Université Paris 7 UFR de Mathématiques
Second cycle
MT 404 - Théorie spectrale

Devoir 2.

2 Novembre 1999.

Exercice 1

Notations: Ici L^1 désigne l'espace $L^1([-\pi,\pi])$. $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$, on rappelle que le second est dense dans le premier. Si $f \in L^1$ on pose

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad n \in \mathbb{Z} \\
S_m(f,x) &= \sum_{k=-m}^{k=m} \hat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{(les sommes partielles)} \\
\delta_m(x) &= \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{(m+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

1. Vérifier la deuxième égalité de la ligne précédente.

2. Montrer que $\lim_{|n|\to\infty} \|\delta_m(x)\|_1 = \infty$. (On pourra remarquer que $|\sin x| \leq |x|$.)

3. Montrer que $f \mapsto (\hat{f}(n))$ définit une application continue
$$\Phi : \quad L^1 \to c_0.$$
On rappelle que les fonctions en escalier sont denses dans L^1.

4. Montrer que $\Phi^{-1}(B_{c_0}(0,1))$ n'est pas bornée dans L^1 (On pourra utiliser la deuxième question). En déduire que le complémentaire de $\Phi(L^1)$ est dense dans c_0.

5. Montrer que l'on a
$$S_m(f,x) = f * \delta_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta_m(x-t)dt.$$
On revient à l'espace $\mathcal{C}$ muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ et on pose
$$S_m(f) = S_m(f,0)$$

6. Montrer que $S_m \in \mathcal{C}^*$ et que $\|S_m\| \leq \|\delta_m\|_1$. Montrer que $\|S_m\| = \|\delta_m\|_1$

7. Conclure qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}$ pour laquelle
$$\sup_m S_m(f) = +\infty.$$

Exercice 2

Soit $A = \{0, 1\}$ et $E = A^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites (x_n) telles que $\forall\, n\, x_n = 0$ ou $x_n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k$ des entiers, $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) \in A^k$ on pose $O(k, n_1, \ldots, n_k, \epsilon) = \{x \in E : \ \forall i \leq k x_{n_i} = \epsilon_i.\}$, $\mathcal{T}$ est la plus petite topologie pour laquelle ces ensembles sont ouverts. Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine telle que les applications $E \to A$ $p_n : \ x \mapsto x_n$ soient continues (A étant muni de la topologie discrète). On appelle $\mathcal{T}$ la topologie produit.

2. (Les propriétés "élémentaires" de $\mathcal{T}$.) Montrer que tous les ensembles $O(k, n_1, \ldots, n_k, \epsilon)$ sont fermés pour $\mathcal{T}$, que $\mathcal{T}$ est séparée mais que $\mathcal{T}$ n'est pas la topologie discrète.

3. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est un espace compact.

4. Soient $(x, y) \in E^2$ on pose
$$d(x, y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$
Montrer que l'on a défini une métrique sur E et que la topologie associée à d est $\mathcal{T}$.

5. Soit
$$\Phi\ E \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}.$$
Montrer que Φ est continue et que son image est l'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C}$, en déduire que E est homéomorphe à $\mathcal{C}$.