Questions

15 août 2007

Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d, Y un sous-espace analytique fermé de X de dimension t, x un point non-singulier de Y, et choisisons un plongement local en x dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de facon que Y soit le sous-espace lineaire $\mathbb{C}^t \times \{0\}$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \mathbb{P}^{n-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{n-1} \supset E_Y C(X) \arrow[r, "\hat{e}_Y"] \arrow[d, "\kappa'"] \arrow[dr, "\zeta"] & C(X) \subset X \times \check{\mathbb{P}}^{n-1} \arrow[d, "\kappa"] \\
X \times \mathbb{P}^{n-1-t} \supset E_Y X \arrow[r, "e_Y"'] & Y \subset X \subset \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

Soient $\{D_\alpha\}$ la famille finie des espaces reduits sous-jacents aux composantes irreductibles de dimension n-2 du diviseur $\zeta^{-1}(Y)$, et denotons aussi $V_\alpha := \kappa'(D_\alpha)$, $W_\alpha := \hat{e}_Y(D_\alpha)$.

Théorème 0.1. *Soient $X \subset \mathbb{C}^n$ un espace analytique réduit, $Y \subset X$ un sous-espace non-singulier, et $x \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Le couple de strates (X^0, Y) satisfait les conditions de Whitney en x.

2) On a l'égalité dim $\zeta^{-1}(x) = n - 2 - t$, oú $t =$dim Y.

3) Le diviseur exceptionnel ensembliste $|\zeta^{-1}(Y)| \subset Y \times \mathbb{P}^{n-1-t} \times \check{\mathbb{P}}^{n-1-t}$ est Y-Lagrangien et donc pour tout α les images V_α et W_α de D_α sont en Y-dualité projective. Dans ce cas, $|\kappa^{-1}(Y)|$ est réunion des Y-duaux des V_α.

Démonstration. □

Lemme 0.2. *Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace analytique réduit de dimension d, et soit $Y \subset X$ un sous-espace non-singulier de dimension t. Si $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ denote l'espace de deformation de X sur le cône normal $C_{X,Y}$, et $C(X), C(Y)$ denotent les espaces conormaux de X, Y respectivement dans $\mathbb{C}^n \times \check{\mathbb{C}}^n$. Alors l'espace conormal relatif*

$$q : C_f(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$$

est isomorphe á l'espace de deformation de $C(X)$ *sur le cône normal* $C_{C(X),C(X)\cap C(Y)}$ *en tant qu'espaces analytiques (reduits ?) sur* $\mathbb{C}$*. En particulier, la fibre* $q^{-1}(0)$ *est isomorphe au cône normal de* $C(X)\cap C(Y)$ *dans* $C(X)$*.*

Démonstration.

Soient $I \subset J$ les ideaux coherents de O_n qui definissent les sous-espaces X, Y respectivement, et appelons $\mathfrak{D}$ á l'espace de deformation de $C(X)$ sur le cône normal $C_{C(X),C(X)\cap C(Y)}$. Notons d'abord que tous les deux espaces, $\mathfrak{D}$ et $C_f(X)$, sont des sous-espaces analytiques de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\check{\mathbb{C}}^n$, et prenons une carte locale de facon que $Y \subset X \subset \mathbb{C}^n$ deviens $\mathbb{C}^t \subset X \subset \mathbb{C}^n$ avec des coordonnées locaux :

$$(v, y_1, \ldots, y_t, z_{t+1}, \ldots, z_n, a_1, \ldots, a_t, b_{t+1}, \ldots, b_n)$$

Choissisons des équations locaux $(f_1, \ldots, f_r)$ pour X dans $\mathbb{C}^n$, telles que leurs formes initiales $in_J f_i$ engendrent l'idéal $in_J I$ de $gr_J O_X := \sum J^m/J^{m+1}$ engendré par les formes initiales des éléments de I, c'est-á-dire l'idéal définissant le cône normal $C_{X,Y}$ de X le long de Y. Alors, on sait que les equations $F_i(v,y,z) := v^{-n_i}f_i(y,vz)$, $i = 1,\ldots,r$ oú n_i $=\sup\{n\,|\,f_i \in J^n\}$ définissent localement l'espace $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, en plus, l'ouvert $\mathfrak{X}\setminus f^{-1}(0)$ est isomorphe á $X\times\mathbb{C}^*$, en tant que des espaces analytiques sur $\mathbb{C}^*$, via le morphisme ϕ definit par $(v,y,z)\mapsto(v,y,vz)$.

Maintenant, on peut construire l'espace conormal relatif

$$q : C_f(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$$

et grace á que $\mathfrak{X}\setminus f^{-1}(0)$ est un ouvert avec des fibres $\mathfrak{X}(v)$ isomorphes a X, l'isomorphisme ci-dessus nous donne immediatement que $C_f(\mathfrak{X})\setminus q^{-1}(0)$ est isomorphe a $C(X)\times\mathbb{C}^*$.

En outre, notons que comme $J = \langle z_{t+1},\ldots,z_n\rangle$ dans $\mathbb{C}^n$, alors l'espace conormal $C(Y)$ est donné par les equations $(z_{t+1},\ldots,z_n,a_1,\ldots,a_t)$ dans $\mathbb{C}^n\times\check{\mathbb{C}}^n$. Pour autant, si on choisis des equations locaux $(g_1,\ldots,g_s)$ pour $C(X)$ comme ci-dessus, alors les equations $G_i(v,y,z,a,b) = v^{-k_i}g_i(v,y,vz,va,b)$ définissent localement l'espace $\mathfrak{D} \xrightarrow{p} \mathbb{C}$, oú la fibre $p^{-1}(0)$ est le cône normal $C_{C(X),C(X)\cap C(Y)}$, et l'ouvert $\mathfrak{D}\setminus p^{-1}(0)$ est isomorphe á $C(X)\times\mathbb{C}^*$ avec le morphisme $(v,y,z,a,b)\mapsto (v,y,vz,va,b)$.

Utilisons ce dernier morphisme, pour definir un automorphisme de l'espace ambient

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\check{\mathbb{C}}^n &\longrightarrow \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\check{\mathbb{C}}^n\\ (v,y,z,a,b) &\longmapsto (v,y,vz,va,b)\end{aligned}$$

lequel est un isomorphisme sur l'ouvert dense $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^n\times\check{\mathbb{C}}^n$. Ainsi, si on prends l'espace analytique $C(X)\times\mathbb{C}^*$ dans le but, alors, d'apres ce qu'on vient de dire, $\psi^{-1}(C(X)\times\mathbb{C}^*) = \mathfrak{D}\setminus p^{-1}(0)$avec sa structure réduite.

Finalement, rappelons nous que les deux fleches servant a definir le morphisme q, sont induites par les projections

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \check{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

et donc on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C_f(\mathfrak{X}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\kappa_f"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "q"'] & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \check{\mathbb{C}}^n \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \check{\mathbb{C}}^n \arrow[d, "\pi"] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right=10, "f"'] & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \arrow[dl] \\
& & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, tout ce qu'il nous reste a verifier c'est que l'image par ψ de $C_f(X) \setminus q^{-1}(0)$ c'est precisement $C(X) \times \mathbb{C}^*$, puisque on sait deja que $\psi^{-1}(C(X) \times \mathbb{C}^*) = \mathfrak{D} \setminus p^{-1}(0)$ et donc les deux espaces auront un ouvert dense en commun et pour autant sa fermeture aussi.

Soit $(y, z) \in X$ un point lisse, alors les formes

$$\nabla f_i(y, z) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(y, z), \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial y_t}(y, z), \frac{\partial f_i}{\partial z_{t+1}}(y, z), \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial z_n}(y, z) \right)$$

engendrent le sous-espace lineaire de $\check{\mathbb{C}}^n$ de toutes les formes qui s'annulent sur l'espace tangent $T_{(y,z)}X^0$, i.e. tous les points de $C(X)$ en-dessus de (y, z). Analoguement, soit $(v, y, z) \in \mathfrak{X}$ un point lisse de $\mathfrak{X} \setminus f^{-1}(0)$, alors les formes

$$\nabla F_i(v, y, z) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(v, y, z), \cdots, \frac{\partial F_i}{\partial y_t}(v, y, z), \frac{\partial F_i}{\partial z_{t+1}}(v, y, z), \cdots, \frac{\partial F_i}{\partial z_n}(v, y, z) \right)$$

engendrent le sous-espace lineaire de $\check{\mathbb{C}}^n$ de toutes les formes qui s'annulent sur l'espace tangent $T_{(v,y,z)}\mathfrak{X}(v)^0$, i.e. tous les points de $C_f(\mathfrak{X})$ en-dessus de (v, y, z). Mais, d'apres notre choix de (v, y, z), on sait que $\phi((v, y, z)) = (v, y, vz)$ est un point lisse de $X \times \mathbb{C}^*$ et en particulier (y, vz) est un point lisse de X. En plus, notons que :

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(v, y, z) = v^{-n_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y, vz)$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial z_k}(v, y, z) = v^{-n_i+1} \frac{\partial f_i}{\partial z_k}(y, vz)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\psi(v, y, z, \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(v, y, z), \frac{\partial F_i}{\partial z_k}(v, y, z)) &= (v, y, vz, v^{-n_i+1} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y, vz), v^{-n_i+1} \frac{\partial f_i}{\partial z_k}(y, vz)) \\
&= (v, y, vz, v^{-n_i+1} \nabla f_i(y, vz))
\end{aligned}$$

est bien un point de $C(X) \times \mathbb{C}^*$, et comme $v \neq 0$, les $v^{-n_i+1}\nabla f_i(y, vz)$ engendrent a nouveau la fibre sur (v, y, vz) de $C(X) \times \mathbb{C}^* \to \mathfrak{X} \times \mathbb{C}^*$ et donc ψ surjecte $C_f(X) \setminus q^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}^*$. $\square$