^* = (T + i \text{Id})^{-1}$, et S est normal.

Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in E$, $x_1 = S(y_1)$ et $x_2 = (T + i \text{Id})^{-1}(y_2)$; alors $x_1, x_2 \in \text{dom}(T)$ et

$$\langle S(y_1), y_2 \rangle = \langle x_1, T(x_2) + ix_2 \rangle = \langle T(x_1) - ix_1, x_2 \rangle = \langle y_1, (T - i \text{Id})^{-1}(y_2) \rangle.$$

On a donc $S^* = (T + i \text{Id})^{-1}$. Soit $u_1 = S^*(x_1)$; alors $u_1 \in \text{dom}(T)$ et $T(u_1) + iu_1 = x_1$ montrent que $T(u_1) \in \text{dom}(T)$, donc $u_1 \in \text{dom}(T^2)$, et $(\text{Id} + T^2)(u_1) = y_1$. Mais $\text{Id} + T^2$ est injectif (on a $\langle x + T^2(x), x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle T(x), T(x) \rangle > 0$ pour $x \neq 0$), donc u_1 est l'unique solution de $(\text{Id} + T^2)(u) = y_1$; or $u_2 = S(S^*(y_1))$ serait une autre solution, pour les mêmes raisons. On a donc $S^*S = SS^*$.

Puisque S est normal, il est unitairement équivalent à un opérateur S_1 de multiplication par une fonction mesurable bornée h sur un espace $L_2(\mu)$: il existe un unitaire $u : E \rightarrow L_2(\mu)$ tel que $S = u^* M_h u$; puisque S est injectif, S_1 est aussi injectif et la fonction h est presque partout non nulle. On transporte algébriquement toute la situation sur $L_2(\mu)$. Le domaine de T était précisément $D = \text{im}(S)$, donc ça devient

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{im}(S_1) = \{f \in L_2(\mu) : f = hk, k \in L_2(\mu)\} = \\ &= \{f \in L_2(\mu) : \int |f(t)/h(t)|^2 d\mu(t) < +\infty\} \end{aligned}$$

et $T_1 - i \text{Id} = S_1^{-1}$ est la multiplication par $1/h$. Alors T_1 est la multiplication par $g = 1/h + i$. Comme T_1 est autoadjoint, cette fonction g est réelle. Le spectre de T est l'ensemble des valeurs essentielles de g , comme dans un des exemples traités. On a $T = u^* M_g u|_D$.

Exemple. L'opérateur $T(f) = if'$ sur $L_2(\mathbb{R})$ se représente par transformée de Fourier par la multiplication par $t \in \mathbb{R} \rightarrow t$.

On pose $\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$ pour $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$; on sait que $f \rightarrow \widehat{f}$ est isométrique pour la norme $L_2(\mathbb{R})$, donc se prolonge en un unitaire u de $L_2(\mathbb{R})$. On sait aussi que $\widehat{if'}(t) = t\widehat{f}(t)$, ce qui montre le résultat.

Soient H un espace hilbertien et T un opérateur densément défini autoadjoint de H dans H ; on peut, comme dans le cas borné, définir un calcul fonctionnel borélien pour T : écrivons $T = u M_g u^*$. Si f est une fonction borélienne bornée sur $\text{Sp}(T)$, on pose $f(T) = u M_{f \circ g} u^*$.

Exemple. On peut définir $v_s = e^{isT}$ où T est autoadjoint non borné (s réel) ; il est représenté par la multiplication par la fonction de module un e^{isg} (g est réelle), donc v_s est unitaire, et on a ainsi un groupe d'unitaires. Dans le cas $T(f) = if'$ sur $L_2(\mathbb{R})$, on voit que $v_s = e^{isT}$ se représente du côté Fourier par la multiplication par $t \rightarrow e^{ist}$. On en déduit que (v_s) est dans ce cas le groupe des translations sur $L_2(\mathbb{R})$, défini par $v_s(f)(x) = f(x - s)$.

8.5. Le théorème de Stone

Soit H un espace hilbertien ; on appelle *groupe à un paramètre d'unitaires* une famille $(v_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(H)$ telle que :

- (i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $v_{s+t} = v_s v_t$;
- (ii) pour tout $x \in H$ l'application $t \rightarrow v_t(x)$ est continue.

Théorème 8.5.1. Théorème de Stone. *Soit H un espace hilbertien complexe séparable ; soit $(v_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires ; il existe un opérateur autoadjoint T sur H tel que $v_s = e^{isT}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*