MT404 **Examen du 21 Janvier 2000**

durée : 3 heures

Les documents sont autorisés.

Exercice I

Soient H un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur unitaire ; on suppose que le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ contient exactement trois points distincts $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{H} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$ telle que pour chaque $j = 1, 2, 3$, on ait $\mathrm{E}_j \neq \{0\}$ et $u(x) = \lambda_j x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_j$.

Exercice II

On désigne par H un espace de Hilbert complexe.

1. Montrer que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ sont hermitiens et si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, alors AB est hermitien.

2. Dans cette question, $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ sont hermitiens positifs.

2a. Montrer que $\sqrt{\mathrm{A}}\, \mathrm{B} \sqrt{\mathrm{A}}$ est hermitien positif.

2b. Montrer que si de plus $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, alors AB est hermitien positif.

3. On considère la fonction continue φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \max\{t, 0\}$, et on désigne par $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hermitien.

3a. Montrer que les opérateurs $\mathrm{T}_+ = \varphi(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_+ - \mathrm{T}$ sont hermitiens positifs, et que $\mathrm{T}_+ \mathrm{T}_- = \mathrm{T}_- \mathrm{T}_+ = 0$.

3b. Vérifier que H est la somme directe orthogonale de $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)}$ et $\mathrm{F} = \ker(\mathrm{T}_+)$.

3c. Montrer que les sous-espaces E et F sont stables par T.

3d. Montrer que $\mathrm{T}_+ = \mathrm{T}\,\mathrm{P}_\mathrm{E} = \mathrm{P}_\mathrm{E}\,\mathrm{T}$.

Exercice III

On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0, \pi/2], \mu)$, où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, \pi/2]$. Pour toute $f \in \mathrm{H}$, on définit une fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t) f(t)\, dt + \cos(x) \int_x^{\pi/2} \sin(t) f(t)\, dt.$$

1.

1a. Vérifier que $\mathrm{T}f \in \mathrm{H}$. Montrer que l'application $f \in \mathrm{H} \to \mathrm{T}f \in \mathrm{H}$ définit une application linéaire continue T de H dans H.

1b. Montrer que T est hermitien.

2.

2a. Montrer que pour toute $f \in \mathrm{H}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, \pi/2]$.

2b. Montrer que T est un opérateur compact de H dans H.

TOURNEZ S.V.P.

3. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{T}f$ est de classe C^2 sur $[0, \pi/2]$, et la fonction $\mathrm{G} = \mathrm{T}f$ vérifie l'équation différentielle $\mathrm{G}'' + \mathrm{G} = f$, avec les conditions aux limites $\mathrm{G}'(0) = \mathrm{G}'(\pi/2) = 0$.

4.

4a. Montrer que si $f \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{T}f = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, alors f est de classe C^2 sur $[0, \pi/2]$ et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

4b. En déduire les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de T, les vecteurs propres correspondants et déterminer le spectre de T.

5. Soient $f \in \mathrm{H}$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ telle que $f_n \to f$ dans H ; on pose $\mathrm{G} = \mathrm{T}f$ et $\mathrm{G}_n = \mathrm{T}f_n$ pour tout $n \geq 0$.

5a. Montrer que la suite (G'_n) converge uniformément sur $[0, \pi/2]$ vers la fonction K définie par $\mathrm{K}(x) = \int_0^x (-\mathrm{G}(t) + f(t))\, dt$. En déduire que G est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

5b. Déduire de *5a* que T est injectif.

5c. Donner une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de T.