Questions

Arturo Giles Flores

May 5, 2009

Soit $g : (\mathfrak{X}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ l'espace de specialisation de $(X, 0)$ sur son cône tangent, avec des coordonees $(z_O, \ldots, z_n, t)$. $(X, 0) \subset (C^{n+1}, 0)$ hypersurface. $(Y, 0) \subset (\mathfrak{X}, 0)$ l'axe des t.

D'apres ce qu'on a discute, on cherche a utiliser le principe de specialisation de la dependance integrale, pour montrer que si $(X, 0)$ n'a pas des cônes exceptionels, et si le cône tangent $C_{X,0}$ est reduit, alors le couple $(\mathfrak{X}^0, Y)$ satisfait les conditions de Whitney a l'origin.

- Comme on est dans les cas des hypersurfaces, le conormal relatif $C_g(\mathfrak{X})$ coincide avec la modification de Nash relatif $N_g(\mathfrak{X})$ et aussi avec l'eclatement de l'ideal jacobien relatif $J_F \subset O_{\mathfrak{X},0}$. Ou $J_F = \langle \partial F/\partial z_i, \rangle\, i = 0, \ldots, n$, $F = t^{-m} f(t\underline{z})$ sert a definir $(\mathfrak{X}, 0)$ et f sert a definir $(X, 0)$.
- Grace a l'isomorphisme entre $C_g(\mathfrak{X}) \setminus \kappa_g^{-1}(\mathfrak{X}(0))$ et $C(X) \times \mathbb{C}^*$ donne par le morphisme $((\underline{z}, t)[\underline{a} : b]) \mapsto ((\underline{z}), [\underline{a}])$ on montre que pour un point $p \in \mathfrak{X}(0)$, tout limite des hyperplans tangents aux fibres de g en p est un limite des hyperplans tangents a X en 0.
- Par hypothese $(X, 0)$ n'a pas des cônes exceptionnels, alors les points de $k_g^{-1}(\mathfrak{X}(0))$ sont de la forme (p, H) ou $p \in C_{X,0}$ et H est un hyperplan tangent a $C_{X,0}$ en p. Par consequent le divisor exceptionel de $C_g(\mathfrak{X})$ defini par l'ideal J_F n'a pas des composantes "verticales" sur $\mathfrak{X}(0)$.
- **Question 1: Est-ce que ca c'est correct?** D'apres la proposition 3.6, page 332 de l'article de Cargese, montrer que le couple $(\mathfrak{X}^0, Y)$ satisfait la condition $a)$ de Whitney a l'origin c'est equivalent a montrer que $\overline{\nu}_{J_F}(\partial F/\partial t) > 1$. Pour montrer cela il faut el il suffit que pour tout k suffisament grand $(\partial F/\partial t)^k \in J_F^{k+1}$ en $O_{\mathfrak{X},0}$.

  On sait que le couple (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en dehors de l'origine. Donc on voudrait trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ a partir duquel $(\partial F/\partial t)^k \in J_F^{k+1}$ en $O_{\mathfrak{X},x}$ pour tout point $x \in Y$ suffisament proche de l'origin. Je crois que ce k_0 existe grace a que $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}(0)$ est isomorphe a $X \times \mathbb{C}^*$ et donc tous les germes $(\mathfrak{X}, (0, t))$, pour $t \neq 0$ sont isomorphes. L'existence de ce k_0, nous permet, pour chaque $k \geq k_0$ de considerer la fonction holomorphe $(\partial F/\partial t)^k/h^{k+1}$ en $C_g(\mathfrak{X})$, ou h est un generateur local de J_F en $C_g(\mathfrak{X})$. Par consequent on obtient la condition souhaite, c'est a dire $\overline{\nu}_{J_F}(\partial F/\partial t) > 1$. Finalement, on sait deja que dans ce cas la $a)$ implique $b)$.

Considerons maintenant le cas de une germe de singularite $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, reduit, et irreductible de dimension d. Supposons en plus que le cône tangent est reduit. Pour les surfaces, Lê considere les points de $l \in \mathbb{P}C_{X,0}$, ou l'eclatement E_0X n'est pas equisingulier le long du diviseur exceptionnel, et il montre que si l n'appartient pas au cône tangent du lieu singulier de X a l'origine $\mathbb{P}C_{SingX,0}$, alors l est une tangente exceptionnelle.

Question 2: Je suppose que dans l'ensemble des points $l \in \mathbb{P}C_{X,0}$ mentionne ci-dessous, on a le lieu singulier de $\mathbb{P}C_{X,0}$ n'est-ce pas?

Si ca c'est vrai, on pourrait envisager une generalisation de ce resultat. Par exemple, soit l_0 un point singulier de $\mathbb{P}C_{X,0}$ tel que l_0 n'appartient pas a $\mathbb{P}C_{SingX,0}$, et soit x_0 un point de la droite $l_0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Si le germe $(\mathfrak{X}, x_0)$ est lisse comme $(\mathfrak{X}(0), x_0)$ est singulier, ca veut dire que l'hyperplan $t = 0$ est tangent a $\mathfrak{X}$ en x_0, et il me semble que ca implique que x_0 appartient a un cône exceptionnel en utilisant que l'image des composantes irreductibles de $\kappa_g^{-1}(\mathfrak{X}(0))$ sont les cônes exceptionnels. Je ne sais pas quoi faire, dans le cas ou le germe $(\mathfrak{X}, x_0)$ est aussi singulier.