Exercice I

Soit $a = (a_n)_{n\ge 0}$ une suite numérique; si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge pour toute suite $b = (b_n)_{n\ge 0} \in \ell_2$, montrer que $a \in \ell_2$.

Cette question peut se résoudre avec les connaissances du niveau DEUG 2ème année; si on a $\sum_n |a_n|^2 = +\infty$, on va construire "à la main" un élément $b \in \ell_2$ tel que $\sum_n a_n b_n$ diverge.

Si on a $\sum_n |a_n|^2 = +\infty$, on voit que pour tout entier $\mathrm{N}_0 \ge 0$ fixé, la somme $\sum_{j=\mathrm{N}_0}^{n} |a_j|^2$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$; pour tout nombre C donné à l'avance, on peut trouver un indice $\mathrm{N}_1 > \mathrm{N}_0$ tel que $\sum_{j=\mathrm{N}_0}^{\mathrm{N}_1 -1} |a_j|^2 \ge \mathrm{C}$; on peut donc construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\ge 0}$, telle que $n_0 = 0$ et telle que pour tout entier $k \ge 0$, on ait

$$4^k \le v_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_j|^2.$$

Définissons une suite $b = (b_n)$ en posant $b_n = 2^{-k} v_k^{-1/2}\, \overline{a}_n$ lorsque $n_k \le n < n_{k+1}$. On vérifie que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigl(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |b_j|^2 \Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} v_k^{-1} v_k < +\infty$$

donc $b \in \ell_2$, mais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} v_k^{-1/2} \Bigl(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \overline{a}_j \Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} v_k^{-1/2} v_k \ge \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

On voit donc que lorsque $\sum_n |a_n|^2 = +\infty$, il n'est pas possible que la série $\sum_n a_n b_n$ converge pour tout $b \in \ell_2$. Ceci termine la première solution de cet exercice.

La méthode de niveau maîtrise consiste à appliquer le théorème de Banach-Steinhaus; pour tout $n \ge 0$ on considère l'application linéaire continue T_n de ℓ_2 dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall b \in \ell_2, \quad \mathrm{T}_n(b) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j.$$

L'hypothèse nous dit que la limite existe pour tout b dans l'espace de Banach ℓ_2, donc la suite $(\|\mathrm{T}_n\|)$ est bornée par Banach-Steinhaus. Il existe donc une constante M telle que pour tout n on ait $\|\mathrm{T}_n\| \le \mathrm{M}$, ce qui donne en appliquant à la suite $b^{(n)} \in \ell_2$ dont les coordonnées $b_j^{(n)}$ sont égales à $\overline{a}_j$ pour $j \le n$ et à 0 quand $j > n$

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 = |\mathrm{T}_n(b^{(n)})| \le \mathrm{M}\, \|b^{(n)}\| = \mathrm{M}\, \Bigl(\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \Bigr)^{1/2},$$

ce qui montre que $\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \le \mathrm{M}^2$, pour tout n, donc $\sum_n |a_n|^2 \le \mathrm{M}^2 < +\infty$.

On pourrait aussi dire que la limite (ponctuelle) T de la suite (T_n) est une forme linéaire continue sur ℓ_2, donc représentable par produit scalaire (complexe) avec un élément $c \in \ell_2$; en examinant l'action sur les coordonnées on voit que nécessairement $c_n = \overline{a}_n$ pour tout $n \ge 0$, donc $\sum_n |a_n|^2 = \sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Exercice II

Soit E *un espace de Banach non nul ; on désigne par* $c_0(\mathrm{E})$ *l'espace vectoriel des suites* $x = (x_n)_{n\ge0}$ *de vecteurs de* E *telles que* $\lim_n x_n = 0$ *; on munit* $c_0(\mathrm{E})$ *de la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\ge0} \|x_n\|_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que $c_0(\mathrm{E})$ *est complet. On désigne par* $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ *l'espace des suites* $x^* = (x^*_n)_{n\ge0}$ *d'éléments de* E^* *telles que* $\sum_n \|x^*_n\| < +\infty$*, muni de la norme* $\|x^*\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x^*_n\|$*. Montrer que le dual de* $c_0(\mathrm{E})$ *s'identifie isométriquement à l'espace* $\ell_1(\mathrm{E}^*)$*. Montrer que* $c_0(\mathrm{E})$ *n'est pas réflexif.*

Montrons que $c_0(\mathrm{E})$ est complet : soit $(x^{(n)})$ une suite de Cauchy dans $c_0(\mathrm{E})$. La stratégie de démonstration est immuable : on va d'abord "deviner" les coordonnées de la limite x cherchée, puis montrer que x est bien dans $c_0(\mathrm{E})$, et enfin vérifier que $x^{(n)}$ converge vers x pour la norme de $c_0(\mathrm{E})$. Pour tout indice $j \ge 0$, on a

$$\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|_{\mathrm{E}} \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty,$$

ce qui montre que la suite $(x_j^{(n)})_n$ est de Cauchy dans l'espace complet E ; elle converge donc vers un vecteur $x_j \in \mathrm{E}$.

Montrons ensuite que $x = (x_j)_{j\ge0} \in c_0(\mathrm{E})$; donnons nous $\varepsilon > 0$; puisque la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy, il existe un entier N tel que $\|x^{(n)} - x^{(\mathrm{N})}\|_\infty < \varepsilon/3$ pour tout $n \ge \mathrm{N}$. On en déduit $\|x_j^{(n)} - x_j^{(\mathrm{N})}\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3$ pour tout indice j, donc $\|x_j - x_j^{(\mathrm{N})}\|_{\mathrm{E}} \le \varepsilon/3$ à la limite (quand $n \to +\infty$). Puisque $x^{(\mathrm{N})}$ est dans $c_0(\mathrm{E})$, il existe aussi un entier J tel que $\|x_j^{(\mathrm{N})}\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3$ pour tout $j \ge \mathrm{J}$. Finalement, on aura par l'inégalité triangulaire $\|x_j\|_{\mathrm{E}} \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ pour tout $j \ge \mathrm{J}$, donc la suite (x_j) tend vers 0 dans E, et on a montré que $x = (x_j)_{j\ge0} \in c_0(\mathrm{E})$; il reste à vérifier que $\|x - x^{(m)}\|_\infty$ tend vers 0. On choisit N tel que $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$ pour tous $m, n \ge \mathrm{N}$. Pour tout entier $\mathrm{J} \ge 0$, on en déduit

$$\sup_{j\le\mathrm{J}} \|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon,$$

ce qui entraîne lorsque $n \to +\infty$ (m restant fixé) que

$$\sup_{j\le\mathrm{J}} \|x_j - x_j^{(m)}\|_{\mathrm{E}} \le \varepsilon$$

à la limite. Puisque J est quelconque, on obtient $\|x - x^{(m)}\|_\infty \le \varepsilon$ pour tout $m \ge \mathrm{N}$, ce qui termine la vérification de la convergence de la suite de Cauchy $(x^{(n)})$ vers x, pour la norme de $c_0(\mathrm{E})$.

Passons à la question sur le dual de $c_0(\mathrm{E})$. Commençons par établir une correspondance entre $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ et le dual de $c_0(\mathrm{E})$: définissons une application $f : y^* \to f_{y^*}$ de $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ dans le dual de $c_0(\mathrm{E})$ en posant pour tout $y^* = (y^*_n)$ dans $\ell_1(\mathrm{E}^*)$

$$f_{y^*}(x^*) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^*_k(x_k).$$

La série ci-dessus converge puisque $|y^*_k(x_k)| \le \|y^*_k\|\,\|x_k\|_{\mathrm{E}} \le \|y^*_k\|\,\|x\|_\infty$, donc

$$|f_{y^*}(x)| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |y^*_k(x_k)| \le \|x\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} \|y^*_k\| = \|y^*\|_1\,\|x\|_\infty < +\infty.$$

Il est clair que f_{y^*} est linéaire sur $c_0(\mathrm{E})$, et la majoration précédente montre que f_{y^*} est continue, avec $\|f_{y^*}\| \le \|y^*\|$; il est clair aussi que $y^* \to f_{y^*}$ est linéaire, et $\|f\| \le 1$. Il reste à montrer que f est surjective et isométrique.

Soit ℓ une forme linéaire continue sur $c_0(\mathrm{E})$; on cherche à montrer qu'elle est de la forme $\ell = f_{y^*}$ pour un certain $y^* \in \ell_1(\mathrm{E}^*)$; pour tout entier $n \ge 0$ considérons l'application i_n qui associe à $v \in \mathrm{E}$ l'élément $x = i_n(v) \in c_0(\mathrm{E})$ dont les coordonnées sont $x_n = v$ et $x_j = 0$ si $j \neq n$. Il est clair que i_n est une isométrie linéaire de E dans $c_0(\mathrm{E})$; la composition $\ell \circ i_n$ est une forme linéaire continue sur E que nous appellerons y_n^* ; on va montrer que $y^* = (y_k^*)_{k\geq 0}$ est dans $\ell_1(\mathrm{E}^*)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; pour tout entier $k \geq 0$, on peut trouver un vecteur $v_k \in \mathrm{E}$ de norme 1 tel que $y_k^*(v_k) > \|y_k^*\| - 2^{-k}\varepsilon$. Le vecteur $x^{(n)} = \sum_{k=0}^n i_k(v_k)$ est dans $c_0(\mathrm{E})$, sa norme est ≤ 1 (ses coordonnées sont égales à v_k ou à 0) et

$$\|\ell\| \geq \|\ell\| \, \|x^{(n)}\| \geq \ell(x^{(n)}) = \sum_{k=0}^n \ell(i_k(v_k)) = \sum_{k=0}^n y_k^*(v_k) \geq \sum_{k=0}^n \|y_k^*\| - \varepsilon \sum_{k=0}^n 2^{-k}.$$

Considérons la suite $y^* = (y_k^*)_{k\geq 0}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans les inégalités ci-dessus on obtient $\|y^*\|_1 \leq \|\ell\| + 2\varepsilon$, donc $\|y^*\|_1 \leq \|\ell\|$ (puisque ε est arbitraire). Il reste à vérifier que $\ell = f_{y^*}$; soit $x \in c_0(\mathrm{E})$ et soit $x^{(n)}$ l'élément de $c_0(\mathrm{E})$ dont les coordonnées sont $x_j^{(n)} = x_j$ si $j \leq n$ et $x_j^{(n)} = 0$ si $j > n$; on a $x^{(n)} = \sum_{k=0}^n i_k(x_k)$, donc $\ell(x^{(n)}) = \sum_{k=0}^n y_k^*(x_k) = f_{y^*}(x^{(n)})$ par le même calcul que précédemment. Si on montre que $x^{(n)}$ converge vers x quand $n \to +\infty$, on aura alors $\ell(x) = f_{y^*}(x)$ par continuité de ℓ et de f_{y^*}. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; pour $j \geq \mathrm{N}$, on aura $\|x_j\|_\mathrm{E} < \varepsilon$; si $n \geq \mathrm{N}$, le vecteur $x - x^{(n)} \in c_0(\mathrm{E})$ a des coordonnées nulles pour $j \leq n$, et égales au vecteur $x_j \in \mathrm{E}$ pour $j > n \geq \mathrm{N}$: ces coordonnées ont toutes une norme $< \varepsilon$, donc $\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq \varepsilon$ quand $n \geq \mathrm{N}$, ce qui montre la convergence de $(x^{(n)})$ vers x dans $c_0(\mathrm{E})$, et implique comme on l'a dit que $\ell(x) = f_{y*}(x)$; ceci étant vrai pour tout $x \in c_0(\mathrm{E})$, on a $\ell = f_{y^*}$. On a donc montré que f est surjective de $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ sur le dual de $c_0(\mathrm{E})$.

On a vu que $\|y^*\|_1 \leq \|\ell\|$, et $\|f_{y^*}\| \leq \|y^*\|$. On a donc $\|f_{y^*}\| = \|y^*\|_1$, et f est une bijection isométrique et linéaire de $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ sur $(c_0(\mathrm{E}))^*$.

Pour finir on montre que $c_0(\mathrm{E})$ n'est pas réflexif. Voici l'idée en bref : si on fixe un vecteur $z \in \mathrm{E}$ de norme 1, le sous-espace de $c_0(\mathrm{E})$ formé des suites $(x_j)_{j\geq 0}$ telles que $x_j = c_j z$ pour tout $j \geq 0$ est isomorphe (isométriquement) à c_0 qui n'est pas réflexif ; l'espace $c_0(\mathrm{E})$ ne peut pas être réflexif puisqu'il contient un sous-espace fermé non réflexif. Si on veut détailler un peu plus, on considère la forme linéaire φ sur $(c_0(\mathrm{E}))^*$ définie par

$$\forall \ell \in (c_0(\mathrm{E}))^*, \quad \varphi(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell(i_k(z))$$

(on a essentiellement déjà vu que cette série converge : on sait que toute $\ell \in (c_0(\mathrm{E}))^*$ est de la forme f_{y^*} avec $y^* \in \ell_1(\mathrm{E}^*)$; on a $|\varphi(\ell)| \leq \sum_k |y_k^*(z)| \leq \|y^*\|_1 \, \|z\|_\mathrm{E} = \|z\|_\mathrm{E} \, \|\ell\|$) ; on montre que φ ne peut pas être de la forme $\ell \to \ell(x)$ pour un $x \in c_0(\mathrm{E})$: en effet, un tel élément $x = (x_j)_{j\geq 0}$ devrait vérifier $x_j = z$ pour tout $j \geq 0$: fixons l'indice j et considérons $z^* \in \mathrm{E}^*$; si $y^* = (y_k^*)_k$ est tel que $y_j^* = z^*$ et $y_k^* = 0$ si $k \neq j$, et si on pose $\ell = f_{y^*}$, on aurait

$$z^*(x_j) = y_j^*(x_j) = f_{y^*}(x) = \ell(x) = \varphi(\ell) = y_j^*(z) = z^*(z).$$

On en déduit qu'on aurait $z^*(x_j - z) = 0$ pour tout $z^* \in \mathrm{E}^*$, ce qui implique $x_j = z$ (Hahn-Banach). Mais il est impossible que $x_j = z$ pour tout j, puisque $x \in c_0(\mathrm{E})$ et donc $\lim_j \|x_j\|_\mathrm{E} = 0$. On a montré que $c_0(\mathrm{E})$ n'est pas réflexif, puisque $\varphi \in (c_0(\mathrm{E}))^*$ ne provient pas d'un élément de $c_0(\mathrm{E})$.

On pourrait aussi montrer, comme dans l'exercice qui suit, que la suite bornée $(x^{(n)})$ définie par $x^{(n)} = \sum_{k=0}^n i_k(z)$ n'admet aucune sous-suite faiblement convergente dans $c_0(\mathrm{E})$: le seul candidat possible pour une limite aurait toutes ses coordonnées égales à z, ce qui est impossible pour un élément de $c_0(\mathrm{E})$, comme on vient de le dire. Cette absence de sous-suite faiblement convergente montre que $c_0(\mathrm{E})$ n'est pas réflexif.

Exercice III

a. Soient X *un espace normé,* F *un espace de Banach et* j *une application linéaire continue et injective de* X *dans* F *; on désigne par* $\mathrm{B_X}$ *la boule unité fermée de* X *; montrer que si* $j(\mathrm{B_X})$ *est fermée dans* F*, alors* X *est complet (on utilisera les ensembles fermés* $j(\varepsilon \mathrm{B_X})$*, pour divers* $\varepsilon > 0$*).*

Il faut remarquer que pour tout $\mathrm{C} > 0$, l'ensemble $j(\mathrm{C}\,\mathrm{B_X})$ est fermé dans F (l'homothétie de rapport C est un homéomorphisme de F, et $j(\mathrm{C}\,\mathrm{B_X}) = \mathrm{C}\,j(\mathrm{B_X})$ puisque j est linéaire). Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X ; elle est bornée par un certain M. Puisque j est continue, l'image $(j(x_n))$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc elle converge vers $y \in \mathrm{F}$. Mais la suite $(j(x_n))$ est contenue dans $j(\mathrm{M}\,\mathrm{B_X})$ qui est fermé dans F, donc $y \in j(\mathrm{M}\,\mathrm{B_X})$. Il existe donc $x \in \mathrm{M}\,\mathrm{B_X} \subset \mathrm{X}$ tel que $y = j(x)$.

Il faut ensuite montrer que (x_n) converge vers x dans X. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ si $m, n \geq \mathrm{N}$. Les vecteurs $(x_n - x_m)_{n \geq \mathrm{N}}$ sont donc dans $\varepsilon\,\mathrm{B_X}$, et leurs images $(j(x_n) - j(x_m))$ convergent vers $y - j(x_m) = j(x) - j(x_m)$, en restant dans le fermé $j(\varepsilon\,\mathrm{B_X})$. On en déduit que $j(x - x_m) = j(z)$ pour un certain $z \in \varepsilon\,\mathrm{B_X}$; puisque j est injective, $z = x - x_m$, et on a montré que $\|x - x_m\| = \|z\| \leq \varepsilon$ lorsque $m \geq \mathrm{N}$, donc (x_m) converge vers x dans X.

b. Pour chaque sous-ensemble fini non vide $\mathrm{J} = \{j_0 < j_1 < \ldots < j_\mathrm{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *on pose*

$$\forall x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0, \quad \varphi_\mathrm{J}(x) = \bigl(|x_{j_0}|^2 + |x_{j_1} - x_{j_0}|^2 + \cdots + |x_{j_\mathrm{N}} - x_{j_{\mathrm{N}-1}}|^2\bigr)^{1/2}.$$

On pose $\varphi(x) = \sup_{\mathrm{J} \subset \mathbb{N}} \varphi_\mathrm{J}(x)$ *(valeur* $+\infty$ *admise) et on désigne par* X *le sous-ensemble de* c_0 *formé des* x *tels que* $\varphi(x) < +\infty$*. Vérifier que* X *est un sous-espace vectoriel de* c_0*, et que* $\|x\|_\mathrm{X} = \varphi(x)$ *est une norme sur* X*, plus grande que la norme de* c_0*. Montrer que* X *est un espace de Banach. Pour tout* $n \geq 0$*, on désigne par* $x^{(n)}$ *l'élément de* c_0 *dont les coordonnées* $x_j^{(n)}$ *sont égales à 1 si* $j \leq n$ *et à 0 si* $j > n$ *; montrer que la suite* $(x^{(n)})$ *est bornée dans* X*, et qu'elle n'admet pas de sous-suite faiblement convergente dans* X*.*

Pour tout $\mathrm{J} = \{j_0 < \ldots < j_\mathrm{N}\}$ on peut considérer l'application f_J de c_0 dans $\mathbb{K}^{\mathrm{N}+1}$ définie par

$$f_\mathrm{J}(x) = (x_{j_0}, x_{j_1} - x_{j_0}, \ldots, x_{j_\mathrm{N}} - x_{j_{\mathrm{N}-1}}).$$

Il est clair que f_J est linéaire, et si on munit $\mathbb{K}^{\mathrm{N}+1}$ de sa norme euclidienne usuelle on voit que $\varphi_\mathrm{J}(x) = \|f_\mathrm{J}(x)\|$. On en déduit que φ_J est une semi-norme sur c_0 ; en passant au sup en J on conclut que φ est une semi-norme sur X, donc $\varphi(\lambda x + \mu y) \leq |\lambda|\varphi(x) + |\mu|\varphi(y)$, et il en résulte que X est un sous-espace vectoriel de c_0.

On voit que si j_0 est le premier élément d'un ensemble J, alors $|x_{j_0}| \leq \varphi_\mathrm{J}(x)$; il en résulte que $|x_j| \leq \varphi(x)$ pour tout j, donc $\|x\|_\infty \leq \varphi(x)$. Si $\varphi(x) = 0$, on aura $\|x\|_\infty = 0$, donc $x = 0$, et ceci montre que φ est une norme sur X.

Désignons par i l'injection naturelle de X dans c_0 ; on vient de voir que $\|i(x)\| = \|x\|_\infty \leq \|x\|_\mathrm{X}$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc i est continue ; pour voir que X est complet, il suffit de voir, d'après la question a, que sa boule unité fermée est un ensemble fermé dans c_0 ; puisque les fonctions coordonnées sont continues sur c_0, il en résulte que φ_J est une fonction continue sur c_0 pour tout J, donc l'ensemble $\{x \in c_0 : \varphi_\mathrm{J}(x) \leq 1\}$ est fermé dans c_0. La boule unité de X est l'intersection de tous ces fermés, lorsque J varie, donc c'est un ensemble fermé dans c_0.

Montrons que la suite $(x^{(n)})$ de l'énoncé est bornée. Soit $\mathrm{J} = \{j_0 < \ldots < j_\mathrm{N}\}$ un ensemble fini ; on va montrer que $\varphi_\mathrm{J}(x^{(n)}) \leq \sqrt{2}$; désignons par j_ℓ le dernier indice j_k tel que $j_k \leq n$ (si tous les éléments de J sont $> n$, c'est facile : on a $\varphi_\mathrm{J}(x^{(n)}) = 0$). On a $x_{j_p}^{(n)} - x_{j_{p-1}}^{(n)} = 0$ si $p \leq \ell$ (les deux coordonnées valent 1) et aussi si $p - 1 > \ell$ (les deux coordonnées sont nulles). Il reste

$$\varphi_\mathrm{J}(x^{(n)})^2 = |x_{j_0}^{(n)}|^2 + |x_{j_{\ell+1}}^{(n)} - x_{j_\ell}^{(n)}|^2 \leq 2.$$

On en déduit que $\|x^{(n)}\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$. Si une sous-suite $(x^{(n_k)})$ convergeait faiblement vers $x \in \mathrm{X}$, on aurait $x_j = \lim_k x_j^{(n_k)} = 1$ pour tout j (les fonctions coordonnées sont continues sur c_0, donc sur X, et pour k assez grand on a $n_k > j$, donc la $j$ième coordonnée de $x^{(n_k)}$ est égale à 1). Le vecteur x aurait donc toutes ses coordonnées égales à 1, ce qui est impossible puisque $x \in \mathrm{X} \subset c_0$.

Exercice IV

Soit X *un espace normé réel ; à chaque système fini* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *de vecteurs de* X *on associe l'application linéaire* $u_\mathbf{x}$ *de* X^* *dans* $\mathbb{R}^n$ *définie par*

$$\forall x^* \in \mathrm{X}^*, \quad u_\mathbf{x}(x^*) = (x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

a. Vérifier que $u_{\mathbf{x}}$ est continue de $\sigma(X^*, X)$ dans $\mathbb{R}^n$ (penser aux voisinages élémentaires de $x^* \in X^*$ pour la topologie $\sigma(X^*, X)$) ; soit $A \subset X^*$ un sous-ensemble $\sigma(X^*, X)$-fermé ($*$-faiblement fermé dans X^*) ; si $x_0^* \notin A$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$, un ouvert convexe ω de $\mathbb{R}^n$, un système fini $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de X tels que $u_{\mathbf{x}}(x_0^*) \in \omega$ et $\omega \cap u_{\mathbf{x}}(A) = \emptyset$. Si de plus A est convexe et non vide, en déduire qu'il existe des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que le vecteur $x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \in X$ vérifie $x_0^*(x) > \sup\{y^*(x) : y^* \in A\}$ (séparer dans $\mathbb{R}^n$).

Montrons que $u_{\mathbf{x}}$ est continue ; soit $x^* \in X^*$ fixé, et soit V un voisinage de $u_{\mathbf{x}}(x^*) = (a_1, \ldots, a_n)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que V contienne le voisinage ouvert V_1 de $a = u_{\mathbf{x}}(x^*)$ défini par

$$V_1 = \{b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n : \forall j = 1, \ldots, n, \quad |b_j - a_j| < \varepsilon\}.$$

Considérons le $\sigma(X^*, X)$-voisinage $W = W(x^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ de x^* défini par

$$W = W(x^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{y^* \in X^* : \forall j = 1, \ldots, n, \quad |y^*(x_j) - x^*(x_j)| < \varepsilon\}.$$

On a intérêt à remarquer pour la suite que W est très exactement l'image inverse de V_1 par $u_{\mathbf{x}}$: en effet, si $y^* \in X^*$, dire que $u_{\mathbf{x}}(y^*) \in V_1$ dit exactement que $|y^*(x_j) - a_j| = |y^*(x_j) - x^*(x_j)| < \varepsilon$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, ce qui est précisément la définition de $y^* \in W$. En particulier, $u_{\mathbf{x}}(W) \subset V_1$, ce qui démontre la continuité de $u_{\mathbf{x}}$ au point x^* : on a montré que pour tout voisinage V de $u_{\mathbf{x}}(x^*)$, il existe un voisinage W de x^* tel que $u_{\mathbf{x}}(W) \subset V$.

Si A est $*$-faiblement fermé et $x_0^* \notin A$, on peut trouver un voisinage élémentaire de x_0^* qui ne rencontre pas A ; un tel voisinage est de la forme $W = W(x_0^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$; considérons donc le système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et l'application $u_{\mathbf{x}}$; en raisonnant comme ci-dessus, on voit que W est l'image inverse par $u_{\mathbf{x}}$ de l'ensemble

$$\omega = \{b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n : \forall j = 1, \ldots, n, \quad |b_j - x_0^*(x_j)| < \varepsilon\}.$$

Cet ensemble ω est un ouvert convexe (vérification facile ; géométriquement, c'est un hypercube), qui contient le point $u_{\mathbf{x}}(x_0^*)$; par ailleurs, dire que $W = u_{\mathbf{x}}^{-1}(\omega)$ est disjoint de A signifie exactement que $u_{\mathbf{x}}(A)$ est disjoint de ω.

Si A est convexe et non vide, l'ensemble $A_1 = u_{\mathbf{x}}(A)$ est un convexe non vide disjoint du convexe ouvert non vide ω. D'après le théorème de séparation, on peut trouver une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\sup \ell(A_1) < \ell(b)$ pour tout $b \in \omega$, en particulier $\sup \ell(A_1) < \ell(u_{\mathbf{x}}(x_0^*))$. Mais il existe des coefficients réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que $\ell(b) = \sum_{i=1}^n c_i b_i$ pour tout vecteur $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On a si $b = u_{\mathbf{x}}(z^*)$

$$\ell(u_{\mathbf{x}}(z^*)) = \sum_{i=1}^n c_i z^*(x_i) = z^*\bigl(\sum_{i=1}^n c_i x_i\bigr),$$

donc si on pose $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i \in X$, on aura $\ell(u_{\mathbf{x}}(z^*)) = z^*(x)$ pour tout $z^* \in X^*$. La relation de séparation se traduit alors par

$$\sup_{y^* \in A} y^*(x) = \sup_{y^* \in A} \ell(u_{\mathbf{x}}(y^*)) = \sup \ell(A_1) < \ell(u_{\mathbf{x}}(x_0^*)) = x_0^*(x).$$

b. Soit C un sous-ensemble convexe de la boule unité fermée B_{X^*} ; montrer que si pour tout $x \in X$ on a $\|x\| = \sup_{y^* \in C} y^*(x)$, alors l'ensemble C est w^*-dense dans la boule unité de X^*.

Désignons par A l'adhérence de C pour la topologie $\sigma(X^*, X)$. C'est un ensemble convexe (vérification assez facile : considérons $x_0^*, x_1^* \in A$ et $x^* = (1-t)x_0^* + t x_1^*$, avec $0 \leq t \leq 1$; on doit montrer que $x^* \in A$; soit V un $*$-voisinage de x^* ; il contient un voisinage élémentaire $W = W(x^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$; alors $W_i = W(x_i^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ doit rencontrer C en un point y_i^*, pour $i = 0, 1$, puisque x_i^* est $*$-faiblement adhérent à C ; alors $y^* = (1-t)y_0^* + t y_1^*$ sera dans C et dans W. On voit donc que tout voisinage $*$-faible V de x^* rencontre C, donc $x^* \in A$) ; l'ensemble A est contenu dans B_{X^*} qui est déjà $*$-faiblement fermée. Si on avait $A \neq B_{X^*}$, on pourrait trouver un point $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que $x_0^* \notin A$. D'après ce qui précède (question *a*), il existerait un point $x \in X$ tel que $x_0^*(x) > \sup_{y^* \in A} y^*(x) \geq \sup_{y^* \in C} y^*(x) = \|x\|$; ceci entraîne $\|x_0^*\| > 1$ et contredit le fait que $x_0^* \in B_{X^*}$.

c. Montrer que la boule unité $\mathrm{B_X}$ *de* X *est dense dans celle de* X^{**} *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{X}^{**}, \mathrm{X}^*)$*. Soit* x^{**} *dans* X^{**}*, de norme* ≤ 1 *; montrer que pour tout ensemble fini* F *dans* X^**, de cardinal* $|\mathrm{F}|$*, l'ensemble* $\mathrm{C_F}$ *des* $x \in \mathrm{X}$ *tels que* $\|x\| \le 1$ *et*

$$\forall y^* \in \mathrm{F}, \quad |x^{**}(y^*) - y^*(x)| \le 2^{-|\mathrm{F}|}$$

est un convexe fermé non vide. En déduire que si dans X *toute famille de convexes fermés bornés non vides ayant la propriété d'intersection finie a une intersection non vide, alors* X *est réflexif.*

L'énoncé considére que X "est" un sous-ensemble de X^{**}, mais la rédaction sera plus carrée si on reprend l'injection isométrique $\mathrm{I_X}$ de X dans X^{**} qui associe à chaque vecteur $x \in \mathrm{X}$ la forme linéaire $\mathrm{I_X}(x) : x^* \in \mathrm{X}^* \to x^*(x)$ sur X^*. Dans ce langage plus strict, nous devons montrer que l'image $\mathrm{I_X}(\mathrm{B_X})$ de la boule unité de X est dense dans la boule unité du bidual pour la topologie $\sigma(\mathrm{X}^{**}, \mathrm{X}^*)$.

Appliquons la question précédente à l'espace normé $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^*$ et à son dual $\mathrm{Z}^* = \mathrm{X}^{**}$. Soit $\mathrm{C} = \mathrm{I_X}(\mathrm{B_X}) \subset \mathrm{Z}^*$; pour tout $z = x^* \in \mathrm{Z} = \mathrm{X}^*$, on a

$$\|z\| = \|x^*\| = \sup_{x \in \mathrm{B_X}} x^*(x) = \sup_{x \in \mathrm{B_X}} \mathrm{I_X}(x)(x^*) = \sup_{z^* \in \mathrm{C}} z^*(z),$$

donc $\mathrm{C} = \mathrm{I_X}(\mathrm{B_X})$ est $\sigma(\mathrm{X}^{**}, \mathrm{X}^*)$-dense dans la boule unité de $\mathrm{Z}^* = \mathrm{X}^{**}$.

Pour tout sous-ensemble fini F de X^*, l'ensemble

$$\mathrm{W} = \{y^{**} \in \mathrm{X}^{**} : \forall y^* \in \mathrm{F}, \quad |y^{**}(y^*) - x^{**}(y^*)| < 2^{-|\mathrm{F}|}\}$$

est un voisinage de x^{**} pour $\sigma(\mathrm{X}^{**}, \mathrm{X}^*)$, et x^{**} est dans la boule unité du bidual ; ce voisinage doit donc rencontrer $\mathrm{I_X}(\mathrm{B_X})$. Il existe donc $y \in \mathrm{B_X}$ tel que $y^{**} = \mathrm{I_X}(y) \in \mathrm{W}$, ce qui montre que $|y^*(y) - x^{**}(y^*)| = |y^{**}(y^*) - x^{**}(x^*)| < 2^{-|\mathrm{F}|}$ pour tout $y^* \in \mathrm{F}$, ce qui signifie que $y \in \mathrm{C_F}$ et montre que $\mathrm{C_F}$ est non vide. Par ailleurs il est clair que $\mathrm{C_F}$ est convexe et fermé ; il est aussi borné puisque contenu dans la boule unité par définition.

Si on a la propriété d'intersection mentionnée dans l'énoncé, l'intersection de tous ces convexes $\mathrm{C_F}$ est non vide (la famille $(\mathrm{C_F})_\mathrm{F}$ a la propriété d'intersection finie : si $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ sont des sous-ensembles finis de X^*, l'ensemble $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_p$ est fini et $\mathrm{C_F} \subset \bigcap_{i=1}^p \mathrm{C}_{\mathrm{F}_i}$, donc l'intersection finie est non vide puisqu'elle contient $\mathrm{C_F}$ non vide). Si x est dans l'intersection de la famille $(\mathrm{C_F})_\mathrm{F}$, on voit que $x^*(x) = x^{**}(x^*)$ pour tout $x^* \in \mathrm{X}^*$, donc x^{**} est représentée par un vecteur $x \in \mathrm{X}$, pour tout x^{**}, ce qui montre que X est réflexif.