Université Paris 7 — Théorie Spectrale
1999-2000 — MT404
Second cycle — Bernard Maurey

Problème numéro 1

I - Bases de Schauder

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\| \cdot \|$ sa norme.

Une famille dénombrable $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ est appelée base de Schauder si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $\mathcal{E}$ (i.e. le plus petit sous-espace fermé contenant tous les x_n est $\mathcal{E}$ lui-même) ;

ii) pour tout $x \in \mathcal{E}$, il existe une <u>unique</u> suite de coefficients $\alpha_n(x)$ telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n(x)\, x_n$ converge vers x pour la norme de $\mathcal{E}$.

---

1) Montrer que les applications $\alpha_n : \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \alpha_n(x) \end{array}$ sont linéaires.

2) Soit Y l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des suites (c_n), $c_n \in \mathbb{K}$, telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\, x_n$ converge dans $\mathcal{E}$.

   Montrer que $|||\,(c_n)\,||| = \sup\limits_{n\geq 0} \| \sum\limits_{j=0}^{n} c_j\, x_j \|$ est une norme sur Y.

3) Montrer que Y est complet pour la norme $|||\cdot|||$.

   Indication : si (y_p) est une suite de Cauchy dans Y, chaque y_p définissant une suite $(c_{p,i})_{i\in\mathbb{N}}$ on montrera que pour tous p, q, i, on a $|c_{p,i} - c_{q,i}| \leq 2\,|||y_p - y_q|||$, et on concluera en utilisant le fait que $\mathbb{K}$ est complet.

4) Montrer que l'application $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x_n \end{array}$ est linéaire, bijective et continue ; montrer, en utilisant un théorème du cours, que T^{-1} est aussi continue.

5) En déduire que les α_n sont continues, et qu'il existe un nombre $\mathrm{M} > 0$ tel que l'on ait $1 \leq \|x_n\|\, \|\alpha_n\| \leq \mathrm{M}$ pour tout entier $n \geq 0$ (où $\|\alpha_n\|$ désigne la norme de α_n dans $\mathcal{E}'$, dual de $\mathcal{E}$).

6) Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(x_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$

   Pour cette raison, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite biorthogonale associée à la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II- Une base de splines de $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$

On note par $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[0,1]$, deux à deux distincts, et dense dans $[0,1]$, telle que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Pour tout $n \geq 2$, l'ensemble $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ réalise un découpage de $[0,1]$ en $n-1$ intervalles ouverts, adjacents et deux à deux disjoints (il suffit de considérer les points $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ obtenus en renumérotant les $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de telle sorte que $0 = x_0 = y_0 < \ldots < y_{n-1} = x_1 = 1$: les intervalles considérés sont alors les $]y_{j-1}, y_j[$ pour $1 \leq j \leq n-1$).

1) Pour tout $n \geq 1$, on appelle fonction spline avec nœuds en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ toute fonction continue sur $[0,1]$ dont la restriction à chaque intervalle ouvert déterminé par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est affine (on rappelle qu'une fonction affine est de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$).

   Montrer que pour tout $n \geq 1$, et pour $f \in \mathrm{C}\big([0,1]\big)$, il existe une unique fonction spline avec nœuds en $\{x_0, \ldots, x_n\}$, notée $\mathrm{L}_n f$, telle que $\mathrm{L}_n f(x_j) = f(x_j)$ pour $j = 0, 1, \ldots, n$.

2) Montrer que la suite $(\mathrm{L}_n f)$ converge vers f uniformément sur $[0,1]$.

   Indication : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$.

3) On pose $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$. Si $n \geq 2$, montrer qu'il existe une unique fonction spline f_n avec nœuds en $\{x_0, \ldots, x_n\}$, nulle en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ et égale à 1 en x_n.

4) Montrer que si $n \geq 1$, toute fonction spline avec nœuds en $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et nulle en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ est de la forme λf_n, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En déduire que pour toute $f \in \mathrm{C}([0,1])$, il existe un coefficient $c_n(f)$ tel que $\mathrm{L}_n f - \mathrm{L}_{n-1} f = c_n(f)\, f_n$.

5) En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) f_n$ converge vers f dans $\mathrm{C}([0,1])$.

6) Vérifier que si p, q sont deux entiers avec $0 \leq p < q$, on a $f_q(x_p) = 0$. En déduire l'unicité des coefficients $(c_n(f))$. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est donc une base de Schauder de $\mathrm{C}([0,1])$.

7) Montrer que pour tout $n \geq 1$, les fonctionnelles c_n sont des combinaisons linéaires de masses de Dirac portées par $\{x_0, \ldots, x_n\}$.