

4.2.2. Cellules duales relatives.

Soit π un prisme de $\mathcal{P}(\tau)$ de dimension relative r . On définit la cellule duale (3) relative de π comme la réunion des sous-ensembles γ de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau)$ tels que l'intersection $\gamma \cap \pi$ soit exactement l'âme de π , on la note $D(\pi)$.

La cellule duale relative de π est la réunion des sous-ensembles (fermés) γ de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau)$ ayant pour face l'âme relative de π , de dimension relative $\dim \mathcal{P}(\tau) - r$ et correspondant aux suites de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k$ pour lesquelles $\varpi_0 = \pi$ et ϖ_k est de dimension maximum dans $\mathcal{P}(\tau)$.

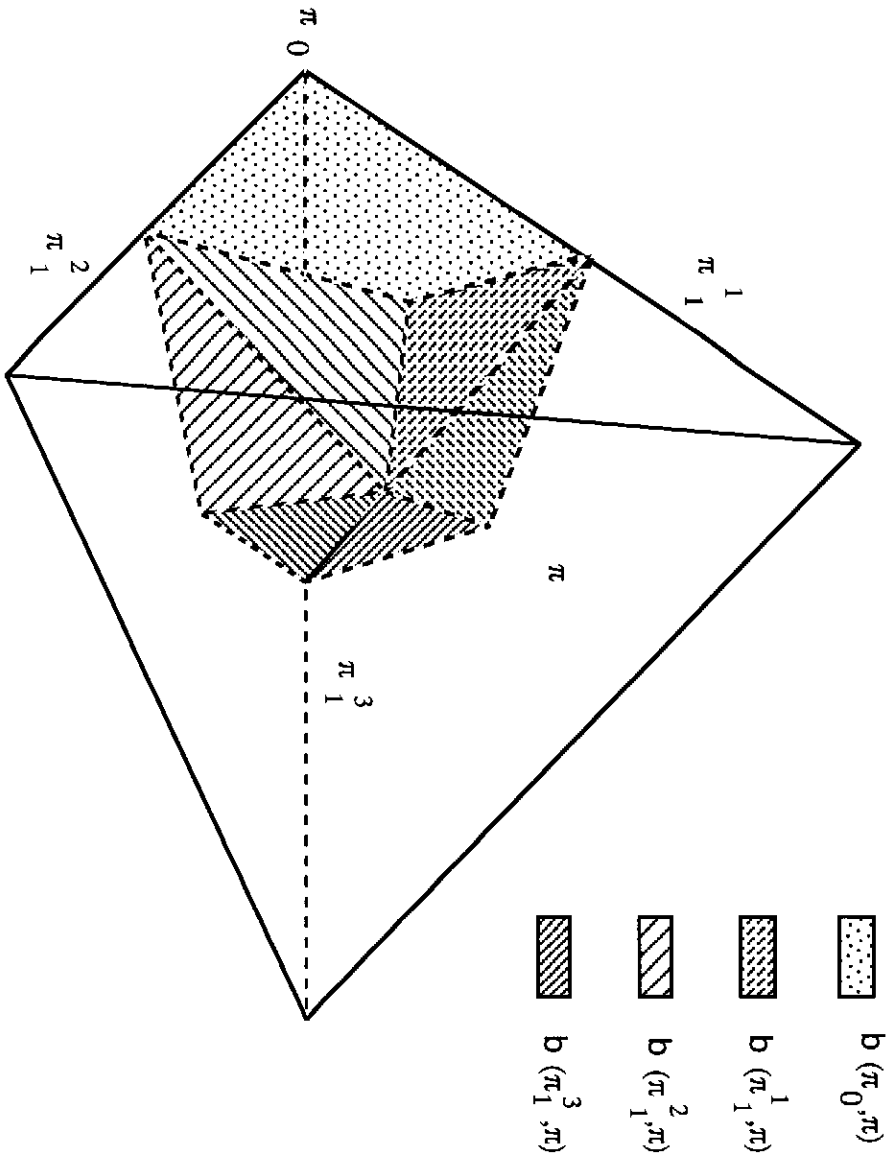
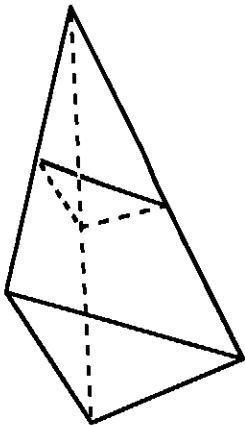
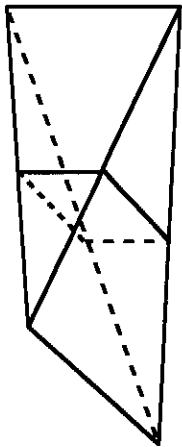
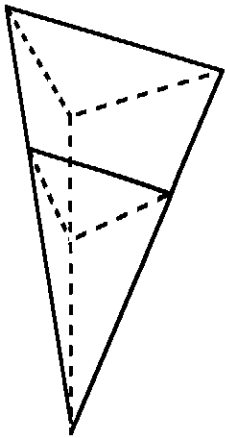
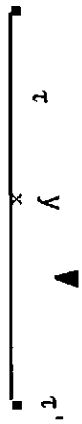


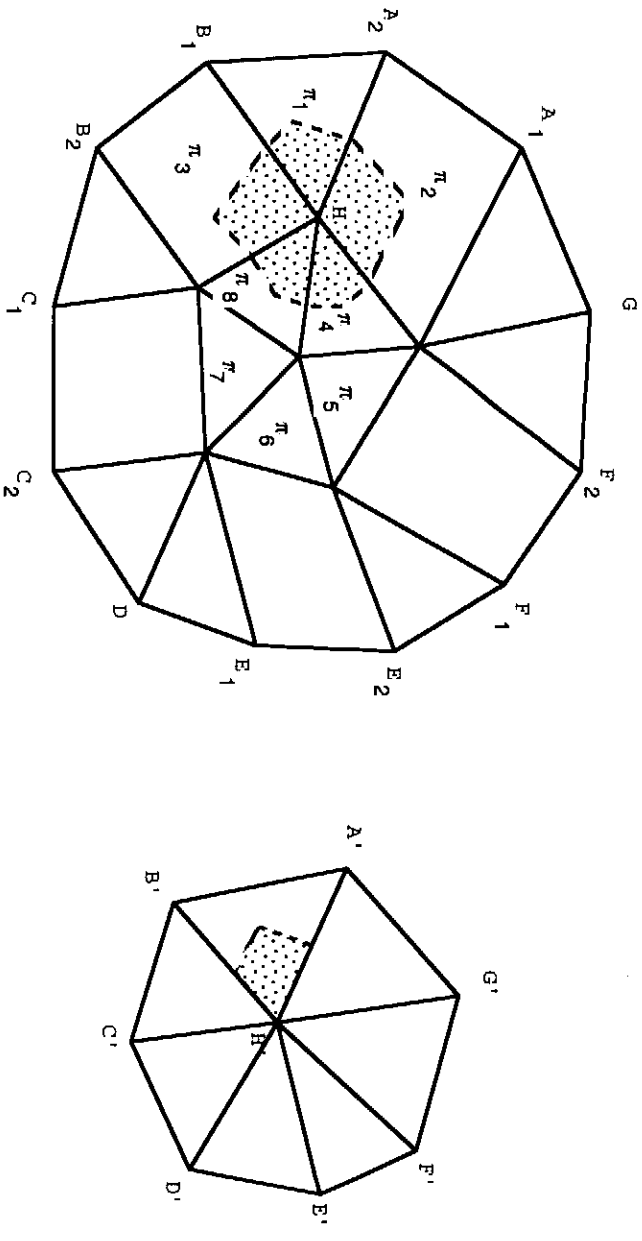
Figure 6 : La cellule duale relative de ϖ_0 est la réunion des sous-ensembles γ correspondant aux suites de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \varpi_2 < \varpi_3$ (figure faite dans le cas absolu, par commodité du dessin). Le bord du baryème $b(\varpi_0, \pi)$ est la réunion des baryèmes $b(\varpi_1^i, \pi)$ où ϖ_1^i parcourt les faces de π contenant ϖ_0 comme face de codimension 1.

ABREVI 4.6 Remarque. - La partie de la cellule duale de ϖ_0 contenue dans un prisme π admettant ϖ_0 comme face se construit à l'aide des suites $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k$ telles que $\varpi_k = \pi$ et $\dim \varpi_{i+1} - \dim \varpi_i = 1$ pour tout i .

La cellule duale relative de π est aussi la réunion des joints relatifs de l'âme relative de π et des cellules duales relatives des prismes π' de dimension relative $r + 1$ contenant π

(3) Le terme "cellule duale" est ici employé abusivement, en fait ce sont bien des cellules si la fibre type F_τ est une variété topologique lisse.



Fig. 7b : Fibre de \mathcal{P} au dessus de $y \in \tau$,Fibre de \mathcal{P} au dessus de $y' \in \tau'$

Comme expliqué dans la figure 7a, et avec les fibres ci-dessus, les prismes π_2 et π_3 se spécialisent en $A'H'$ et $B'H'$ respectivement, les prismes π_4 à π_8 dégénèrent en H' . L'image de la cellule duale de H par $h_{\tau, \tau'}$ n'est pas la cellule duale de $H' = h_{\tau, \tau'}(H)$. Par contre, les baryèmes vérifient la proposition 4.15 ci-dessous.

Baryèmes

Pour pallier à cet inconvéniement, cet exemple suggère d'introduire la notion de *baryème* qui est intuitivement la portion d'une cellule duale qui est contenue dans un prisme donné.

OHZREM 4.7 Définition. - Etant donné un couple (π_0, π) de prismes de $\mathcal{P}(\tau)$ ayant tous deux pour image τ et tels que $\pi_0 < \pi$, on appelle *baryème associé* à (π_0, π) , et on note $b(\pi_0, \pi)$, la réunion des sous-ensembles de la subdivision barycentrique relative de π qui correspondent aux suites $\pi_0 = \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$ telles que $\dim \varpi_{i+1} - \dim \varpi_i = 1$ pour tout i .

C'est bien la portion de la cellule duale relative de π_0 qui est contenue dans π .

Etant donné un baryème $b(\pi_0, \pi)$, toute suite de prismes incidents $\pi_0 < \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_l < \dots < \varpi_k = \pi$ se spécialise, au dessus des sommets y_j de τ en une suite

$$(*, j) \quad \pi_{0,j} = \varpi_{0,j} < \varpi_{1,j} < \dots < \varpi_{l,j} < \dots < \varpi_{k,j} = \pi_j$$

dans laquelle certaines inclusions sont des égalités. Pour y_j , i.e. j fixé, soit K_j le nombre de suites possibles $(*, j)$ pour lesquelles les prismes $\varpi_{l,j}$ sont distincts et de codimensions successives 1 (c'est-à-dire que $\dim \varpi_{l+1,j} - \dim \varpi_{l,j} = 1$). Dans ce cas, les barycentres des prismes $\varpi_{l,j}$ engendrent un simplexe de dimension $k_j = \dim(\pi_j) - \dim(\pi_{0,j})$. Ce simplexe est l'un des simplexes composante de la spécialisation de $b(\pi_0, \pi)$ à y_j , on le note β_{j,k_j} avec $k_j \in K_j$.