Université Paris 7 Théorie Spectrale
1999-2000 MT404

Problème numéro 3

Partie I

On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2(0,1)$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$, on pose

$$\forall s \in [0,1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = (1-s)\int_0^s t f(t)\,dt + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,dt.$$

a. Montrer que T définit un opérateur linéaire continu de H dans H. Montrer que T est hermitien et compact.

b. Montrer que pour toute $f \in \mathrm{H}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue ; montrer que si f est continue, $\mathrm{T}f$ est de classe C^2 et calculer $(\mathrm{T}f)''$. Montrer que l'image $\mathrm{T}(\mathrm{H})$ contient toutes les fonctions g de classe C^2 sur $[0,1]$ telles que $g(0) = g(1) = 0$. En déduire que T est injectif sur H.

c. Montrer que si f est vecteur propre de T pour une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors f est de classe C^2 et vérifie une équation différentielle ordinaire. Trouver toutes les valeurs propres de T, et donner une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

d. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}\sin(k\pi s)\sin(k\pi t)$ pour tous $s, t \in [0,1]$.

Partie II

1. Soient (X, d) un espace métrique compact et x_0 un point fixé dans X ; on pose $\mathrm{C}_{0,x_0}(\mathrm{X}) = \{f \in \mathrm{C}(\mathrm{X}) : f(x_0) = 0\}$, et on suppose que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathrm{C}_{0,x_0}(\mathrm{X})$, stable par passage au complexe conjugué ($f \in \mathcal{A}$ implique $\overline{f} \in \mathcal{A}$) et qui sépare les points de X ; montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathrm{C}_{0,x_0}(\mathrm{X})$ (pour la norme uniforme ; pour étudier $\mathcal{A}$, on pourra se servir de l'algèbre $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathbb{C}1$).

2. On désigne par $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini. Pour tout $a > 0$ on note E_a le sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ formé des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \to \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2}$, où P décrit l'ensemble des polynômes ; on note A l'espace vectoriel engendré par tous les E_a, lorsque a varie dans $]0,+\infty[$.

a. Montrer que A est dense (pour la norme uniforme) dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$.

b. Soit u un nombre réel ; montrer que la fonction $x \to \mathrm{e}^{ux^2}$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ d'une suite (P_n) de fonctions polynomiales, qui vérifient $|\mathrm{P}_n(x)| \leq \mathrm{e}^{|u|x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$.

c. Montrer que si u est un nombre réel tel que $|u| < a$, l'espace E_{a+u} est contenu dans l'adhérence de E_a (découper l'étude de la convergence uniforme en deux parties, un intervalle borné bien choisi et son complémentaire). Montrer ensuite que E_b est contenu dans l'adhérence de E_a pour tout $b > 0$.

d. Déduire des questions précédentes que E_a est dense dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, pour tout $a > 0$.

e. Montrer que si f est une fonction continue à support compact, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un polynôme P tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2/2} - \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2/2}|^2\,\mathrm{e}^{-ax^2}\;dx < \varepsilon^2.$$

En déduire que E_a est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe une base hilbertienne $(f_n)_{n\geq 0}$ de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ formée de fonctions de la forme $f_n(x) = \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$, où pour tout $n \geq 0$ la fonction P_n est une fonction polynomiale de degré n.