Le statut paradoxal du paradoxe

Jean-Yves Girard
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 – **CNRS**
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

21 décembre 2007

Littéralement « hors du dogme », ($\delta\acute{o}\xi\alpha$ = dogme, préjugé), le paradoxe est un empêcheur de tourner en rond. Il a pris, tardivement et sous l'influence du logicisme, le sens, trop précis et réducteur, de la contradiction qui tue : ce qui n'a guère de sens qu'en mathématiques et qui même alors reste réducteur : que dire de la courbe de Peano, des géométries non euclidiennes qui sont pourtant bien paradoxales ? Il vaut mieux réserver l'appellation d'*antinomie* à ces contradictions formelles dont il n'y a que peu d'exemples, principalement celle connue sous le nom de *paradoxe de Russell*.

Quelques paradoxes

Faire des listes, des catalogues, de paradoxes, comme on en trouve au Café du Commerce, rue `wikipedia.com`, c'est déjà une façon de les neutraliser, de « boire le sortilège », de noyer le poisson : pensons aux devinettes tordues concoctées par Smullyan, ce logicien laborieux spécialisé dans le « celui qui dit toujours vrai/celui qui dit toujours faux » qui sont, au fond, des *machines à décerveler*. Je vais me concentrer sur une liste non exhaustive, mais représentative de certains mécanismes du paradoxe, en m'attachant au dogme qui est, sinon réfuté, du moins battu en brèche.

Le crétois : (ou menteur) Un crétois dit « les crétois sont menteurs ». C'est assez boiteux, car il y a une nuance entre être menteur et ne dire que des mensonges (une telle personne serait vraiment très utile, puisqu'il n'y aurait qu'à inverser ses réponses) ; malgré tout, ce petit paradoxe réfute le dogme d'une possible transparence du langage. Il a été imité, usé jusqu'à la corde par le Smullyan susmentionné ; il est plus drôle d'en chercher des occurrences involontaires. Ainsi, Tony Blair déclarant (2004) que les armes de destruction massive existent,... mais qu'on ne les trouvera jamais, énonce un paradoxe, vu que la torture, la corruption, etc., pratiquées à grande échelle, doivent nécessairement dévoiler les usines ou leurs traces. Finalement, Blair dit « je mens ».

La diagonale : On sait depuis les Grecs que la diagonale du carré ($\sqrt{2}$) est irrationnelle, i.e., n'est pas une fraction m/n. C'est, avec les paradoxes Zénoniens, le premier qui soit vraiment convaincant et important. Il réfute le dogme pythagoricien des relations harmoniques, rationnelles, entre les objets (par exemple les intervalles de la gamme naturelle : $9/8, 10/9, 16/15, 9/8, 10/9, 9/8, 16/15$). Observons que ce dogme est simple, voire simpliste, et que sa réfutation donne lieu à un paradoxe très pur.

La quadrature du cercle : Il s'agit d'un replâtrage du dogme pythagoricien : aux entités rationnelles, on ajoute la diagonale et les constructions du même genre (règle et compas, e.g., le nombre d'or $1/2(1+\sqrt{5})$, les intervalles de la gamme tempérée), i.e., tous les nombres dits « algébriques ». Pourtant, le nombre π ne peut pas être obtenu ainsi : c'est l'impossibilité de la *quadrature du cercle*, résultat de Lindemann (1882) qui énonce un beau paradoxe, la *transcendance*[1] de π.

La diagonale de Cantor : Peut-on replâtrer ce replâtrage en ajoutant des nombres tels que π, e, etc. ? Vers 1880, Cantor répond non, une fois pour toutes. La construction de Cantor est simple : tout replâtrage induit une énumération exhaustive des nombres réels, disons ceux compris entre 0 et 1. On les dispose sur un tableau, avec, sur la $\text{n}^{\text{ième}}$ ligne, les décimales du $\text{n}^{\text{ième}}$ nombre. On fabrique alors un nombre dont la $\text{n}^{\text{ème}}$ décimale est choisie différente de la $\text{n}^{\text{ième}}$ décimale du $\text{n}^{\text{ième}}$ nombre : ce nombre « diagonal » a été « oublié » par le replâtrage. C'est très fort, car ça coupe l'herbe sous le pied de toute forme de néo-pythagorisme. Mais, en même temps, c'est artificiel, tordu, spécieux : le contre-exemple ne veut rien dire (au contraire de $\sqrt{2}, \pi$, qui ont un sens géométrique immédiat). Ce qui explique la haine inextinguible à l'égard de ce résultat : ainsi, le mois passé, j'ai encore reçu une prétendue démolition du paradoxe de Cantor ; ces réfutations, œuvres d'autodidactes fêlés, vont directement à leur vraie place, la poubelle. Mais elles ont pour elles le caractère bizarre du paradoxe. Il est, en effet, important de remarquer que les replâtrages du pythagorisme sont de l'ordre de l'acharnement thérapeutique : on a fini par admettre comme procédé de construction tout ce que l'on est

[1] C'est à dire que π n'est pas solution d'une équation algébrique à coefficients rationnels.

capable d'imaginer. Cantor arrive à fabriquer quelque chose qui sorte de ce « tout », mais c'est un peu comme une hernie qui sortirait d'un bandage trop serré, pas beau à voir. Autrement dit, ce qui est tordu, ce n'est pas le paradoxe, c'est le dogme[2].

Russell : Le paradoxe de Russell (1902), simplifiant celui de Burali-Forti (1898), contredit le dogme « toute propriété définit un ensemble ». On exhibe l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas. Techniquement, c'est une variante à peine modifiée de la diagonale de Cantor[3]. Par contre, il s'agit d'une *antinomie* : si les paradoxes précédents étaient des maladies de peau, il s'agit ici d'une maladie de cœur, puisque la théorie des ensembles[4] devient contradictoire. La question de la présence d'antinomies, i.e., de la seule forme clairement identifiable de paradoxe, a dominé la logique du début du siècle passé. C'est le paradoxe de Gödel (théorèmes d'incomplétude) qui referme cette chasse aux antinomies sur un constat d'impossibilité.

Gödel 1 : Le premier théorème d'incomplétude (1931) reprend un vieux paradoxe de Richard (1905) « le plus petit entier qu'on ne peut pas définir en moins de 20 mots », pour arriver à écrire « je ne suis pas prouvable ». C'est en fait la diagonale de Cantor qui reprend du service, pour produire une énoncé vrai, mais non prouvable, ... mais qui ne veut strictement rien dire. L'*énoncé de Gödel* est une maladie nosocomiale, dont le caractère tératologique est l'image négative de l'idéologie scientiste (une connaissance totale, immédiate, transparente, l'envers du réel comme un annuaire de mots de passe) à laquelle il assène un coup fatal.

Gödel 2 : Le second théorème d'incomplétude (1931) interdit de débusquer les paradoxes : prouver sa propre absence de paradoxes (au sens restrictif d'antinomie) est, précisement, une antinomie ! C'est une variation technique assez éprouvante sur le premier théorème, qu'il faut formaliser[5]. Il ne dit au fond rien de plus que ceci : les armées qui interdisent toute investigation sur leurs actions signent en fait les crimes qu'elles pensent blanchir au moyen de prétendues enquêtes internes.

---

[2] Liouville avait produit, vers 1840, des nombres transcendants en considérant des nombres dont le développement décimal « a énormément de trous », i.e., de zéros ; ces nombres artificiels préfigurent le paradoxe de Cantor.

[3] Remplacer « la m$^{\text{ième}}$ décimale du n$^{\text{ième}}$ nombre » par « x appartient à y ».

[4] Plus précisément, sa première version, dite « naïve ».

[5] Cette formalisation, qui anticipe sur la moderne numérisation du langage, des sons, des images, etc. est prétexte à tirer Gödel en direction du cabalistique et donc, du scientisme. Ce qui est paradoxal dans le théorème de Gödel, c'est qu'il doit faire un long bout de chemin avec le dogme avant de l'assassiner ; de là à l'accuser de complicité avec le dogme, voir l'affligeant *Gödel-Escher-Bach*, il y a un pas que l'honnêteté interdit de franchir.

Paradoxes du continu : Les paradoxes formels, antinomiques, occupent le devant de la scène au détriment de paradoxes autrement plus saisissants, trouvés au XIX$^{\text{iéme}}$ siècle. Ainsi, les géométries non euclidiennes, puis la courbe sans tangente (= dérivée, vitesse), ou encore la courbe qui remplit une surface. Ces paradoxes (Weierstraß, Peano) mettent en cause notre perception géométrique, par exemple celle de la dimension, sans pour autant la détruire : finalement, on passe à côté de la catastrophe que serait l'identification entre ligne et surface[6]. Plus accessibles sont les géométries non euclidiennes qui permettent d'envisager la *courbure* de l'espace ambient : en dimension 2, la courbure positive est celle du ballon de rugby, la courbure négative celle de la centrale nucléaire.

Et d'autres... : Mentionnons le paradoxe de Condorcet, qui réfute l'idée d'une démocratie élective parfaite, autrement dit le dogme « tout est comparable ». En effet, comment choisir entre deux choses distinctes, mais semblables, disons entre une boule jaune et une boule verte ?

Dans certains cas, on peut déplorer l'absence de paradoxe. Par exemple, l'utilisation de la logique classique, sous la forme du raisonnement par l'absurde, est bien établie dans l'argumentation politique. Ainsi, on soutient les américains en Irak en arguant des catastrophes qui suivraient leur éventuel retrait. Logiquement, l'argument est spécieux, car il ne justifie pas le soutien, il se contente de réfuter l'opposition à l'invasion américaine : il s'agit donc d'une *double négation*. On sait depuis un siècle que la réduction d'une double négation à une vérité — au moyen du raisonnement par l'absurde — est douteuse ; c'est un des aspects les plus immédiats de l'*intuitionnisme* de Brouwer. Hors du champ clos de la logique formelle, on ne dispose pas vraiment de paradoxe[7] démontant le raisonnement par l'absurde.

Que faire ?

Les dogmes réfutés sont toujours des formes du *scientisme* :

- On peut tout savoir (le menteur, Gödel).
- On peut tout comparer (Condorcet).
- On peut tout construire ($\sqrt{2}, \pi$, Cantor).
- Tout ce qu'on dit fait sens (le Crétois, Richard, Russell).

[6] La topologie algébrique permet de montrer qu'une surface n'est pas la même chose qu'une ligne ou qu'un volume.

[7] Il n'est pas question ici d'antinomie, puisque le raisonnement par l'absurde est cohérent, tout comme la logique classique.

et donc, comme nous l'avons déjà remarqué, ils font l'objet d'une défense obstinée de la part des gardiens du temple. Les techniques employées pour neutraliser les paradoxes sont les suivantes :

La banalisation : Je me souviens d'une personne qui usait, fatiguait, tout qualificatif applicable à son frère ; les mots, trop pliés, finissaient par rendre l'âme et le frère, de lourdaud pénible, devenait — littéralement — inqualifiable. La banalisation du paradoxe à travers sa production à la chaîne est la défense la plus perverse du dogme. Ainsi, le célèbre *Gödel-Escher-Bach* qui ramène le paradoxe de Gödel (l'incomplétude) à des jeux de miroirs tordus cherche-t-il avant tout à gommer l'aspect hétérodoxe, iconoclaste de l'incomplétude ; pire, il se dégage de ces bricolages cabalistiques une impression de scientisme, alors que le paradoxe de Gödel est, précisément, une réfutation des formes les plus brutales dudit scientisme. Un vrai paradoxe n'a donc ni frère ni sœur : c'est un aérolithe de la pensée, dont le seul rôle est de *témoigner*.

La réfutation : Plus franche, mais moins efficace, la réfutation frontale souffre d'un défaut majeur : elle n'a cours que chez les vrais croyants. Ainsi, les réfutations du paradoxe de Gödel, qui sont légion, ne sont reconnues que par l'intelligence artificielle, i.e., par des débiles légers.

Le replâtrage : On replâtre en ajoutant une clause qui intègre le paradoxe ; un paradoxe similaire apparaît dans ce replâtrage, on l'intègre à son tour... Dans cette course entre le canon et la cuirasse, le canon finit toujours par gagner : les paradoxes de Cantor ou de Gödel intègrent le replâtrage à l'avance, d'où l'exaspération qu'ils suscitent. À ce propos, je ne peux m'empêcher d'exaspérer les réfutateurs du second théorème d'incomplétude « une théorie cohérente ne prouve pas sa propre cohérence » avec cette remarque simple, mais ravageuse : ce résultat est ir-ré-fra-gable, j'ai bien dit « irréfragable », ce qu'on ne peut pas dire des autres vérités scientifiques ! En effet, le théorème a été prouvé, reprouvé et même vérifié mécaniquement sur ordinateur (les machines peuvent *vérifier* comme un maniaque qui arrache les ailes aux mouches, les met en deux tas, puis vérifie qu'il y en a autant à gauche qu'à droite ; elles sont par contre incapables de la moindre forme de créativité, autrement dit, elles ne savent pas *trouver*). On ne peut pas exclure complètement (malgré les lourds handicaps qui affligent les auteurs de tels travaux) l'existence d'une réfutation correcte. Mais alors, les mathématiques prouvant l'incomplétude et son contraire seraient antinomiques, incohérentes. Et le théorème d'incomplétude « si les mathématiques sont cohérentes... » évidemment vrai : « *ex falsum quod libet* ». Autrement dit, ce qui me tue me renforce !

Le dénigrement : On introduit un doute quant à la pertinence méthodologique du paradoxe. Cela s'applique aux paradoxes du type Cantor, Gödel, qui réfutent, non pas des dogmes purs, simplistes comme le pythagorisme, réfuté par la diagonale du carré, mais leur lointain avatar, réfuté par la diagonale de Cantor, un objet beaucoup moins naturel et donc suspect. Ces jocrisses devraient prendre un miroir : ils verraient que le côté spécieux du paradoxe répond au côté boursouflé, apoplectique, des dogmes plusieurs fois replâtrés.

La correction : La pire horreur, c'est de vouloir résoudre un paradoxe, comme si ces pauvres aérolithes attendaient, comme des bannis, d'être réintégrés dans le dogme. Ici, on atteint au pire grotesque, donnons donc un exemple. Certains seraient venus à bout du second théorème d'incomplétude, au moyen d'une prétendue « logique paraconsistante[8] » ; il s'agit d'un système logique où l'idée même de contradiction est impossible *a priori*. Un article de logique paraconsistante se présente usuellement comme une litanie de définitions imbaisables, ce qui fait qu'on abandonne au bout de la première page : ces gens-là agitent la boue pour avoir l'air profond. On peut pourtant expliquer l'« idée » avec une excellente métaphore, empruntée à l'économie ; en effet, ce qui se rapproche le plus de la manipulation formelle des concepts mathématiques, ce sont les échanges monétaires : quoi de plus abstrait que l'argent ? La circulation des billets, des chèques, etc. correspond aux règles du raisonnement formel[9] et la contradiction (= paradoxe au sens d'antinomie), devient l'insolvabilité[10]. Tout le monde comprend très bien qu'il n'y aucune garantie *a priori* contre l'insolvabilité ; l'actualité récente est d'ailleurs là pour nous le rappeler. En termes bancaires, la logique paraconsistante propose tout simplement de soigner l'insolvabilité par la cavalerie, le chèque sans provision : « pas vu, pas pris », ... mais il faut courir vite ! Il se trouve que, formulée en termes courants (c'est le cas de le dire !), la « paraconsistance » ne suscite qu'un haussement d'épaules ; en termes mathématiques, le terrorisme intellectuel est tel (les symboles illisibles, tels une nouvelle Kabbale) qu'on est plus enclin à avaler cette couleuvre. En fait, la cohérence formelle (absence de paradoxe) est une forme d'honnêteté ; la « paraconsistance » repose sur une définition malhonnête de l'honnêteté !

[8] *Consistant* est un anglicisme pour « cohérent », en anglais *consistent*, qui veut dire « non-contradictoire, sans antinomie ». Il faudrait dire *paracohérent*, mais il vaut mieux garder l'anglicisme, car pourquoi importer cette vilenie ?

[9] Par exemple l'énoncé « tout entier est somme de quatre carrés » signifie « donne-moi un entier, je te rendrai quatre carrés dont il est la somme ».

[10] On aurait trouvé un entier qui ne soit pas somme de quatre carrés.

Le point aveugle

Les paradoxes les plus intéressants sont ceux qui nous choquent le plus, car ils touchent à nos conceptions, nos préjugés. Bien sûr, ils nous invitent à en changer, mais ce n'est pas tâche facile. Ainsi, on admettra facilement que l'existence d'un Saddam Hussein en dit long sur les limites de la politique moderne ; mais son exécution n'a pas transformé pour autant le monde en paradis. Le paradoxe pointe en fait sur un défaut hors cadre, quelque chose qu'on ne voit pas : sans le paradoxe, on ne saurait même pas qu'il y a quelque chose qu'on ne voit pas. Le paradoxe dénonce cette fissure dans l'édifice[11], mais son caractère souvent spécieux nous dit aussi qu'il n'est qu'un lointain indice, très indirect, d'un vice de construction. C'est un peu comme une fièvre qui indique une maladie, mais on ne sait laquelle, ou encore le malaise qu'on éprouve, avant toute analyse, devant une situation fausse.

L'utilisation raisonnée, rationnelle, du paradoxe, est l'exercice le plus difficile qui soit. Personnellement, j'ai été capable d'analyser le paradoxe de Russell et de découvrir qu'il recelait un non-dit subliminal, à savoir que, non seulement les propriétés sont pérennes, mais que cette pérennité est elle-même pérenne[12]. Et donc, l'antinomie de Russell nous invite finalement à revoir notre conception hâtive de la pérennité des choses. Russell n'avait su que fabriquer un poil à gratter : s'il avait vu au-delà, il ne se serait pas privé de le dire ; il aura donc fallu presque 100 ans de maturation pour arriver à faire « parler » ce paradoxe.[13]

En résumé, le paradoxe est une clef dont on n'a pas la serrure.

NON SI NON LA

[11]Les replâtrages du dogme ont pour effet de lisser la surface. Il y a de moins en moins d'aspérités et de plus en plus en plus de sophismes qui justifient le dogme.

[12]La pérennité de la mer, c'est que l'on peut y puiser un seau d'eau sans que son niveau ne baisse ; la pérennité de cette pérennité, c'est qu'il y aurait un moyen de vider la mer sans que son niveau ne baisse !

[13]Dans le genre « record de longévité », on peut penser aux paradoxes de Zénon (Achille et la tortue, la flèche), qui touchent à la granularité du temps. Pendant longtemps, on n'a su que les ressasser sans jamais trouver quoi que ce soit de nouveau. Il a fallu attendre le XX[ième] siècle et la mécanique quantique pour que l'on puisse réconcilier les deux granularités (discret, continu).