Questions

Arturo Giles Flores

November 18, 2008

Excusez moi pour le gros, gros fautes d'ortographe. D'abord, j'ai completement laisse de cote tous les accents pour que l'ecriture aille plus vite. J'espere que ca sera pas trop desagreable, au point de le rendre illisible =).

1 Quasiordinary hypersurfaces and Whitney equisingularity.

Vous vous souvenez que je travaillais sur l'equisingularite a la Whitney des hypersurfaces quasiordinaires avec son cone tangent. Plus specifiquement je traitais le cas des hypersurfaces de type

$$g := y^m - z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n}$$

et j'ai montre que le pair de strata $(\mathfrak{X}^0, O \times \mathbb{C})$ satisfait les conditions de Whitney a l'origin. Pourtant, la fibre speciale $\mathfrak{X}(0)$, c'est a dire, le cone tangent $C_{X,0}$, n'est pas reduit et en plus elle fait partie du lieu singulier de $\mathfrak{X}$. Cela, empeche que la partie lisse de $Sing\mathfrak{X}$ et $0 \times \mathbb{C}$ satisfassent meme la condition a) de Whitney a l'origin, puisque ils sont "transverse". Il me semble que j'aurais du me rendre compte que ca n'allais pas marcher plus tot, vu que je voulais montrer l'equisingularite entre une hypersurface reduite avec des singularites non-isolees, et un hyperplan non-reduit.

J'ai trouve un autre article de Ban, [Ban2], ou il montre que deux hypersurfaces quasiordinaires sont equisinguliers si et seulement si elles ont les memes monomes caracteristiques. Et si on demande que l'hypersurface $(X, 0)$ aille un cone tangent reduit, el qu'lle n'aille pas des tangents exceptionelles, alors d'apres [Ban] le plus petit monome caracteristique est de la forme $z_1^{a_1/m} \cdots z_e^{a_e/m}$ avec $\sum a_i = m$ et donc le cone tangent est de la forme $y^m - z_1^{a_1} \cdots z_e^{a_e}$. En vu de tout ca un hypersurface quasiordinaire ne peut pas etre equisingulier avec son cone tangent, que si elle n'a qu'un seul monome caracteristique et le cone tangent est de la forme mentione ci-dessus.

2 Specialization sur le cone tangent et equisingularite a la Whitney

Pour un germe de singularite $(X,0)$ reduite, equidimensionelle et sans tangents exceptionelles, c'est pas difficile a montrer que si $\mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ est l'espace de specialization de X sur son cone tangent $C_{X,0}$ alors:

Le germe $(\mathfrak{X},0)$ n'a pas des tangents exceptionelles si et seulement si le couple $(\mathfrak{X}^0, 0 \times \mathbb{C})$ satisfait le condition a) de Whitney a l'origin. (1)

Maintenant si je veut que $(X,0)$ et son cone tangent $C_{X,0}$ soient Whitney equisinguliers alors d'abord j'ai besoin que le cone tangent soit reduit ou au moins que la fibre speciale $\mathfrak{X}(0)$ ne soit pas completement contenu dans le lieu singulier de $\mathfrak{X}$, et ca c'est pour permettre au couple $(Sing\mathfrak{X} \setminus 0 \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C})$ de satisfaire la condition a) de Whitney. Par exemple, si je prend une hypersurface defini par $f = f_m + f_{m+1} + \ldots$, si f_{m+1} n'est pas nul, meme si le cone tangent n'est pas reduit alors $\mathfrak{X}(0)$ ne fait partie du lieu singulier, et on a l'espoir que les conditions de Whitneys soient satisfaites. En tout cas, je n'ai pas essaye de construire un tel exemple, et en outre je ne sais pas si on peut parler de equisingularite entre un espace reduit, et un autre qui n'est le pas.

Pour etudier les tangentes exceptionelles de $(\mathfrak{X},0)$ j'ai essaye de comparer les varietes polaires de X et de $\mathfrak{X}$ mais je n'arrive a rien. En plus je n'ai pas des autres idees pour traiter ce probleme, ou encore pour la condition b) de Whitney. Des suggestions ou des conseils?????

3 Lieu singulier en codimension 1

Prenons un germe de singularite $(X,0)$ reduite, equidimensionelle (dim d) et avec lieu singulier lisse de codimension 1. Donc on peut montrer que si le couple $(X^0, SingX)$ satisfait les conditions de Whitney a l'origin, alors le cone tangent est un nombre fini de d-plans, et ces sont tout les limits des espaces tangents, c'est a dire il n'y a pas des tangents exceptionelles.

Comme l'ensemble de points ou les conditions de Whitney sont satisfaites est un ouvert, alors si on considere $(X,0)$ comme un famille de courbes planes en projectant sur $SingX$, l'equisingularite nous donne que localement les courbes ont le meme nombre de branches et en utilisant ca on peut montrer que localement le nombre de d-plans qui forment le cone tangent est aussi localement constant.

J'ai essaye de etudier le cas de lieu singulier de codimension 2, mais jusqu'a la je n'ai rien trouve. Pour le cas de codimension 1 j'ai utilise la restriction de dimension de la fibre du conormal donne par la condition a) de Whitney, et puis la "normal pseudoflatness" de la stratification $X = X^0 \cup SingX$, mais ca me dit pas grand chose pour la codimension 2, donc j'ai besoin d'utiliser une autre chose que je n'ai pas encore trouve.

4 Singular

Je voulais juste vous dire que je vais essayer de ecrire une procedure en singular pour calculer les limits des espaces tangents par la voie des tangents exceptionelles. Je n'ai jamais utilise Singular, mais le calcul a la main s'avere trop difficile et il me semble que ca vaut la peine de essayer. Pour l'instant je suis pas tout a fait sure de comment calculer les equations des varietes polaires, meme pour le cas des hypersurfaces.

References

[Ban] Chunsheng Ban, *Auréole of a quasiordinary singularity*, Proceedings of the American Mathematical Society, **120**, 1994, 393-404

[Ban2] Chunsheng Ban, *A Whitney Stratification and Equisingular Family of Quasi-Ordinary Singularities*, Proceedings of the American Mathematical Society, **117** Vol 2, 1993, 305-311.

[Lê] Lê D.T. , *Limites d'espaces tangents sur les surfaces*, Nova Acta Leopoldina NF 52 Nr.240, 1981, 119-137.

[L-H] Lê D.T., J.P.G Henry, *Limites d'espaces tangents*, Sém. Norguet, Springer Lecture Notes in Math. 482.

[Ha] R. Hartshorne, *Complete intersections and Connectednes*, American Journal of Mathematics, Vol. 84, No. 3 (Jul., 1962), pp. 497-508

[Hi] H. Hironaka, *Stratifications and Flatness*, in *Real and Complex Singularities* (Nordic Summer School, Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, 1977, 199-265.

[L-T] Lê D.T. and B. Teissier, *Limites d'espaces tangents en géométrie analytique*, Comm. Math. Helv., **63**, 1988, 540-578.

[Sn] J. Snoussi, *Limites d'espaces tangents à une surface normale*, Comm. Math. Helv;, **76**, 2001, 61-88.

[Te1] B. Teissier, *Variéés polaires 2: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Springer Lecture Notes **961**, 1981, 314-491.

[Te2] B. Teissier, *Cycles évanescents, secitons planes, et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, Astérisque 7-8, 1973, 282-362.

[Whi] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Annals of Math **81**, 1964,496-549.