MT404 **Examen du 13 Septembre 2000**

durée : 3 heures

Les documents sont autorisés.

Exercice I

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ; on suppose que pour toute suite $b = (b_n)_{n\geq 0}$ de l'espace c_0, la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge. En déduire que $a \in \ell_1$.

Exercice II

On désigne par H un espace de Hilbert complexe. On suppose que u est une isométrie de H dans H telle que $u(\mathrm{H}) \neq \mathrm{H}$. Soit e_0 un vecteur de norme 1 orthogonal à $u(\mathrm{H})$; on pose $e_n = u^n(e_0)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Vérifier que e_0 est orthogonal aux vecteurs $(e_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée dans H.

2. On note $u^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ l'adjoint de u. Montrer que $u^*(e_0) = 0_\mathrm{H}$, $u^*(e_1) = e_0$; calculer $u^*(e_n)$ pour tout indice $n \geq 1$.

3. Montrer que pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| < 1$, il existe un vecteur $x \in \mathrm{H}$ non nul tel que $u^*(x) = \lambda x$. En déduire que le spectre de u est égal au disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

4. Montrer que le spectre d'une isométrie $v \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est, ou bien égal au disque unité fermé, ou bien contenu dans le *cercle* unité de $\mathbb{C}$.

Exercice III

On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0, \pi/2], \mu)$, où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, \pi/2]$. Pour toute $f \in \mathrm{H}$, on définit une fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}f)(t) = \cos(t) \int_0^t \sin(s) f(s)\, ds.$$

1.

1a. Montrer que pour toute $f \in \mathrm{H}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Calculer les valeurs de $\mathrm{T}f$ aux points $t = 0$ et $t = \pi/2$.

1b. Montrer que l'application $f \in \mathrm{H} \to \mathrm{T}f \in \mathrm{H}$ définit une application linéaire continue T de H dans H.

2.

2a. Déterminer l'adjoint $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ de l'opérateur borné T.

2b. Montrer que T et T^* sont des opérateurs compacts de H dans H.

3. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{T}f$ et T^*f sont de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. Calculer les dérivées des fonctions $\mathrm{T}f$ et T^*f dans ce cas.

4. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{T} + \mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

4a. Vérifier que l'opérateur A est hermitien et compact.

4b. Montrer que si $f \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{A}f = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, alors f est de classe C^2 sur $[0, \pi/2]$ et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme $f'' + a(\lambda) f = 0$, avec $a(\lambda) \in \mathbb{R}$. Déterminer $f(0)$ et $f(\pi/2)$.

4c. En déduire les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de A. Calculer la norme de A.