

BERNARD TEISSIER.

Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes.

Introduction

On associe à chaque point w d'un espace analytique complexe réduit X la suite des multiplicités en w des *variétés polaires locales* de X . Étant donné un plongement $(X, w) \subset (\mathbf{C}^N, 0)$, on peut décrire la variété polaire locale de codimension k soit comme ensemble des points $y \in X$ où une direction limite en y d'hyperplans tangents à la partie lisse X^0 de X appartient à un sous-espace linéaire $\mathbf{P}^{a-k} \subset \check{\mathbf{P}}^{N-1}$ donné et assez général, soit comme lieu critique d'une projection linéaire assez générale $X \rightarrow \mathbf{C}^{a-k+1}$. Dans le cas où X est un cône de sommet w on retrouve des notions connues de géométrie projective. La première définition permet de relier les variétés polaires à la géométrie des limites d'espaces tangents et en particulier de montrer l'existence d'une stratification de Whitney canonique minimale de X , c'est-à-dire de classifier, du point de vue de l'équisingularité à la Whitney, les singularités de X . La seconde définition permet de relier, au moyen de la théorie de Morse, les multiplicités des variétés polaires en w à des invariants topologiques locaux de X en w . Ceci permet de démontrer une réciproque du théorème de Thom-Mather, c'est-à-dire de montrer l'équivalence de conditions topologiques et des conditions de Whitney. Une partie de ces résultats s'étend au cas relatif, c'est-à-dire à la condition w_f de Thom stricte pour un morphisme $f: X \rightarrow S$. Les liens avec la théorie des \mathcal{D} -modules d'une part, et avec les problèmes de résolution simultanée des singularités d'autre part, auraient par trop allongé le texte. Le lecteur est renvoyé à [10], [17] pour l'un et à [13] pour l'autre.

§ 1. Limites d'espaces tangents

Soit N un entier et soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un sous-ensemble sous-analytique. D'après [6], il existe un sous-ensemble sous-analytique $\text{Sing } X$ de X

tel que $X^0 = X - \text{Sing } X$ soit dense dans X et soit un sous-espace analytique réel non singulier de \mathbf{R}^N . Supposons que toutes les composantes connexes de X^0 aient la même dimension d , et considérons l'application de Gauss $\gamma: X^0 \rightarrow G(N-1, d-1)(\mathbf{R})$ de X^0 dans la grassmannienne des $(d-1)$ -plans de $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{R})$ qui à chaque point $x \in X^0$ associe la direction de l'espace tangent à X^0 en x . En utilisant le théorème de rectilinéarisation de *loc. cit.*, on peut vérifier que le graphe de l'application de Gauss est sous-analytique, et il en est donc de même (*loc. cit.*) de son adhérence $N(X)$ dans $X \times G$ où $G = G(N-1, d-1)(\mathbf{R})$. Le sous-ensemble sous-analytique $N(X)$ de $\mathbf{R}^N \times G$, muni du morphisme $\nu: N(X) \rightarrow X$ induit par la première projection, sera appelé *modification de Nash* de l'ensemble sous-analytique X . Le morphisme ν induit un isomorphisme $\nu^{-1}(X^0) \simeq X^0$ et $\dim N(X) = d$. Pour chaque point $x \in X$, le sous-ensemble sous-analytique $\nu^{-1}(x) = N(X) \cap (\{x\} \times G)$ de G est l'ensemble des positions limites en x d'espaces tangents aux points de X^0 . De façon analogue, on peut définir l'espace conormal de X dans \mathbf{R}^N comme l'adhérence $T_X^* \mathbf{R}^N$, dans l'espace cotangent $T^* \mathbf{R}^N$ à \mathbf{R}^N , de l'espace conormal à X^0 dans \mathbf{R}^N constitué de l'ensemble des couples $(x, \xi) \in T^* \mathbf{R}^N$ tels que x appartienne à X^0 et que l'espace tangent à X^0 en x soit contenu dans le noyau de l'application linéaire $\xi: T_{\mathbf{R}^N, x} \rightarrow \mathbf{R}$. Ainsi $T_X^* \mathbf{R}^N$ est un sous-ensemble fermé de $T^* \mathbf{R}^N \simeq \mathbf{R}^N \times \check{\mathbf{R}}^N$ où $\check{\mathbf{R}}^N$ désigne le dual de \mathbf{R}^N , stable par les homothéties du second facteur et dont on vérifie comme plus haut qu'il est sous-analytique. On note $\mathcal{C}(X, \mathbf{R}^N)$ son projectivisé, c'est-à-dire son image dans $\mathbf{R}^N \times \check{\mathbf{P}}^{N-1}$, et $\kappa: \mathcal{C}(X, \mathbf{R}^N) \rightarrow X$ le morphisme induit par la première projection. Un point (x, ξ) de $T^* \mathbf{R}^N$ est dans $T_X^* \mathbf{R}^N$ si ξ est limite en x de directions d'hyperplans tangents en des points de X^0 , c'est-à-dire s'il existe une suite de points $x_i \in X^0$ tendant vers x et d'hyperplans $\xi_i = 0$ tangents à X^0 en x_i , c'est-à-dire tels que T_{X^0, x_i} soit contenu dans le noyau de ξ_i , et que l'on a $\xi = \text{Lim } \xi_i$. Il revient au même de dire que le noyau de ξ en x contient une direction limite en x d'espaces tangents à X^0 . On remarque que pour $x \in X^0$, la fibre $\kappa^{-1}(x)$ est isomorphe à \mathbf{P}^{N-1-d} , et donc $\dim \mathcal{C}(X, \mathbf{R}^N) = N-1$.

Soit $f: X \rightarrow \mathbf{R}^p$ un morphisme sous-analytique, que nous supposons installé, c'est-à-dire que l'on s'est donné un plongement $X \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^N$ sous-analytique et que f est obtenu comme restriction à X de la première projection. Supposons qu'il existe un ouvert sous-analytique dense X^0 de X qui soit une sous-variété analytique réelle de X telle que en chaque point x de X^0 le noyau de l'application linéaire tangente à f en x soit de dimension d . On peut définir une application de Gauss relative $\gamma_f: X^0 \rightarrow G$ et par l'adhérence de son graphe définir comme plus haut la modi-

fication de Nash relative, notée $\nu_f: N_f(X) \rightarrow X$; un point $z \in N_f(X)$ représente une direction limite en $\nu_f(z)$ d'espaces tangents aux fibres de f en des points de X^0 tendant vers $\nu_f(z)$. De même on peut définir l'espace conormal relatif $T_{X^0/\mathbb{R}^p}^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N$ de X^0 dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N$ comme noyau de l'homomorphisme naturel de fibrés cotangents relatifs $T^*(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{R}^p \times X^0 \rightarrow T^*(X^0/\mathbb{R}^p)$ et l'adhérence dans $T^*(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{R}^p$ de $T_{X^0/\mathbb{R}^p}^*(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{R}^p$ est l'espace conormal relatif de X , qui est un sous-ensemble sous-analytique de $T^*(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N \times \check{\mathbb{R}}^N$ stable par rapport aux homothéties de $\check{\mathbb{R}}^N$, et dont le projectivisé est un sous-ensemble sous-analytique $C_f(X, \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}(\mathbb{R})$, de dimension $N+p-1$, en fait contenu dans $X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que X est un espace analytique complexe réduit et soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme analytique complexe. Notons $\Omega_f^1 = \Omega_{X/S}^1$ le \mathcal{O}_X -module cohérent des 1-formes différentielles relatives et supposons qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense X^0 de X tel que $\Omega_f^1|_{X^0}$ soit localement libre de rang d . Soit $g: G \rightarrow X$ la grassmannienne des quotients localement libres de Ω_f^1 . Par définition, l'image réciproque $g^*\Omega_f^1$ a sur G un quotient localement libre de rang $d: g^*\Omega_f^1 \rightarrow L \rightarrow 0$ et, pour un morphisme $h: T \rightarrow X$, se donner un quotient localement libre de rang d , $h^*\Omega_f^1 \rightarrow L_T \rightarrow 0$, équivaut à se donner un morphisme $T \xrightarrow{s} G$ tel que $g \circ s = h$ et $s^*L \simeq L_T$. D'après l'hypothèse on a donc une section $\sigma: X^0 \rightarrow G$ de $g|_{g^{-1}(X^0)}$. L'adhérence de l'image de cette section est un sous-ensemble analytique fermé $N_f(X) \subset G$, et le morphisme $\nu_f: N_f(X) \rightarrow X$ induit par g est propre et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense $\nu_f^{-1}(X^0)$. C'est donc une modification de X , appelée modification de Nash relative de X/S . Si le morphisme f est installé au moyen d'un plongement $X \subset S \times \mathbb{C}^N$, ce qui est toujours le cas localement sur X , on retrouve ainsi la modification de Nash décrite ci-dessus dans le cadre sous-analytique. On peut de même, dans le cas où f est installée, définir l'espace conormal relatif (complexe) de X dans $S \times \mathbb{C}^N$, qui est un sous-espace analytique de $T^*(S \times \mathbb{C}^N)/S \simeq S \times \mathbb{C}^N \times \check{\mathbb{C}}^N$ conique par rapport aux homothéties de $\check{\mathbb{C}}^N$, et l'espace conormal projectif associé $C_f(X, S \times \mathbb{C}^N)$ ou $C_f(X)$, qui est un sous-espace analytique fermé de $X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$, de dimension $N-1 + \dim S$.

Exemples. (1) Soit U un ouvert de \mathbb{C}^N et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme analytique. La modification de Nash relative coïncide avec l'espace conormal relatif et est l'éclatement dans U de l'idéal jacobien $j(f) = (\partial f/\partial z_1, \dots, \partial f/\partial z_N)\mathcal{O}_U$ engendré par les dérivées partielles de f .

(2) Soient U un ouvert de \mathbb{C}^N et $X = f^{-1}(0)$ avec f comme ci-dessus et tel que $f^{-1}(0)$ soit réduit non vide. La modification de Nash de X coïncide avec l'espace conormal et est l'éclatement dans X de l'idéal $j(f) \cdot \mathcal{O}_X$ engendré dans \mathcal{O}_X par les restrictions à X des dérivées partielles de f (voir [26], [27]).

Soit maintenant X un sous-espace analytique complexe réduit, purement de dimension d , d'un ouvert U de \mathbb{C}^N , et soit x un point de X . Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times \mathbb{P}^{N-1} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{E}_x \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\tilde{e}_x} & \mathcal{O}(X) \hookrightarrow X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1} \\
 & & \downarrow \kappa' & \searrow \zeta & \downarrow \kappa \\
 X \times \mathbb{P}^{N-1} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{E}_x X & \xrightarrow{e_x} & X \hookrightarrow \mathbb{C}^N
 \end{array}$$

où κ est le morphisme conormal défini ci-dessus, e_x l'éclatement du point x dans X , \tilde{e}_x l'éclatement dans $\mathcal{O}(X)$ du sous-espace $\kappa^{-1}(x)$, et κ' le morphisme dû à la propriété universelle de l'éclatement. Soit $\mathcal{Y} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{Y}_{\alpha}$ la réunion des composantes irréductibles de dimension $N-2$ du diviseur exceptionnel $\zeta^{-1}(x)$, que nous considérons comme sous-espace de $\mathbb{P}^{N-1} \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$. Pour chaque α posons $V_{\alpha} = \kappa'(|\mathcal{Y}_{\alpha}|) \subset \mathbb{P}^{N-1}$, et $W_{\alpha} = \tilde{e}_x(|\mathcal{Y}_{\alpha}|) \subset \check{\mathbb{P}}^{N-1}$, où $|\mathcal{Y}_{\alpha}|$ désigne l'espace réduit sous-jacent à \mathcal{Y}_{α} . Remarquons que puisque $|\mathcal{Y}| = |\zeta^{-1}(x)|$ d'après le Hauptidealsatz, on a $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = |e_x^{-1}(x)| = |\text{Proj } \mathcal{O}_{X,x}|$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ désigne le cône tangent à X en x , et $\bigcup_{\alpha} W_{\alpha} = |\kappa^{-1}(x)|$, ensemble des limites en x d'hyperplans tangents à X .

En fait, la collection des sous-variétés projectives V_{α} de $|\text{Proj } \mathcal{O}_{X,x}|$ suffit pour reconstituer l'ensemble des limites en x d'hyperplans tangents:

THÉORÈME (Lê-Teissier). *Pour chaque α , W_{α} est la variété projective duale de V_{α} , et par conséquent l'ensemble des limites en x d'hyperplans tangents à X est réunion des variétés duales des V_{α} . De plus, pour chaque composante irréductible C de $|\text{Proj } \mathcal{O}_{X,x}|$ il existe exactement un indice α tel que l'on ait $V_{\alpha} = C$.*

En fait, on montre que pour chaque α , $|\mathcal{Y}_{\alpha}|$ est l'espace conormal $\mathcal{C}(V_{\alpha}, \mathbb{P}^{N-1})$, ce qui implique que W_{α} est le dual projectif de V_{α} .

Exemple (cf. [17]). Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de surface analytique complexe réduite. Il existe un nombre fini de génératrices l_1, \dots, l_r du

cône tangent $C_{X,0}$ telles que l'espace $|\nu^{-1}(0)|$ des limites en 0 d'espaces tangents à X^0 soit la réunion du dual de la courbe projective $|\text{Proj } C_{X,0}|$ et des droites projectives $\check{l}_i = \{H \in C^3 \mid H \supset l_i\}$. De plus, si $(X, 0)$ est à singularité isolée, ou si $C_{X,0}$ est réduit, la déformation naturelle de $(X, 0)$ sur son cône tangent $C_{X,0}$ est équisingulière (cf. ci-dessous) si et seulement si $r = 0$.

Remarque. Il est probable qu'un avatar du théorème ci-dessus est vrai dans le cas sous-analytique. Pour l'étude numérique des limites d'espaces tangents, voir ([26], Chap. 2, 1.6), et pour l'étude géométrique, voir [4], [14], [17].

§ 2. Variétés polaires locales

Soient N un entier, et

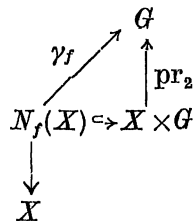
$$\mathcal{D}: (0) \subset D_{N-1} \subset D_{N-2} \subset \dots \subset D_1 \subset D_0 = C^N$$

un drapeau de sous-espaces vectoriels de C^N , avec $\text{codim } D_i = i$. Étant donné un entier d , $0 < d \leq N$ et une suite d'entiers $a = (a_1, \dots, a_d)$, on considère dans la grassmannienne $G = G(N-1, d-1)$ des sous-espaces vectoriels de dimension d de C^N la sous-variété algébrique (variété de Schubert)

$$\sigma_a(\mathcal{D}) = \{T \in G \mid \dim(T \cap D_{d+a_i-i}) \geq i \text{ pour } i = 1, \dots, d\}.$$

Sa codimension dans G est purement $\sum a_i$. Dans le cas particulier où $a = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec k fois 1, on notera $c_k(\mathcal{D})$ pour $\sigma_a(\mathcal{D})$.

Soit maintenant $f: X \rightarrow S$ un morphisme analytique complexe installé comme au § 1, c'est-à-dire muni d'un S -plongement $X \subset S \times C^N$. Supposons S non singulier, et considérons la modification de Nash relative du § 1



et le morphisme de Gauss relatif γ_f . À l'aide d'un théorème de Kleiman et de l'ouverture de la transversalité, on peut montrer (cf. [28], Chap. IV, 1.3) que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert, que nous noterons

encore X , tel qu'il existe un ouvert de Zariski dense W de l'espace des drapeaux, tel que pour tout $\mathfrak{D} \in W$, on ait pour tout a :

- (i) $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(X^0)$ est réduit et dense dans $|\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))|$, et ce dernier espace est vide ou purement de codimension $\sum a_i$ dans $N_f(X)$.
- (ii) Si $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(x)$ n'est pas vide, on a

$$\dim \gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(x) = \dim \nu_f^{-1}(x) - \sum a_i.$$

En conséquence, pourvu que le drapeau \mathfrak{D} soit assez général, si l'on pose

$$P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle = |\nu_f(\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})))|,$$

on voit que $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ est l'adhérence dans X de $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle \cap X^0$, et est un sous-espace analytique réduit purement de codimension $\sum a_i$ de X ou vide. De plus, $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))$ coïncide ensemblistement avec le transformé strict de $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ par le morphisme ν_f (noter que $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))$ n'est pas en général réduit).

DÉFINITION. $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ sera appelée *variété polaire locale* associée à $f: X \rightarrow S$, au drapeau \mathfrak{D} , et à la suite $a = (a_1, \dots, a_d)$.

PROPOSITION. Dans cette situation, pour chaque point $x \in X$ et chaque a , il existe un ouvert de Zariski dense W_x de l'espace des drapeaux tel que la multiplicité $m_x(P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle)$ de $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ en x ne dépende pas de $\mathfrak{D} \in W_x$, et en fait ce nombre ne dépend que du type analytique du germe en x du morphisme f .

Lorsque $a = (\overbrace{1, \dots, 1}^k, 0, \dots, 0)$, on notera $P_k \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ pour $P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle$. C'est un sous-espace analytique réduit, purement de codimension k dans X ou vide. Lorsque S est un point, on notera $P_k \langle X; \mathfrak{D} \rangle$ pour $P_k \langle f; \mathfrak{D} \rangle$. On note que $P_k \langle f; \mathfrak{D} \rangle$ ne dépend en fait que de D_{d-k+1} , car l'on a $c_k(\mathfrak{D}) = \{T \in \mathcal{G} \mid \dim T \cap D_{d-k+1} \geq k\}$. On le notera aussi $P_k \langle f; D_{d-k+1} \rangle$.

On propose ici d'associer à un morphisme $f: X \rightarrow S$, en chaque point x de X , les invariants analytiques $m_x(P_a \langle f; \mathfrak{D} \rangle)$ où \mathfrak{D} est assez général. On s'intéressera particulièrement aux invariants $m_x(P_k \langle f; \mathfrak{D} \rangle)$, $k = 0, \dots, d$. Dans le cas particulier où S est un point et X un espace analytique réduit, on associera, pour tout point $x \in X$, au germe (X, x) (ou à l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$) la suite de d entiers

$$M_{X,x}^* = (m_x(P_0 \langle X; \mathfrak{D} \rangle), m_x(P_1 \langle X; \mathfrak{D} \rangle), \dots, m_x(P_{d-1} \langle X; \mathfrak{D} \rangle)).$$

On remarquera que $P_0 \langle X; \mathfrak{D} \rangle = X$ et par conséquent le premier terme de cette suite est la multiplicité de X en x .

Exemples. (1) Reprenons l'exemple (1) ci-dessus. On a $d = N - 1$ et la modification de Nash relative est contenue dans le sous-espace de $U \times \check{P}^{N-1}$ défini par les équations $T_i(\partial f / \partial z_j) - T_j(\partial f / \partial z_i) = 0$. Dans \check{P}^{N-1} les seules variétés de Schubert sont les $c_k(\mathcal{D})$, et en choisissant des coordonnées adaptées au drapeau \mathcal{D} , on voit que $P_k \langle f; \mathcal{D} \rangle$ est obtenu comme ceci. Soit $\text{Sing } f$ le lieu critique de f , et pour chaque entier k , soit \check{P}_k le sous-espace de U défini par $\partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_k = 0$. Alors $P_k \langle f; \mathcal{D} \rangle$ est l'adhérence dans U de $\check{P}_k \setminus \text{Sing } f$. Dans le cas où f a un seul point critique dans U , noté 0 , $P_k \langle f; \mathcal{D} \rangle$ est exactement le sous-espace de U défini par $\partial f / \partial z_1 = \dots = \partial f / \partial z_k = 0$. On retrouve la définition des variétés polaires donnée dans ([27], [14]). Dans ce cas (cf. [27]), la multiplicité en 0 de $P_k \langle f; \mathcal{D} \rangle$ (toujours pour \mathcal{D} assez général) est égale à $\mu^{(k)}(f, 0)$, qui est par définition le nombre de Milnor ([23]) de la restriction de f à un sous-espace vectoriel de dimension k assez général de C^N . De plus, le nombre d'intersection en 0 de la courbe polaire $P_{N-1} \langle f; \mathcal{D} \rangle$ avec l'hyper-surface $f^{-1}(f(0))$ vaut $\mu^{(N)}(f, 0) + \mu^{(N-1)}(f, 0)$.

(2) Reprenons l'exemple (2) ci-dessus en supposant X réduit. Puisque les valeurs critiques de f sont isolées, on peut vérifier que l'on a $P_k \langle X; \mathcal{D} \rangle = P_k \langle f; \mathcal{D} \rangle \cap X$. Si 0 est un point critique isolé de f , on a les égalités:

$$m_0(P_k \langle X; \mathcal{D} \rangle) = \mu^{(k)}(f, 0) + \mu^{(k+1)}(f, 0) \quad (0 \leq k \leq N - 2).$$

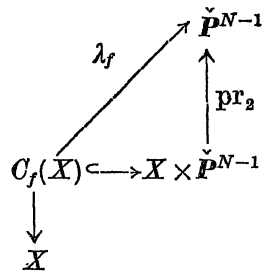
(3) Soit $V \subset P^{N-1}$ une variété projective réduite et soit $X \subset C^N$ le cône de sommet 0 sur V . Alors les variétés polaires $P_k \langle X; \mathcal{D} \rangle$ sont les cônes sur les lieux polaires M_k de V introduits par Todd dans le cas où V est non singulière et par R. Pione [24] dans le cas général, leurs multiplicités sont les classes de V .

La théorie classique des variétés polaires projectives correspond donc au cas particulier où S est un point et X un cône de sommet 0 . Par exemple, si X est le cône sur une courbe projective plane réduite de degré m et de classe (= degré de la courbe duale) \check{m} , on a $M_{X,0}^* = (m, \check{m})$.

Les variétés polaires "absolues" ($S =$ un point) sont introduites et étudiées dans [18]. On a dans [23, chap. IV] la description suivante des variétés polaires relatives comme lieux critiques de projections. Supposons donné un S -plongement $X \subset S \times C^N$, et supposons que f soit un morphisme lisse en tout point $w \in X^0$. Soit $p: C^N \rightarrow C^{d-k+1}$ une projection linéaire. Pour $w \in X^0$, la fibre $X(f(w))$ est non singulière en w , contenue dans $\{f(w)\} \times C^N$ et l'on notera $\pi_w: X(f(w)) \rightarrow C^{d-k+1}$ la restriction à la fibre $X(f(w))$ de la projection p . Soit $P_k \langle f; p \rangle^0$ l'ensemble des points $w \in X^0$ tels que w soit critique pour π_w . Alors on a $P_k \langle f; p \rangle^0 = \nu_f(\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1})) \cap \nu_f^{-1}(X^0))$, et par conséquent pour p assez générale,

l'adhérence $P_k\langle f; p \rangle$ de $P_k\langle f; p \rangle^0$ dans X est la variété polaire locale $P_k\langle f; \text{Ker } p \rangle$.

On doit à J. P. G. Henry et M. Merle (cf. [5]) la description suivante de $P_k\langle f; \mathfrak{D} \rangle$. Supposons toujours $X \subset S \times \mathbb{C}^N$ et considérons l'espace conormal relatif du § 1:



Alors pour tout $x \in X$ et $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, il existe un voisinage ouvert de x dans X , encore noté X , et un ouvert de Zariski dense U_k de la grassmannienne des $(d-k)$ -plans de $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$ tels que pour $L^{d-k} \in U_k$, on ait $|\pi_f(\lambda_f^{-1}(L^{d-k}))| = P_k\langle X; D_{d-k+1} \rangle$, où D_{d-k+1} est l'intersection des hyperplans appartenant à L^{d-k} .

En fait, la considération des cônes tangents des variétés polaires permet de reconstruire géométriquement les sous-variétés projectives V_α de $|\text{Proj } C_{X,x}|$ vues au § 1, et donc les limites d'espaces tangents à X en x :

THÉORÈME (Lê-Teissier). *Étant données $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ comme ci-dessus et une projection linéaire $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ assez générale, le réduit $|C_{P_k,0}|$ du cône tangent en 0 à la variété polaire $P_k = P_k\langle X; \text{Ker } p \rangle$ est la réunion des cônes sur les variétés projectives V_α du § 1 qui vérifient $\dim V_\alpha + 1 = d - k$ (partie fixe) et des variétés polaires de dimension $d - k$ relatives à $\text{Ker } p$ des cônes sur les V_α telles que $\dim V_\alpha + 1 > d - k$ (partie mobile).*

§ 3. Conditions de Whitney et de Thom

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels A et B de \mathbb{C}^N , muni de la métrique hermitienne, on définit la distance de A à B (dans cet ordre) par la formule

$$\delta(A, B) = \sup_{\substack{u \in B^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \frac{|(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

où $B^\perp = \{u \in \mathbb{C}^N \mid (u, b) = 0 \text{ pour tout } b \in B\}$. On note que $\delta(A, B) = 0$ si et seulement si $B \supset A$.

Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, tel qu'il existe un ouvert dense X^0 de X sur lequel f est de corang constant d . Soit Y un sous-espace analytique non singulier de X sur lequel f est de corang constant, et w un point de Y . On dit que le couple (X^0, Y) satisfait la *condition a_f de Thom* en w s'il existe un plongement local $(X, w) \subset (\mathbb{C}^M, 0)$ tel que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X^0 tendant vers w , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(T_x Y(f(w)), T_{x_n} X(f(x_n))) = 0$$

ou: toute limite en w d'espaces tangents aux fibres de $f|X^0$ contient l'espace tangent en w à la fibre de $f|Y$.

On dit que (X^0, Y) satisfait la *condition a_f de Thom stricte avec exposant 1*, aussi appelée *condition w_f* , s'il existe un voisinage U de w dans X et une constante $C > 0$ tels que pour tout $y \in U \cap Y$ et $w' \in U \cap X^0$ on ait

$$\delta(T_y Y(f(y)), T_{w'} X(f(w'))) \leq C \text{ dist}(w', Y).$$

Dans le cas où S est un point, on dira que le couple (X^0, Y) satisfait la *condition (a) de Whitney* (resp. la *condition (w)*, ou condition (a) de Whitney stricte au sens de Hironaka avec exposant 1).

Cette condition est indépendante du choix du plongement.

Restons dans le cas où S est un point, et choisissons une rétraction locale $\varrho: \mathbb{C}^M \rightarrow Y$. On dira que (X^0, Y) satisfait en $w \in Y$ la *condition (b) de Whitney* (resp. la *condition (b) stricte avec exposant e*) si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X^0 tendant vers w , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\overline{x_n \varrho(x_n)}, T_{x_n} X^0) = 0$ (resp. s'il existe un voisinage U de w et une constante C tels que l'on ait $\text{dist}(\overline{x \varrho(x)}, T_x X^0) \leq C \text{ dist}(x, Y)^e$ pour $x \in X^0$) où $\overline{x \varrho(x)}$ désigne la direction de la droite sécante joignant x et $\varrho(x)$ dans \mathbb{C}^M .

On appelle stratification d'un espace analytique X une partition localement finie $X = \bigcup X_\alpha$ de X en sous-espaces analytiques non singuliers à fermeture et frontière analytiques.

DÉFINITION. Une stratification de X est une *stratification de Whitney* si pour tout couple X_α, X_β tel que $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$ on a $X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$ et en tout $w \in X_\alpha$, le couple (X_β, X_α) satisfait les conditions (a) et (b) de Whitney.

On appelle stratification d'un morphisme $f: X \rightarrow S$ la donnée d'une stratification $X = \bigcup X_\alpha$ de X , et d'une stratification $S = \bigcup S_\beta$ de S telles que la restriction de f à chaque X_α soit une submersion de X_α sur une strate S_β . Ainsi chaque $f^{-1}(S_\beta)$ est réunion de strates X_α .

DÉFINITION (Thom–Sabbah, cf. [25]). On dit qu'un morphisme stratifié f est *sans éclatement* si

(1) Pour tout couple de strates X_α, X_β de X telles que $X_\alpha \cap \bar{X}_\beta \neq \emptyset$ on a :

$X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$ et (X_β, X_α) satisfait la condition $a_{f|\bar{X}_\beta}$ en tout point de X_α .

(2) La stratification $\mathcal{S} = \bigcup S_\beta$ de S est une stratification de Whitney, et enfin :

(3) Pour tout β , la stratification $f^{-1}(S_\beta) = \bigcup_{X_\alpha \subset f^{-1}(S_\beta)} X_\alpha$ est de Whitney.

Les stratifications de Whitney et de Thom–Sabbah ont des propriétés topologiques extrêmement utiles :

THÉORÈME (Thom–Mather, cf. [21]). *Si $X = \bigcup X_\alpha$ est une stratification de Whitney, pour tout $x \in X$, tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ il existe une rétraction locale $r: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (X_\alpha, x)$, où X_α est la strate contenant x , et un nombre réel $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < \eta < \eta_\varepsilon$ on ait, en notant B_ε la boule de centre 0 et de rayon ε dans \mathbb{C}^N , un homéomorphisme $B_\varepsilon \cap r^{-1}(B_\eta \cap X_\alpha) \simeq (r^{-1}(x) \cap B_\varepsilon) \times (X_\alpha \cap B_\eta)$ compatible avec la rétraction r et induisant pour chaque \bar{X}_β contenant x un homéomorphisme de*

$$\bar{X}_\beta \cap B_\varepsilon \cap r^{-1}(B_\eta \cap X_\alpha) \quad \text{sur} \quad (\bar{X}_\beta \cap r^{-1}(x)) \times (X_\alpha \cap B_\eta).$$

En d'autres termes, chaque \bar{X}_β , ou si on préfère, l'ensemble stratifié X est localement topologiquement trivial le long de X_α en x .

THÉORÈME (Thom–Lê–Sabbah). *Si $f: X \rightarrow S$ est un morphisme stratifié sans éclatement, f admet une théorie des cycles évanescents en tout point $x \in X$. (Voir [25].)*

Rappelons que cela signifie que pour tout $x \in X$, posant $s = f(x)$, il existe un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de x (resp. s) dans X (resp. S), noté $(B_\varepsilon)_{\varepsilon \in I}$ (resp. $(D_\eta)_{\eta \in I'}$) où $I =]0, a]$, $I' =]0, a']$ (cf. [19], § 2), et un sous-ensemble sous-analytique E de $I \times I'$ auquel $I \times 0$ est adhérent tels que pour $(\varepsilon, \eta) \in E$, le morphisme induit par f :

$$f_{\varepsilon, \eta}: B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta) \rightarrow D_\eta$$

est descriptible, c'est-à-dire qu'il existe une stratification de Whitney analytique complexe de D_η , en fait $D_\eta = \bigcup (D_\eta \cap S_\beta)$, telle que $f_{\varepsilon, \eta}$ induise une fibration topologique localement triviale $f_{\varepsilon, \eta}^{-1}(D_\eta \cap S_\beta) \rightarrow D_\eta \cap S_\beta$ pour tout β . Ceci implique en particulier que les faisceaux images directes

$R^i(f_{\varepsilon, \eta})_* C$ sont analytiquement constructibles sur D_η et que l'on a de plus, pour $\varepsilon' < \varepsilon$ et η' tel que $(\varepsilon', \eta') \in E$, l'égalité $R^i(f_{\varepsilon', \eta'})_* C = R^i(f_{\varepsilon, \eta})_* C \mid D_{\eta'}$.

En outre, les stratifications de Whitney et de Thom–Sabbah ont le mérite d'exister!

THÉORÈME (Whitney [32]). *Soient X un espace analytique complexe (réduit) et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de sous-espaces analytiques à fermeture analytique dans X . Il existe une stratification de Whitney $X = \bigcup X_\alpha$ telle que chaque Y_i soit réunion de strates.*

Rappelons que l'existence de stratifications de Whitney pour les ensembles semi-(resp. sous-) analytiques a été démontrée par Łojasiewicz [20] (resp. Hironaka [8] et Hardt [34]).

THÉORÈME (Sabbah [25]). *Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes réduits muni d'une stratification \mathcal{S} . Il existe un éclatement $\pi: S' \rightarrow S$ de S et une stratification \mathcal{S}' du produit fibré $X' = X \times_S S'$, compatible avec \mathcal{S} en ce sens que les images réciproques dans S' (resp. X') des strates de S (resp. X) sont réunions de strates, et telle que le morphisme $f': X' \rightarrow S'$ déduit de f par changement de base soit sans éclatement. Dans le cas où f est complexifié d'un morphisme analytique réel, l'éclatement est aussi complexifié d'un morphisme analytique réel, et les strates des stratifications sont invariantes par conjugaison.*

En particulier, si S est une courbe non singulière, f admet une théorie des cycles évanescents.

Remarque. Sabbah a également montré dans *loc. cit.* l'analogie local du Théorème ci-dessus.

Exemple. Reprenons l'exemple (1) ci-dessus et soit Y un sous-espace non singulier de U contenu dans l'hypersurface $f^{-1}(0)$. Supposons $0 \in Y$ et $f(0) = 0$. Choisissons des coordonnées locales $y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_{N-t}$ pour \mathbb{C}^N en 0 telles que Y soit défini par: $z_1 = \dots = z_{N-t} = 0$. Dans [29], j'ai introduit la condition d'équisingularité appelée condition (C) pour X le long de Y en 0 :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)_0 \in \overline{(z_1, \dots, z_{N-t}) \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{N-t}} \right)} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, 0} \quad (1 \leq i \leq t),$$

où la barre désigne la fermeture intégrale des idéaux. Dans [27] on montre

que la condition (C) implique les conditions (a) et (b) de Whitney et dans [2] la réciproque, dans le cas où $X^0 = X - Y$. Dans [27] (appendice) on montre que la condition (C) équivaut à la condition w_f pour (X^0, Y) en 0, et d'autre part un exemple de Briançon-Speder, $f = z_1^3 + yz_1z_2^2 + z_2^4z_3 + z_3^2$, satisfait a_f en 0 mais pas w_f .

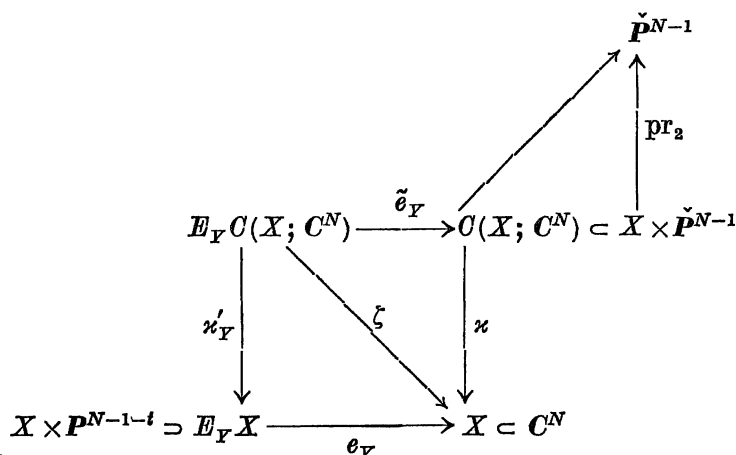
Par ailleurs, Kuo-Verdier (cf. [31]) ont montré que la condition (w) implique les conditions (a) et (b) de Whitney, dans le cadre sous-analytique réel.

§ 4. Critères numériques pour les conditions de Whitney et de Thom

THÉORÈME (cf. [28], chap. V, [22]). *Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d , Y un sous-espace analytique de X et $0 \in Y$ un point non singulier de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Le couple (X^0, Y) satisfait les conditions (a) et (b) de Whitney en 0.*
- (2) *L'application $Y \rightarrow N^d$ définie par $y \mapsto M_{X,Y}^*$ est constante au voisinage de 0.*
- (3) *Le couple (X^0, Y) satisfait la condition (w) en 0, donc au voisinage de 0.*

La démonstration est par récurrence sur $d-t$ où $t = \dim_0 Y$. On utilise de façon fondamentale le diagramme analogue à celui du § 1, où e_Y est l'éclatement de Y :



qui permet de relier les cônes normaux le long de Y des variétés polaires aux limites d'hyperplans tangents. Une étape importante de la démonstration de (2) \Rightarrow (3) est de prouver que (2) est équivalent à

(2') *Le morphisme $\zeta: \zeta^{-1}(Y) \rightarrow Y$ a toutes ses fibres de la même dimension au voisinage de 0.*

On doit à J. P. G. Henry et M. Merle la découverte du fait que l'équivalence de (2) et (2') nécessite la considération du diagramme ci-dessus à la place du diagramme analogue construit à partir de la modification de Nash. On peut supposer choisi un plongement local de X dans C^N tel que Y soit un sous-espace linéaire de C^N . L'idée de la récurrence est de prouver que chacune des conditions implique que si H est un hyperplan de C^N assez général parmi ceux contenant Y , alors $|X \cap H|$ satisfait les mêmes conditions. À part des résultats généraux sur l'équimultiplicité et une idée de Hironaka prouvant (2') \Rightarrow (3), les résultats utilisées sont des généralisations et renforcements de l'idée de "transversalité des variétés polaires aux plans servant à les définir" dont le prototype est le résultat suivant (cf. [19]): si \mathfrak{D} est un drapeau assez général, pour chaque i , l'espace vectoriel D_i est transverse en 0 dans C^N à la variété polaire $P_{a-i}\langle X; D_{i-1} \rangle$ en ce sens que l'on a $|D_i \cap C_0(P_{a-i}\langle X; D_{i-1} \rangle)| = \{0\}$, où $C_0(P_{a-i}\langle X; D_{i-1} \rangle)$ désigne le cône tangent en 0 à la variété polaire.

Pour les courbes polaires, on a un résultat beaucoup plus précis inspiré par un résultat de [1] dans le cas $N = 3$, qui est très utile pour la preuve de (1) \Rightarrow (2). Soit $(X, 0) \subset (C^N, 0)$, et soit $(Y, 0) \subset (X, 0)$ une courbe non singulière. Pour une projection linéaire $p: C^N \rightarrow C^2$ assez générale, notant $P_{a-1}\langle X; \text{Ker } p \rangle$ la courbe polaire associée à la projection p , la même projection p est une projection générale pour la courbe $Y \cup P_{a-1}\langle X; \text{Ker } p \rangle$ en ce sens qu'aucune direction limite en 0 de bisécantes à cette courbe n'est contenue dans $\text{Ker } p$ (cf. [28], chap. V, lemme clé).

Remarque. On doit pouvoir démontrer le résultat analogue en géométrie analytique réelle en traduisant géométriquement le raisonnement algébrique de *loc. cit.*

Comme on a ainsi traduit les conditions de Whitney en termes purement algébriques (dimension des fibres de ζ et multiplicités de variétés polaires) ne dépendant que des algèbres locales $\mathcal{O}_{X,x}$ (en fait de leur complété $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$) on peut utiliser les résultats généraux sur la semi-continuité de la multiplicité de la manière suivante (cf. [18], [28], chap. VI).

Soient X un espace analytique, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de sous-espaces analytiques fermés de X . Définissons une filtration de X inductivement comme suit: $F_0 = X$ et supposons avoir défini F_0, \dots, F_{k-1} . Pour chaque i , notons $F_i = \bigcup F_{i,j_i}$ la décomposition en composantes irréductibles de F_i . Définissons F_k comme la réunion du lieu singulier de F_{k-1} , et de la famille localement finie de sous-espaces analytiques fermés

rare dans F_{k-1} que voici: les $F_{k-1} \cap Y_j$, rare dans F_{k-1} et les $\{x \in F_{k-1, j_{k-1}} \mid$ l'une des suites $M_{X,x}^*$, $M_{F_{1,j_1},x}^*$, \dots , $M_{F_{k-2,j_{k-2}},x}^*$, ne prend pas en x la valeur qu'elle prend en un point général de $F_{k-1, j_{k-1}}\}$.

La filtration $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_{k-1} \supset F_k \supset \dots$ stationne localement, et l'on a:

PROPOSITION. *La famille des composantes connexes des $F_k - F_{k+1}$ est une stratification de Whitney de X telle que chaque Y_i soit réunion de strates. Toute stratification de Whitney ayant ces propriétés en est un raffinement, c'est-à-dire que chaque F_k est réunion de strates de cette stratification (cf. [28], chap. VI, [19]).*

En particulier, prenant $I = \emptyset$, on a:

COROLLAIRE. *Pour tout espace analytique réduit localement équidimensionnel, la construction ci-dessus fournit une stratification de Whitney à strates connexes, dite canonique, dont toute stratification de Whitney de X est un raffinement. On appelle filtration canonique de X la filtration construite ci-dessus.*

Remarques. La stratification canonique est invariante par le pseudo-groupe des isomorphismes locaux de X . Pour tout ouvert U de X , la famille des $F_k \cap U$ est la filtration canonique de U . Enfin pour tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ et tout sous-espace non singulier $(H, 0)$ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ transverse dans \mathbb{C}^N en 0 à la strate contenant x , il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que les $|F_k \cap H \cap U|$ constituent la filtration canonique de $|U \cap H|$.

COROLLAIRE. *Si X et les Y_i sont des variétés algébriques complexes définies sur une extension galoisienne K de \mathbb{Q} , les fermés F_i sont des sous-variétés algébriques de X définies sur K .*

En particulier, comme l'a remarqué Deligne, nous pouvons considérer un germe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ défini par des polynômes $P_j = \sum_A p_{j,A} Z^A$, $1 \leq j \leq r$. Notons M le nombre des $p_{j,A}$, introduisons des indéterminés $P_{j,A}$, et soit \mathcal{X} la sous-variété de $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N$ définie par les équations $\sum_A P_{j,A} Z^A = 0$ ($1 \leq j \leq r$) et la filtration canonique $\mathcal{X} = F_0 \supset F_1 \supset \dots$ associée à \mathcal{X} et au sous-espace $\mathbb{C}^M \times \{0\}$.

Notons $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^M$ la première projection. Quitte à raffiner la stratification associée aux F_k , on peut supposer que pour chaque strate \mathcal{X}_a contenue dans $\mathbb{C}^M \times \{0\}$, $\pi^{-1}(\mathcal{X}_a)$ est réunion de strates. D'après le théorème de Thom-Mather, $\pi^{-1}(\mathcal{X}_a)$ est localement topologiquement trivial le long

de \mathcal{X}_a et donc pour $p, q \in \mathcal{X}_a$, les germes définis par $\sum p_{j,A} Z^A = 0$ ($1 \leq j \leq r$) et par $\sum q_{j,A} Z^A$ ($1 \leq j \leq r$) sont topologiquement équivalents (et en fait bien plus, voir ci-dessous). Puisque les \mathcal{X}_a sont définis sur \mathcal{O} , les points à coordonnées algébriques y sont denses, et par conséquent n'importe quel germe algébrique est topologiquement équivalent (et en fait bien plus) avec un germe défini par des polynômes à coefficients entiers algébriques.

Ceci répond en particulier à une question que posait F. Pham en 1972 au séminaire de Thom, et implique que l'ensemble des germes algébriques à (w)-équisingularité près est dénombrable; la classification de ceux-ci est donc possible.

On a, avec une preuve analogue, un analogue relatif du théorème ci-dessus. Soit $f: X \rightarrow S$ comme au § 1. Pour tout $x \in X$ notons $P_k(f, x)$ le germe en x de "la" variété polaire générale locale de codimension k , et posons $\Sigma_k(f) = \{x \in X \mid P_k(f, x) \neq \emptyset\}$. (Si f est installé, $\Sigma_k(f) = \{x \in X \mid \dim \kappa_f^{-1}(x) \geq N - d + k\}$.)

DÉFINITION (Sabbah). On dit que f est *sans éclatement en codimension 0* si pour tout k , $0 \leq k \leq d$, les fibres de $f \mid \Sigma_k(f): \Sigma_k(f) \rightarrow S$ sont de dimension $\leq d - k$.

THÉORÈME (Henry–Merle–Sabbah, cf. [5]). Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme sans éclatement en codimension 0, Y un sous-espace analytique non singulier d'une fibre $f^{-1}(0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) Le couple (X^0, Y) satisfait la condition w_f en tout point de Y .
- (2) Les variétés polaires générales $P_k(f)$ ($0 \leq k \leq d$) sont équivariantes le long de Y .

§ 5. Critères topologiques pour les conditions de Whitney

La présentation des variétés polaires locales comme lieux critiques de restrictions à $X \subset \mathbb{C}^N$ de projections linéaires $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ vue au § 2 permet d'appliquer la théorie de Morse pour calculer les multiplicités en x des variétés polaires locales de X en x en fonction d'invariants topologiques locaux de X , généralisant ainsi les formules de l'exemple (2) du § 2. Voici les invariants topologiques locaux qui interviennent (cf. [9], [10], [3], [19]).

Soit $X = \bigcup X_a$ une stratification de Whitney de X . Pour $x \in X_a$ soit $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ un plongement local. Pour chaque entier $i \geq d_a$, où $d_a = \dim X_a$, il existe un ouvert de Zariski dense W de la grassmannienne des plans de codimension i de \mathbb{C}^N et pour chaque $L_i \in W$ deux nombres

réels ε_0, η_0 , un sous-ensemble sous-analytique $\mathcal{E} \subset]0, \varepsilon_0] \times]0, \eta_0]$ auquel $]0, \varepsilon_0] \times \{0\}$ est adhérent et un sous-ensemble sous-analytique U de $\bigcup_{\eta \in]0, \eta_0]} \mathcal{B}_\eta$ tel que chaque $U_\eta = U \cap \mathcal{B}_\eta$ soit dense dans \mathcal{B}_η , tels que pour tout $(\varepsilon, \eta) \in \mathcal{E}$ et $t \in U_\eta$ la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X \cap (L_i + t) \cap \mathcal{B}_\varepsilon)$ ne dépende que de (X, X_α) , i.e., pas du plongement, ni du choix de $x \in X_\alpha$ (ici $L_i + t$ est un $(N-i)$ -plan parallèle à L_i et passant par t). On la notera $\chi_i(X, X_\alpha)$.

THÉORÈME ([19], 4.11). *Soit $X = \bigcup X_\alpha$ un espace analytique complexe réduit muni d'une stratification de Whitney analytique complexe et soit $x \in X_\alpha$. On a l'égalité*

$$\begin{aligned} \chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha) - \chi_{d_\alpha+2}(X, X_\alpha) \\ = \sum_{\beta \neq \alpha} (-1)^{d_\beta - d_\alpha - 1} m_x(P_{d_\beta - d_\alpha - 1}(\bar{X}_\beta, x)) (1 - \chi_{d_\beta+1}(X, X_\beta)). \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt que cette formule permet de calculer par récurrence les $m_x(P_k(\bar{X}_\beta, x))$ en fonction des caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi_j(X_\beta, X_\gamma)$, et inversement.

Ce résultat, joint à la caractérisation numérique des stratifications de Whitney vue ci-dessus, a permis dans *loc. cit.* de caractériser les stratifications de Whitney des espaces analytiques complexes par des conditions topologiques: Soit $X = \bigcup X_\alpha$ une stratification analytique complexe. Disons qu'elle satisfait la *condition* (TT)* (= trivialité topologique locale pour les sections générales) si pour toute strate X_α , $x \in X_\alpha$ et tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, il existe pour tout i , $0 \leq i \leq N - d_\alpha$ un ouvert de Zariski dense W_i de la grassmannienne des plans de codimension i de \mathbb{C}^N contenant $T_{X_\alpha, x}$ tel que pour tout sous-espace non singulier L de \mathbb{C}^N défini au voisinage de 0 , contenant X_α et tel que $T_{L,0} \in W_i$, l'intersection $\bar{X}_\beta \cap L$ est localement topologiquement triviale le long de X_α en x pour toute strate X_β telle que $x \in \bar{X}_\beta$. On a alors

THÉORÈME (Lê-Teissier, [19]). *Pour une stratification analytique complexe $X = \bigcup X_\alpha$ d'un espace analytique X , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $X = \bigcup X_\alpha$ est une stratification de Whitney.
- (2) $X = \bigcup X_\alpha$ satisfait la condition (TT)*.

On a ainsi, dans ce cas, la réciproque correcte du théorème de Thom-Mather. En fait dans *loc. cit.* on associe à chaque point d'un espace analytique complexe son "type d'homotopie évanescence total" qui est un

invariant combinatoire local de X et on montre que les conditions ci-dessus sont aussi équivalentes à :

(3) le type d'homotopie évanescents total de X est constant le long de chaque strate.

Il se trouve que la formule ci-dessus, appliquée dans le cas où X est le cône sur une variété projective $V \subset \mathbf{P}_{N-1}$, contient une généralisation des formules de Plücker, c'est-à-dire permet de calculer le degré de la variété duale V^\vee de V (i.e., sa classe) en fonction de la topologie de l'ensemble stratifié que constitue V munie de sa stratification de Whitney canonique. Pour le voir il suffit de faire les observations suivantes :

(1) La classe de V est égale à $m_0(P_{d-1} \langle X; \mathfrak{D} \rangle)$, où $d = \dim X$.

(2) Si $V = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset \dots$ est la filtration canonique de V , notant F_i le cône de sommet 0 sur G_i , la filtration canonique de X est $X = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset \{0\}$ (parfois le $\{0\}$ est superflu).

(3) Si $L+t$ est un hyperplan voisin de 0 dans \mathbf{C}^N et général, on a

$$\chi(X \cap (L+t) \cap B_i) = \chi(V) - \chi(V \cap H) \quad \text{où} \quad H = \text{Proj } L.$$

(4) Si L_i+t est un plan de codimension i voisin de 0 dans \mathbf{C}^N , il existe un hyperplan L_1+t voisin de 0 et un plan L_{i-1} de codimension $i-1$ passant par 0 tel que $L_i+t = L_{i-1} \cap (L_1+t)$. On a donc $\chi(X \cap (L_i+t) \cap B_i) = \chi(V \cap H_{i-1}) - \chi(V \cap H_{i-1} \cap H_1)$ où $H_i = \text{Proj } L_i$.

(5) Pour toute strate X_a de X autre que $\{0\}$, notant $V_a = \text{Proj } X_a$, on a

$$\chi_k(X, X_a) = \chi_{k-1}(V, V_a).$$

On retrouve ainsi facilement, dans le cas où V est une hypersurface de degré m à singularités isolées de \mathbf{P}^{d+1} la formule de [29] et [12] :

$$\text{deg } V^\vee = m(m-1)^d - \sum_{x_i \in \text{sing } V} (\mu^{(d+1)}(V, x_i) + \mu^{(d)}(V, x_i)).$$

(Comparer à [24], [11], [35].)

Enfin il faut remarquer que l'on n'a pas encore donné de réciproque au théorème de Thom-Lê-Sabbah du § 3 dans un cas plus général que celui de l'exemple du § 3.

Notes ajoutées à la correction des épreuves :

1. J'ai appris à Varsovie que la sous-analyticité du morphisme de Gauss du § 1 était prouvé dans [36].

2. Dans l'énoncé du théorème de Thom-Mather au § 3, il existe en fait, par l'analyticité, un sous-ensemble sous-analytique \mathcal{B} de $]0, a[\times]0, a'[$, auquel $]0, a[\times \{0\}$ est adhérent, et tel que pour $(\varepsilon, \eta) \in \mathcal{B}$, on ait...

Références

- [1] Briangon J. et Henry J. P. G., Equisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), pp. 259–281.
- [2] Briangon J. et Speder J. P., Les conditions de Whitney impliquent « μ^* constant», *Ann. Inst. Fourier* **26** (2) (1976), pp. 153–163.
- [3] Dubson A., Classes caractéristiques des variétés singulières, *O. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287** (1978), pp. 237–240.
- [4] Henry J. P. G. et Lê D. T., Limites d'espaces tangents. In: *Séminaire Norquet*, Lecture Notes in Math., 482, Springer, 1975, pp. 251–265.
- [5] Henry J. P. G., Merle M. et Sabbah C., Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1984), à paraître.
- [6] Hironaka H., *Introduction to Real-Analytic Sets and Real-Analytic Maps*, Istituto Matematico «L. Tonelli», Università di Pisa, Pisa, 1973.
- [7] Hironaka H., Stratifications and Flatness. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 199–265.
- [8] Hironaka H., Subanalytic Sets. In: *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Volume in honour of Y. Akizuki*, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [9] Kashiwara M., Index Theorem for a Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equations, *Proc. Japan. Acad. Sci.* **49** (1973), pp. 803–804.
- [10] Kashiwara M., *Systèmes d'équations microdifférentielles*, cours rédigé par T. Monteiro-Fernandes, Université de Paris-Nord, 1978.
- [11] Kleiman S., The Enumerative Theory of Singularities. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 297–396.
- [12] Laumon G., Degré de la variété duale d'une hypersurface à singularités isolées, *Bull. Soc. Math. France* **104** (1976), pp. 51–63.
- [13] Laufer H., Weak Simultaneous Resolution for Deformations of Gorenstein Surface Singularities. In: *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math., 40, 1983, part 2, pp. 1–29.
- [14] Lê D. T., Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, *Ann. Inst. Fourier* **23** (4) (1973), pp. 261–270.
- [15] Lê D. T., Some Remarks on Relative Monodromy. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 397–403.
- [16] Lê D. T. et Mebkhout Z., Variétés caractéristiques et variétés polaires, *O. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **296** (1983), pp. 129–132.
- [17] Lê D. T. et Teissier B., Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles, *Amer. J. Math.* **101** (1979), pp. 420–452.
- [18] Lê D. T. et Teissier B., Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Ann. of Math.* (2) **114** (1981), pp. 457–491.
- [19] Lê D. T. et Teissier B., Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney II. In: *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math., 40, 1983, part 2, pp. 65–103.
- [20] Łojasiewicz S., *Ensembles semi-analytiques*, preprint multigraphié, I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, 1965.

- [21] Mather J., Stratifications and Mappings. In: *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, pp. 195–232.
- [22] Merle M., Variétés polaires, stratifications de Whitney et classes de Chern des espaces analytiques complexes (d'après Lê-Teissier), *Séminaire Bourbaki, Nov. 82, Astérisque 105–106* (1983), pp. 65–78.
- [23] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.
- [24] Piene R., Polar Classes of Singular Varieties, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **11** (1978), pp. 247–276.
- [25] Sabbah C., Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **294** (1982), pp. 39–41, et article dans: *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II–III), 6–10 juillet 1981, Astérisque 101–102* (1983), pp. 286–319.
- [26] Teissier B., Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. In: *Singularités à Cargèse, 1972, Astérisque 7–8* (1973), pp. 285–362.
- [27] Teissier B., Variétés polaires I, *Invent. Math.* **40** (1977), pp. 267–292.
- [28] Teissier B., Variétés polaires II. In: *Algebraic Geometry, Proceedings, La Rabida, 1981*, Lecture Notes in Math., 961, Springer, pp. 314–491.
- [29] Teissier B., Résolution simultanée et cycles évanescents II, appendice. In: *Séminaire sur les singularités des surfaces*, Lecture Notes in Math., 777, Springer, pp. 136–143.
- [30] Thom R., Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), pp. 240–284.
- [31] Verdier J.-L., Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Invent. Math.* **36** (1976), pp. 295–312.
- [32] Whitney H., Tangents to an Analytic Variety, *Ann. of Math.* **81** (1965), pp. 496–549.
- [33] Zariski O., Some Open Questions in the Theory of Singularities, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), pp. 481–491.

Ajouté à la correction des épreuves :

- [34] Hardt R., Stratification of Real Analytic Mappings and Images, *Invent. Math.* **28** (1975), pp. 193–208.
- [35] Urabe T., Duality of Numerical Characters of Polar Loci, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.* **17** (1981), pp. 331–345.
- [36] Denkowska Z. et Wachtka K., La sous-analyticité de l'application tangente, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **30** (1982), pp. 329–331.

