

Théorème de Poincaré relatif

Jean-Paul Brasselet et Bernard Teissier

13 décembre 2009

(Version N01)

Note : Les deux premières parties (jusque page 15) sont un copié-collé (à simplifier ?) du début de [1].

Table des matières

0	Introduction	3
1	Géométrie des morphismes triangulés	3
1.1	Rappels	3
1.2	Morphismes et faisceaux prismaux	4
2	Faisceau prismal associé à un morphisme simplicial	5
3	Théorème de dualité de Poincaré relative	15
3.1	Chaînes et cochaînes.	15
3.2	Subdivisions barycentriques relatives, spécialisations, et Baryèmes.	16
3.2.1	Subdivision barycentrique relative.	16
3.2.2	Cellules duales relatives.	17
3.3	Baryèmes	21
3.3.1	Dualité de Poincaré relative	25
3.3.2	Nombres d'intersection	25
4	Théorème de de Rham relatif	27
4.1	Forme différentielle associée à un baryème.	27
4.2	Théorème de de Rham relatif	28

Table des figures

1	Exemples de \mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f	9
2	\mathcal{S}_f au dessus de τ et de τ'	10
3	\mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ	11
4	\mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ	11
5	Spécialisations possibles d'un 5-simplexe au dessus d'un 2-simplexe τ . . .	12
6	Ames et cellules relatives	17
7	Joint relatif	18
8	Cellule relative	19
9	\mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ	20

0 Introduction

L'origine de ce travail est une question posée par François Trèves au second auteur en 1982 :

La première difficulté est que la décomposition simpliciale de Δ n'induit pas sur les fibres de f une décomposition simpliciale. Mais nous avons remarqué qu'elle induisait une décomposition en prismes (produits de simplexes), et que ces décompositions étaient naturellement isomorphes pour toutes les fibres de points de l'intérieur d'un simplexe de la base T . Pour rendre compte des dégénérescences de la structure prismale des fibres qui se produisent par spécialisation sur les faces d'un simplexe de T nous avons introduit les *faisceaux prismaux*. Le morphisme simplicial définit canoniquement un faisceau prismal mais en fait il est bien plus commode de travailler avec un autre faisceau prismal, qui est un "éclaté" de celui-ci et est trivialisé au dessus de chaque simplexe fermé de T . Sur ce faisceau trivialisé il est facile de définir les formes de Whitney ; la forme de Whitney d'un prisme est essentiellement le produit extérieur des formes de Whitney des simplexes facteurs du prisme. Le calcul permet de définir naturellement les formes de Whitney *relatives*. Après avoir représenté (modulo les formes exactes) la forme ω par une combinaison linéaire de formes de Whitney relatives, on cherche H sous la même forme, et le problème se ramène finalement à un énoncé d'algèbre linéaire dont la solution est facile.

Ces constructions suggèrent d'étendre au cas relatif la démonstration de Whitney du théorème de de Rham. La première difficulté est l'extension de la dualité de Poincaré, puisque la dualité dans les fibres ne se spécialise pas au dessus des faces des simplexes de T . Pour surmonter cette difficulté nous considérons dans les fibres des fragments des cellules duales, qui ont la propriété de se spécialiser. Les éléments de ces fragments sont appelés *Baryèmes* et ils engendrent un complexe plus gros que le complexe des cochaînes relatives, mais qui a la même cohomologie. Ceci nous permet d'énoncer un théorème de dualité de Poincaré relatif, dont la démonstration est analogue à celle du cas absolu. Il ne reste plus qu'à généraliser au cas relatif les lemmes d'extension de formes différentielles de Whitney pour terminer la démonstration du théorème de de Rham relatif : la cohomologie du complexe des formes différentielles höldériennes relatives est isomorphe à la cohomologie du complexe des cochaînes relatives à coefficients höldériens.

1 Géométrie des morphismes triangulés

1.1 Rappels

Définition 1.1. Soit $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ un sous-ensemble sous-analytique tel que la restriction $g: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ de la première projection soit un morphisme propre. On rappelle qu'une triangulation de cette situation est la donnée :

ANALYT

1. d'homéomorphismes sous-analytiques t de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dans lui-même et t_0 de \mathbf{R}^n dans lui-même, tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m & \xrightarrow{t} & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m & \supset & X \\
 \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 & & \downarrow g \\
 \mathbf{R}^n & \xrightarrow{t_0} & \mathbf{R}^n & = & \mathbf{R}^n
 \end{array}$$

2. de décompositions de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ et de \mathbf{R}^n en simplexes linéaires de telle façon que les homéomorphismes t et t_0 soient analytiques à l'intérieur de chaque simplexe et que pr_1 soit une application simpliciale. Ces données doivent être compatibles avec X : si l'image par t d'un simplexe rencontre X , elle est contenue dans X .

Dans la suite, étant donné un morphisme g triangulé comme ci-dessus, nous noterons Δ le sous-complexe simplicial de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ formé des simplexes dont l'image par t rencontre X . Le sous-complexe simplicial de \mathbf{R}^n formé des simplexes dont l'image par t_0 rencontre $g(X)$ sera noté T , enfin $f: \Delta \rightarrow T$ désignera le morphisme induit par pr_1 .

Remarques 1.2. 1) D'après l'inégalité de Łojasiewicz, tout homéomorphisme sous-analytique t est höldérien sur tout compact : pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, il existe des nombres réels positifs C et α tels que l'on ait : $\|t(y) - t(x)\| \leq C\|y - x\|^\alpha$.
 2) L'image par pr_1 d'un simplexe est un simplexe et l'image réciproque par pr_1 d'un simplexe est une réunion de simplexes.

1.2 Morphismes et faisceaux prismaux

PRISME

Définition 1.3. Un *prisme* (resp. un prisme ouvert, resp. un prisme fermé) est un produit de simplexes (resp. simplexes ouverts, resp. fermés) linéairement plongés dans un espace euclidien et muni de la topologie induite ; l'ensemble vide est donc un prisme auquel, par convention, on attribue la dimension $-\infty$. Une *face* d'un prisme est vide ou est un produit de faces de ses facteurs. Nous appellerons *coordonnées barycentriques* d'un point d'un prisme la famille des coordonnées barycentriques de ses projections sur les facteurs du prisme.

Un *ensemble prismaal* de \mathbf{R}^N est une réunion localement finie de prismes fermés telle que l'intersection de deux quelconques d'entre eux soit une face de chacun. Un sous-complexe simplicial d'une triangulation de \mathbf{R}^N est un ensemble prismaal.

Sauf mention du contraire, les simplexes et les prismes considérés dans la suite sont fermés.

Un *ensemble prismaal de dimension pure d* est une réunion de prismes de dimension d .

Une *orientation* d'un prisme $\pi = \sigma_0 \times \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p$ est la donnée d'un ordre sur l'ensemble $\{0, \dots, p\}$ et d'une orientation sur chaque simplexe σ_i . Une orientation d'un prisme détermine une orientation de chacune de ses faces. Une *orientation locale* d'un ensemble prismaal est la donnée d'une orientation de chacun de ses prismes.

Si un ensemble prismaal de dimension pure d est une pseudovariété (resp. une pseudovariété à bord, voir [6, Chap. 3, 11]), tout prisme de dimension $d - 1$ est face de deux prismes (resp. un ou deux prismes) de dimension d . Le bord, quand il existe, est le sous-ensemble prismaal constitué des prismes de dimension $d - 1$ qui sont faces d'exactly un prisme de dimension d . Un ensemble prismaal Π qui est une pseudovariété à bord de dimension d est *orienté* s'il est muni d'une orientation locale telle que les orientations induites sur tout prisme de dimension $d - 1$ par deux prismes dont il est face soient opposées.

Rappelons qu'un morphisme simplicial d'un complexe simplicial dans un autre est une application dont la restriction à chaque simplexe de la source a pour image un simplexe du but et qui est linéaire en les coordonnées barycentriques.

APPLPR

Définition 1.4. Une application φ d'un ensemble prismaal Π dans un ensemble prismaal Σ est un morphisme prismaal si pour tout prisme $\pi = \sigma_0 \times \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p$ de Π , l'image

$\varphi(\pi)$ est un prisme $\tau_0 \times \tau_1 \times \cdots \times \tau_s$ et l'application induite φ sur π est linéaire dans les coordonnées barycentriques des prismes.

Un morphisme simplicial entre complexes simpliciaux est un morphisme prismaal.

Un morphisme prismaal entre des ensembles prismaux orientés est dit orienté s'il respecte les orientations des prismes.

2 Faisceau prismaal associé à un morphisme simplicial

L'exemple suivant est fondamental pour ce qui suit :

Soit $f: \sigma \rightarrow \tau$ un morphisme simplicial entre deux simplexes ; pour chaque sommet y_j de τ , ($0 \leq j \leq s = \dim \tau$), posons $\sigma_j = f^{-1}(y_j)$ et $\pi_f(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$. On se propose de définir des morphismes prismaux

$$\psi_f^\sigma : \pi_f(\sigma) \rightarrow \sigma \quad \text{et} \quad \theta_f^\sigma : f^{-1}(\overset{\circ}{\tau}) \rightarrow \pi_f(\sigma)$$

dont les restrictions au dessus de $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau})$ et $\overset{\circ}{\tau} \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le morphisme f , nous omettrons l'écriture des indices f dans ce qui suit.

Chaque sommet de σ est dans l'un des σ_j et un seul. Pour chaque j , notons $I(j)$ l'ensemble des indices i des sommets a_i de σ_j . Etant donné un point x de σ , de coordonnées barycentriques λ_i et dont l'image $f(x)$ est dans l'intérieur de τ , les sommes $\sum_{i \in I(j)} \lambda_i$ sont non nulles ; pour chaque j , notons x_j le point de σ_j de coordonnées barycentriques

$$\mu_{j,k} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i \in I(j)} \lambda_i}, \quad k \in I(j). \quad (2.1)$$

Notons θ^{σ_j} l'application $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau}) \rightarrow \sigma_j$ qui à x associe le point x_j , et θ^σ l'application de $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau})$ dans le prisme $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ qui au point x associe le point $(f(x), x_0, \cdots, x_s)$. La projection f induit un isomorphisme simplicial du simplexe enveloppe convexe des points x_j dans σ sur τ . Le point x est le point de ce simplexe dont les coordonnées barycentriques sont celles du point $f(x)$ dans τ . Ceci nous donne une description de σ comme *joint itéré* des simplexes σ_j .

On peut en effet définir le joint itéré $\sigma_0 * \cdots * \sigma_s$ de $s + 1$ simplexes σ_j linéairement indépendants dans un espace euclidien comme la réunion des simplexes de dimension $s + 1$ qui sont les enveloppes convexes d'ensembles de points de la forme $(x_j \in \sigma_j)$; $j = 0, \dots, s$. Le simplexe obtenu est simplicialement isomorphe au résultat de la construction classique du joint itéré comme quotient de $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \times [0, 1]^s$. Rappelons cette construction pour $s = 1$:

$$\sigma_0 * \sigma_1 = (\sigma_0 \times \sigma_1 \times [0, 1]) / \langle (a, b, 0) \sim (a', b, 0), (a, b, 1) \sim (a, b', 1) \rangle.$$

Par construction, l'ensemble des sommets du joint coïncide avec l'ensemble des sommets des σ_j . Une orientation du joint peut donc s'interpréter comme la donnée d'un ordre reunion sur l'ensemble d'indices j et d'une orientation de chacun des simplexes σ_j .

Si f est un morphisme simplicial orienté et si on munit chaque σ_j de l'orientation induite par celle de σ , alors l'orientation naturelle du joint itéré déduite de celles de τ et des σ_j n'est autre que celle de σ .

On définit le morphisme $\psi^\sigma : \pi(\sigma) \rightarrow \sigma = \sigma_0 * \dots * \sigma_s$ qui, au point de coordonnées

$$(t_j)_{j=0,\dots,s}, (\mu_{0,i_0})_{i_0 \in I(0)}, \dots, (\mu_{s,i_s})_{i_s \in I(s)}$$

de $\pi(\sigma)$, associe le point de σ dont la coordonnée barycentrique relative au sommet a_i est $\lambda_i = t_j \mu_{j,i}$, où j est l'indice tel que $i \in I(j)$. Ce morphisme est un morphisme prismaal.

Remarquons que, si σ et τ sont orientés ainsi que le morphisme f , cela détermine une unique orientation du joint itéré $\sigma_0 * \dots * \sigma_s$ et une unique orientation du prisme $\pi(\sigma)$ telles que les morphismes $\pi(\sigma) \rightarrow \sigma$ et $\pi(\tau) \rightarrow \tau$ soient orientés.

Proposition 2.1. *Les restrictions au dessus de $f^{-1}(\hat{\tau})$ et $\hat{\tau} \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$ des morphismes prismaaux $\psi^\sigma : \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$ et $\theta^\sigma : f^{-1}(\hat{\tau}) \rightarrow \pi(\sigma)$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

JOINT

PREUVE. En effet tout point x de σ s'écrit $x = \sum_j t_j x_j = \sum_j \sum_{k \in I(j)} \mu_{j,k} a_k = \sum_k \lambda_k a_k$. \square

FAISPR

Définition 2.2. Soit P un ensemble prismaal. Un *faisceau prismaal* \mathcal{F} sur P est la donnée pour chaque prisme fermé ρ de P d'un ensemble prismaal $\mathcal{F}(\rho)$ doté d'un morphisme prismaal $e_\rho : \mathcal{F}(\rho) \rightarrow \rho$ et pour chaque face ρ' de ρ d'un morphisme prismaal $h_{\rho',\rho} : \mathcal{F}(\rho) \rightarrow \mathcal{F}(\rho')$ de telle façon que $h_{\rho,\rho} = Id_{\mathcal{F}(\rho)}$ et que si ρ'' est une face de ρ' , alors $h_{\rho'',\rho} = h_{\rho'',\rho'} \circ h_{\rho',\rho}$. On dit que le faisceau prismaal \mathcal{F} est propre si les ensembles prismaux $\mathcal{F}(\rho)$ sont compacts.

Remarque 2.3. En fait, la notion de faisceau prismaal s'apparente davantage à la notion de carapace (ce qui fût la première définition des faisceaux, voir Séminaire Cartan [?]) qu'à la notion de faisceau. Plus précisément, munissons l'ensemble des prismes d'un ensemble prismaal de l'ordre partiel donné par les inclusions des faces, puis de la topologie dont une base de fermés est constituée des intervalles fermés $\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2$. Les sections du faisceau prismaal au dessus d'un fermé F sont les éléments du produit $\prod_{\rho \in F} \mathcal{F}(\rho)$ compatibles avec les homomorphismes de restriction.

Soient $\varphi : P \rightarrow \Sigma$ un morphisme prismaal, \mathcal{F} un faisceau prismaal sur P et \mathcal{G} un faisceau prismaal sur Σ . Un *morphisme de faisceaux prismaux* de \mathcal{F} dans \mathcal{G} est la donnée pour chaque prisme fermé ρ de P d'un morphisme prismaal $\mathcal{F}(\rho) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi(\rho))$ compatibles avec les homomorphismes de restriction.

Lemme 2.4. *Etant donné un faisceau prismaal \mathcal{F} sur P et ρ un prisme de P , au dessus de l'intérieur $\hat{\rho}$ de ρ l'ensemble $\mathcal{F}(\rho)$ est une réunion de produits de simplexes.*

PRODU

PREUVE. Supposons dans un premier temps que ρ soit un simplexe τ . Tout prisme de l'ensemble $\mathcal{F}(\tau)$ est le produit d'un simplexe d'image τ par un nombre, éventuellement nul, de simplexes. En effet, supposons que le prisme $\sigma_0 \times \sigma_1$ de $\mathcal{F}(\tau)$ ait pour image τ mais que ni σ_0 , ni σ_1 n'ait pour image τ . Cela implique qu'il existe deux sommets a_0 et a_1 de σ_0 , dont on note aussi a_0 et a_1 les coordonnées barycentriques correspondantes et deux sommets b_0 et b_1 de σ_1 , dont on note aussi b_0 et b_1 les coordonnées barycentriques correspondantes, tels que les trois sommets (a_0, b_0) , (a_0, b_1) et (a_1, b_1) du produit $\sigma_0 \times \sigma_1$ aient pour images des sommets distincts de τ . Alors, les coordonnées barycentriques d'un point de l'image de $\sigma_0 \times \sigma_1$ sont fonction du produit $a_0 b_1$, ce qui contredit l'hypothèse de linéarité.

produit

Si σ est un simplexe de $\mathcal{F}(\tau)$ d'image τ , alors σ est le joint des simplexes $\sigma_i = e_{\mathcal{F}}^{-1}(\tau)$ du bord de σ situés au dessus des sommets y_i de τ . La fibre de $e_{\mathcal{F}}$ au dessus d'un point de l'intérieur de τ est donc homéomorphe au produit des simplexes σ_i , d'où le résultat dans ce cas. On en déduit le résultat pour tout prisme de $\mathcal{F}(\tau)$.

Dans le cas d'un prisme ρ , produit de simplexes, le résultat provient de ce qu'il est vérifié au dessus de chacune des composantes du produit. Une autre manière de le montrer est de subdiviser tout prisme ρ de la base P en simplexes, ceci par récurrence en se fixant un barycentre dans chaque simplexe composante du prisme ρ , puis à décomposer le morphisme $\mathcal{F}(\rho) \rightarrow \rho$ au dessus de ces simplexes. \square

Lemme 2.5. *Pour toute orientation de ρ , il est équivalent de se donner une orientation de la fibre $\mathcal{F}(b(\rho))$ au dessus du barycentre $b(\rho)$ de ρ , une orientation compatible pour toutes les fibres $\mathcal{F}(y)_{y \in \hat{\rho}}$, ou une orientation de l'ensemble prismal $\mathcal{F}(\rho)$.*

LORIENT

PREUVE. Cela provient de ce que la donnée d'une orientation d'un espace fibré (orientable) équivaut à la donnée d'une orientation de la base suivie d'une orientation de la fibre. \square

Le bord (orienté) d'un produit orienté $\sigma_0 \times \sigma_1$ est

$$\partial(\sigma_0 \times \sigma_1) = \partial\sigma_0 \times \sigma_1 + (-1)^{|\sigma_0|} \sigma_0 \times \partial\sigma_1,$$

d'où, par récurrence, le bord orienté d'un prisme $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ est :

$$\partial(\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s) = \sum_{j=0}^s (-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} \sigma_0 \times \cdots \times \partial\sigma_j \times \cdots \times \sigma_s. \quad (2.2)$$

Définitions 2.6. a) Etant donné un simplexe orienté σ et une face σ' de codimension 1, alors σ' hérite de deux orientations. La première est celle induite par l'orientation de σ , c'est-à-dire la restriction de l'ordre correspondant des sommets de σ , la seconde est celle qu'il a en tant que face de σ . Ces deux orientations diffèrent d'un signe appelé nombre d'incidence et noté $[\sigma; \sigma']$.

ORIENT

b) Etant donné un ensemble prismal orienté P qui est une variété topologique, pour tout couple (ρ, ρ') de prismes orientés tel que ρ' soit une face de codimension 1 de ρ , le nombre d'incidence $[\rho; \rho']$ est égal à +1 si l'orientation de ρ' coïncide avec l'orientation du bord de ρ , et à -1 sinon.

Lemme 2.7. *Soit $\pi = \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_j \times \cdots \times \sigma_s$ un prisme orienté, et considérons une face $\pi' = \sigma_0 \times \cdots \times \sigma'_j \times \cdots \times \sigma_s$ de codimension 1. Si l'on munit le simplexe σ'_j de l'orientation induite par celle de σ , alors le nombre d'incidence $[\pi; \pi']$ est égal à $(-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} [\sigma_j; \sigma'_j]$.*

INKCID

PREUVE. En effet, $\partial\sigma_j = \sum_{i=0}^k [\sigma_j; \sigma'_{j,i}] \sigma'_{j,i}$ où $\sigma'_{j,i}$ décrit les faces de codimension un de σ_j . On en déduit le résultat. \square

Définition 2.8. Un faisceau prismal \mathcal{F} sur un ensemble prismal orienté P qui est une variété topologique est orienté si pour chaque prisme ρ de dimension maxima de P, on a une orientation de la fibre $\mathcal{F}(b(\rho))$ au dessus du barycentre de ρ , de telle façon que si l'on munit $\mathcal{F}(\rho)$ de l'orientation correspondante (cf Lemme 2.5), les morphismes $h_{\rho', \rho}$ sont $[\rho; \rho']$ -orientés.

Les exemples de faisceaux prismaux qui suivent sont fondamentaux pour ce travail.

EXEMSF

Exemple 2.9. Soit $f: S \rightarrow T$ un morphisme simplicial surjectif d'ensembles simpliciaux, on définit un faisceau prismal \mathcal{S}_f sur T en posant, pour tout simplexe τ de T , $\mathcal{S}_f(\tau) = f^{-1}(\tau)$. On continue de noter par f la projection de \mathcal{S}_f sur T . Si τ' est une face de τ et σ un simplexe de $f^{-1}(\tau)$, le simplexe $\sigma' = \sigma \cap f^{-1}(\tau')$ est une face de σ . On peut écrire σ comme le joint de σ' et de sa face opposée σ'' . On définit alors $h_{\tau',\tau}: \mathcal{S}_f(\tau) \rightarrow \mathcal{S}_f(\tau')$ en prenant pour $h_{\tau',\tau}: \sigma \rightarrow \sigma'$ la projection simpliciale de σ sur σ' selon les fibres du joint.

EXEMPF

Exemple 2.10. Soit Δ un complexe simplicial fini d'une subdivision simpliciale linéaire de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ tel que la restriction f à Δ de la première projection p soit une application simpliciale sur un complexe simplicial $f(\Delta)$ d'une subdivision simpliciale linéaire de \mathbf{R}^n .

Supposons que σ^{12} soit une face commune des simplexes σ^1 et σ^2 de Δ et que ces trois simplexes aient la même image τ , simplexe de sommets y_0, \dots, y_s . Alors le prisme $\pi(\sigma^{12}) = \pi_f(\sigma^{12})$ est un sous-prisme de $\pi(\sigma^1)$ et de $\pi(\sigma^2)$. En fait, avec la notation de l'exemple 2.1, on voit que l'intersection de $\pi(\sigma^1)$ et $\pi(\sigma^2)$ est le prisme $\tau \times \prod(\sigma_j^1 \cap \sigma_j^2)$, où $j = 0, \dots, s$.

Remarquons que la composition $\theta^\sigma \circ \psi^\sigma$ (Proposition 2.1) donne un plongement naturel de $\pi(\sigma)$ dans $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$. On en déduit un plongement de $\pi(\sigma^1)$ et de $\pi(\sigma^2)$ dans $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$, on vérifie aussitôt que ces deux plongements coïncident sur σ^{12} et que l'on a donc défini un plongement de $\pi(\sigma^1) \cup \pi(\sigma^2)$ dans $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$. Cela montre que, si $\tau \in f(\Delta)$ est fixé, la réunion des prismes $\pi(\sigma)$ tels que $f(\sigma) = \tau$, plongée de la façon naturelle que l'on vient de décrire dans $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$, est un sous-ensemble prismal $\mathcal{F}(\tau)$ muni d'un morphisme prismal surjectif $e_\tau: \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \tau$. L'ensemble prismal $e_\tau^{-1}(\hat{\tau})$ est naturellement isomorphe à $\hat{\tau} \times \cup_k(\Pi_{j=0}^s(\sigma_j^k))$ où les σ_j^k sont les simplexes de $e_\tau^{-1}(\hat{\tau})$ d'image τ et $\sigma_j^k = \sigma^k \cap f^{-1}(y_j)$. On peut donc appeler fibre type F_τ de e_τ la réunion des $\Pi_{j=0}^s(\sigma_j^k)$.

Ce morphisme prismal a la propriété que l'image inverse d'un simplexe fermé de $f(\Delta)$ est le produit de ce simplexe par un ensemble prismal; nous pourrions donc y définir des formes de Whitney relatives.

Supposons que τ' soit une face de τ et posons $\sigma' = \sigma \cap f^{-1}(\tau')$. D'après ce qui précède, chaque prisme de $\mathcal{F}(\tau)$ est de la forme $\tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$ où $\sigma_j = f^{-1}(y_j) \cap \sigma$. L'homomorphisme $h_{\tau',\tau}$ de $\mathcal{F}(\tau)$ dans $\mathcal{F}(\tau')$ est l'homomorphisme de dégénérescence qui associe au prisme $\tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$ le prisme $\tau' \times \sigma'_0 \times \dots \times \sigma'_s$ où $\sigma'_j = f^{-1}(y_j) \cap \sigma'$ si y_j est un sommet de τ' et un point sinon.

Notons $e_{\mathcal{P}_f}: \mathcal{P}_f \rightarrow f(\Delta)$ le faisceau prismal ainsi obtenu. Nous allons montrer l'existence d'un morphisme canonique $\psi: \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$.

COMPFA

Théorème 2.11. Soit $f: \Delta \rightarrow T$ un morphisme simplicial. Considérons le faisceau prismal \mathcal{S}_f de l'exemple 2.9 et le faisceau prismal \mathcal{P}_f de l'exemple 2.10. Il existe un morphisme surjectif $\psi: \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$ de faisceaux prismaux sur $f(\Delta)$ tel que

a) Pour chaque simplexe τ de $f(\Delta)$ les morphismes θ^{σ^k} et ψ^{σ^k} de la Proposition 2.1 définissent un isomorphisme θ_τ de $f^{-1}(\hat{\tau})$ sur $\hat{\tau} \times F_\tau$. Le composé $\theta_\tau \circ \psi$ s'étend en un isomorphisme prismal de $\mathcal{P}_f(\tau)$ sur $\tau \times F_\tau$.

b) La formation du faisceau \mathcal{P}_f est fonctorielle et universelle. Plus précisément :

1. pour tout morphisme prismal $\phi^f: P' \rightarrow \Delta$, il existe un faisceau prismal $\mathcal{F}(P')$ sur $f(\Delta)$ et un morphisme de faisceaux prismaux $\mathcal{F}(\phi^f): \mathcal{F}(P') \rightarrow \mathcal{P}_f$,

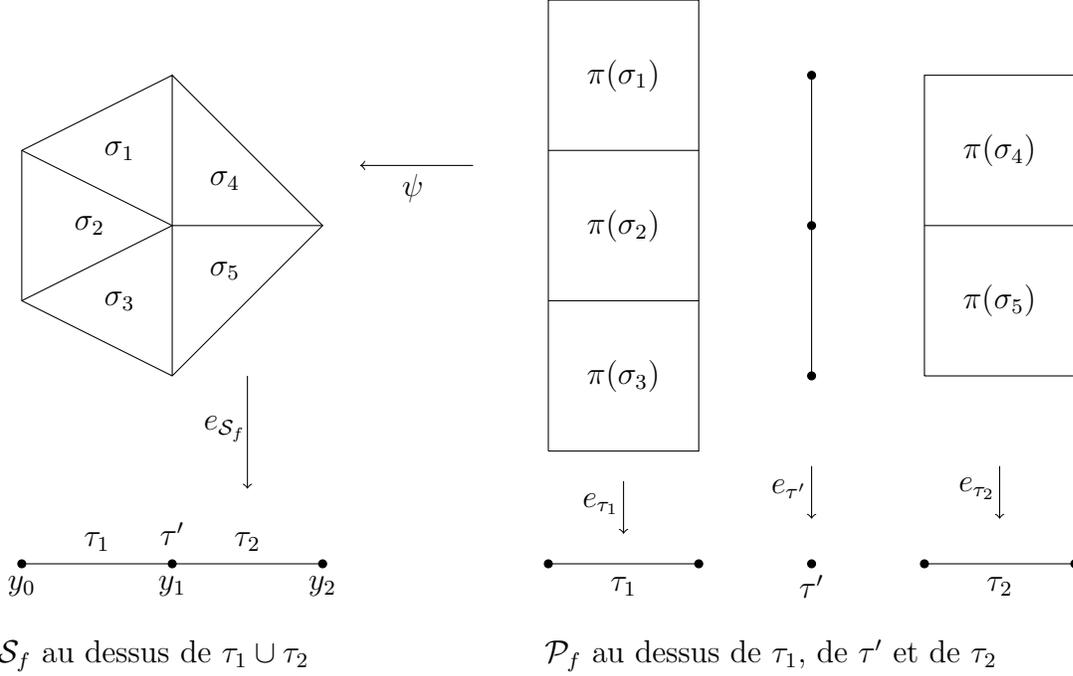


FIG. 1 – Exemples de \mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f

2. étant donné un morphisme surjectif $\psi' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{S}_f$ de faisceaux prismaux sur $f(\Delta)$ tel que l'image inverse de tout simplexe τ de $f(\Delta)$ par $f \circ \psi'$ soit réunion de produits de τ par des prismes, il existe un unique morphisme $\chi : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{P}_f$ rendant commutatif le diagramme de faisceaux prismaux au dessus de $f(\Delta)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}' & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{P}_f \\
 \searrow \psi' & & \swarrow \psi \\
 & \mathcal{S}_f &
 \end{array}$$

PREUVE. Montrons l'existence d'un morphisme de faisceaux prismaux $\psi : \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$. Un point d'un prisme est déterminé par ses coordonnées barycentriques dans chaque simplexe. Pour tout σ on a défini dans l'exemple 2.1 un morphisme prismal $\psi^\sigma : \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$. Les morphismes ψ^σ et $\psi^{\sigma'}$ coïncident sur $\pi(\sigma \cap \sigma')$, et nous avons donc défini un morphisme prismal $\psi_\tau : \mathcal{P}_f(\tau) \rightarrow f^{-1}(\tau) = \mathcal{S}_f(\tau)$.

Entre autres, si τ' est une face d'un simplexe τ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_f(\tau) & \xrightarrow{\psi_\tau} & \mathcal{S}_f(\tau) \\
 \downarrow h_{\tau',\tau} & & \downarrow h_{\tau',\tau} \\
 \mathcal{P}_f(\tau') & \xrightarrow{\psi_{\tau'}} & \mathcal{S}_f(\tau').
 \end{array}$$

Le a) résulte alors de la Proposition 2.1 et de l'exemple 2.10.

Prouvons b) ; il suffit de vérifier l'énoncé restreint à un simplexe σ de $\mathcal{S}_f(\tau)$. La définition de \mathcal{P}_f et la structure de produit de $\pi(\sigma)$ impliquent que pour tout prisme π' de l'image inverse de σ par ψ' , on a une application naturelle de π' dans $\pi(\sigma)$, d'où le résultat. \square

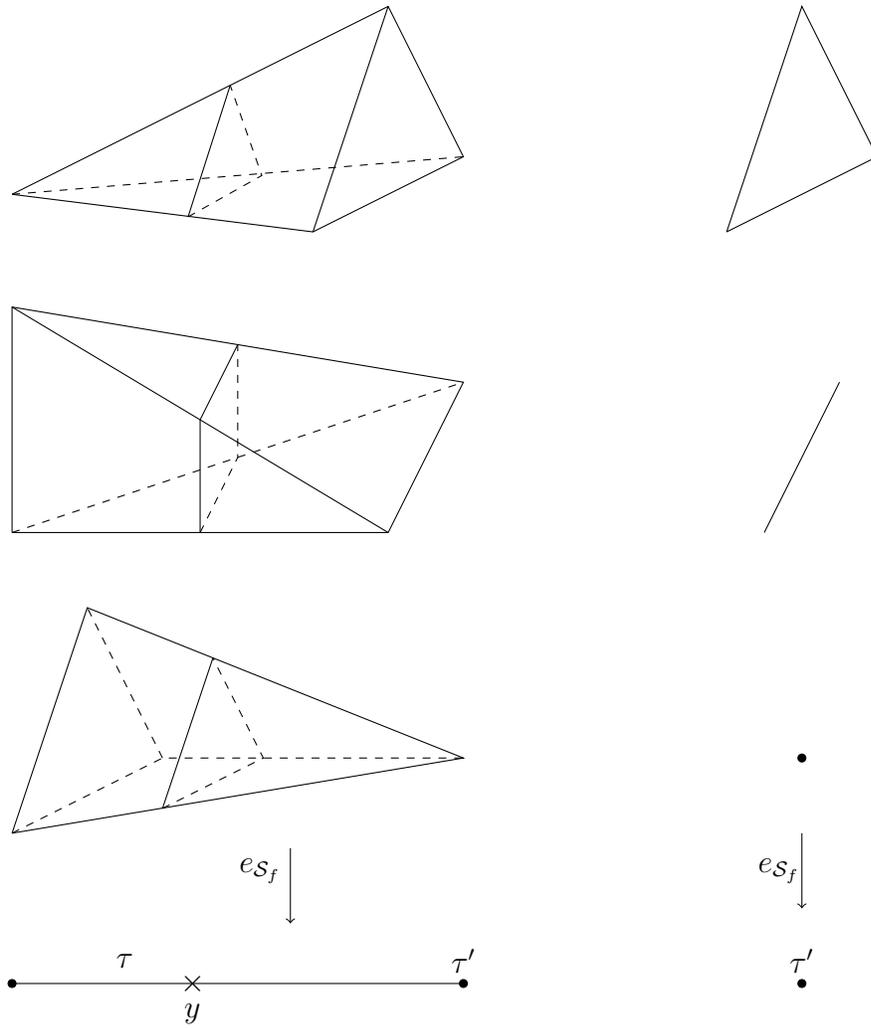


FIG. 2 – \mathcal{S}_f au dessus de τ et de τ'

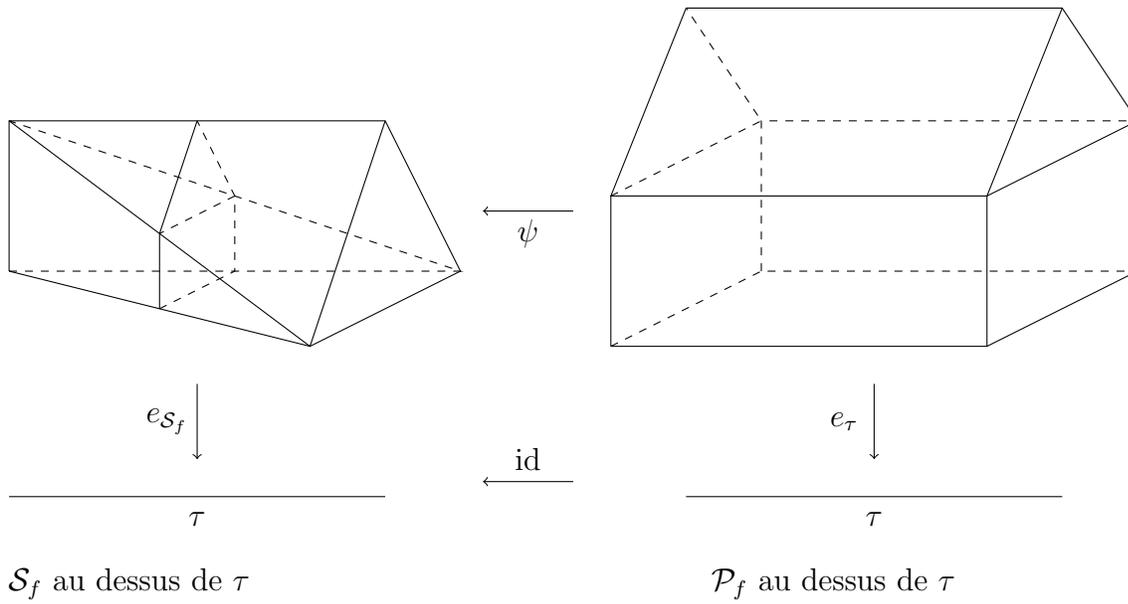


FIG. 3 – \mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ

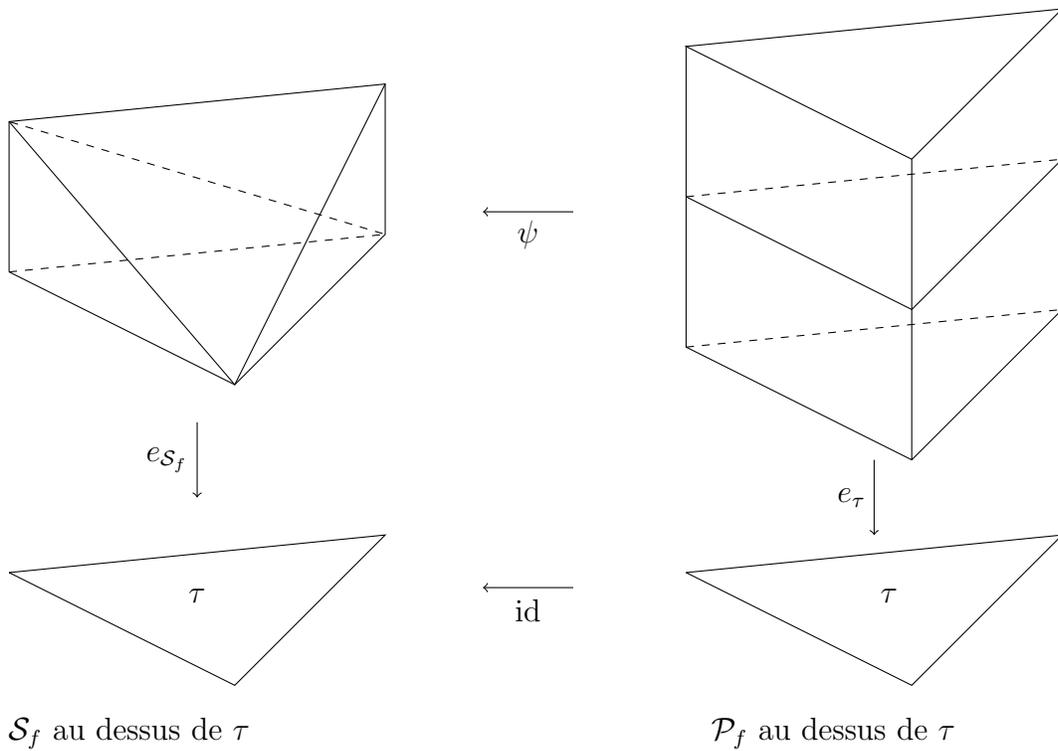


FIG. 4 – \mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ

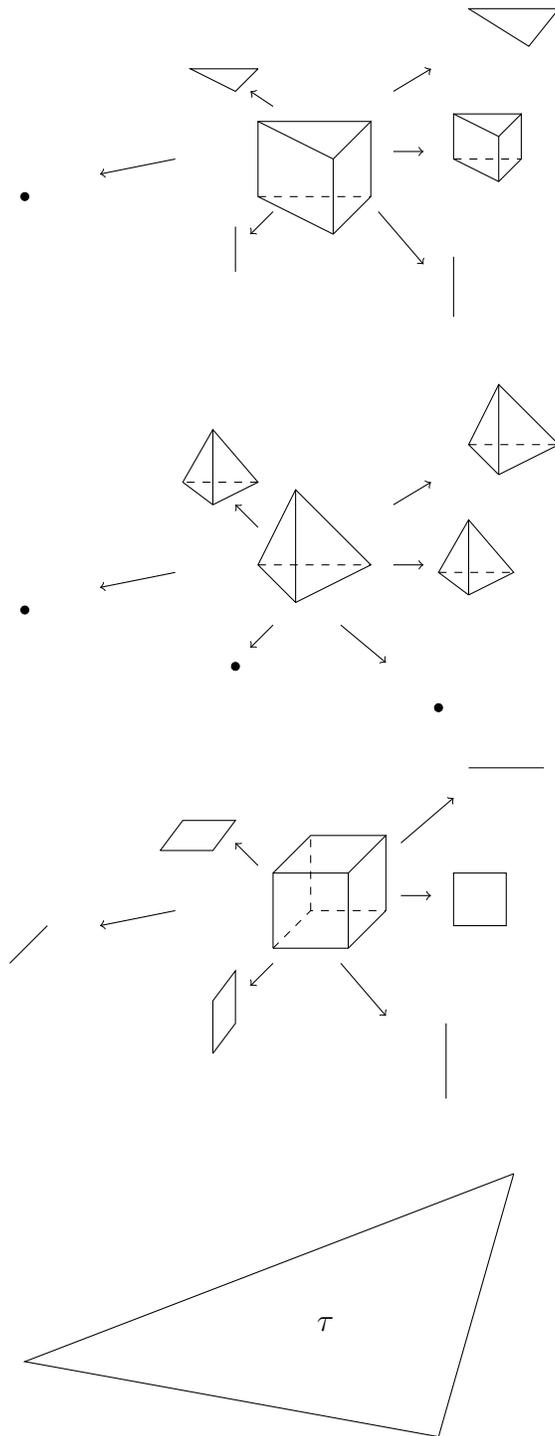


FIG. 5 – Spécialisations possibles d'un 5-simplexe au dessus d'un 2-simplexe τ
 On a dessiné les fibres au dessus des points génériques des différentes faces de τ .

Remarques 2.12. 1) Le morphisme ψ est essentiellement un éclatement comme le montre l'écriture locale $\lambda_i = t_j \mu_{j,i}$. En particulier, le morphisme $\psi^\sigma : \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$ n'est un isomorphisme que si σ est isomorphe à son image par f . Soulignons que le morphisme $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \rightarrow \sigma_j$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \sigma_0 * \cdots * \sigma_s & \xleftarrow{\psi^\sigma} & \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \\ & \searrow \theta^{\sigma_j} & \swarrow \text{pr}_j \\ & \sigma_j & \end{array}$$

où θ^{σ_j} désigne le morphisme introduit dans l'exemple 2.1, est bien la j -ème projection pr_j du produit.

2) Le jacobien de l'application ψ^σ est égal à :

$$t_0^{|\sigma_0|} t_1^{|\sigma_1|} \cdots t_s^{|\sigma_s|}.$$

3) La catégorie des ensembles et morphismes prismaux est "la plus petite" catégorie contenant celle des ensembles et morphismes simpliciaux et dans laquelle on a existence et unicité à isomorphisme près du produit fibré.

L'existence du produit fibré découle du fait que, puisque les applications prismales sont linéaires sur chaque simplexe, le sous-ensemble d'un produit $\pi_1 \times \pi_2$ de prismes défini par la condition $f_1(x_1) = f_2(x_2)$, où $f_1 : \pi_1 \rightarrow \tau$ et $f_2 : \pi_2 \rightarrow \tau$ sont des morphismes prismaux, est un prisme. La vérification de la propriété universelle est immédiate.

Caractérisation des faisceaux prismaux provenant de morphismes simpliciaux

Définitions 2.13. a) Soit \mathcal{F} un faisceau prismaux sur un complexe simplicial T , on dit que le prisme $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$ est trivial s'il s'écrit $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$;

DIMREL

b) On appelle *dimension relative* d'un prisme $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$ et on note $\dim_{rel}(\pi)$, la différence $\dim \pi - \dim \tau$.

c) On dit que le prisme $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$ est *équidimensionnel* au dessus d'une face τ' de τ si la dimension relative de $\pi|_{\tau'}$ est égale à celle de π .

Un prisme de dimension relative nulle est équidimensionnel au dessus de toutes les faces de τ . Le morphisme $\sigma_1 \rightarrow \tau_1$ de la figure 2 n'est pas équidimensionnel au dessus du sommet y_0 de τ_1 .

Proposition 2.14 (Caractérisation des faisceaux de la forme \mathcal{S}_f). *Un faisceau prismaux \mathcal{F} sur un complexe simplicial T est de la forme \mathcal{S}_f , pour un morphisme simplicial $f : X \rightarrow T$, si et seulement si :*

PROCAR

1. Tous les prismes de \mathcal{F} sont des simplexes,
2. Pour tout couple $\tau' < \tau$ de simplexes de T , et tout simplexe σ de $\mathcal{F}(\tau)$, le morphisme $h_{\tau',\tau} : \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \mathcal{F}(\tau')$ est surjectif et on a un isomorphisme simplicial $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$.

PREUVE. Le fait que les conditions 1) et 2) soient nécessaires résulte aussitôt de la construction de l'exemple 2.9. Montrons qu'elles sont suffisantes; nous construisons l'espace X de la définition 1.1 par recollement. Notons $X_\tau = e_\tau^{-1}(\tau)$, alors pour toute face τ' de τ , on a $X_\tau|_{\tau'} = X_{\tau'} = h_{\tau',\tau}(X_\tau)$. Définissons l'espace X comme quotient de la réunion des X_τ par la relation d'identification des restrictions au dessus des faces des simplexes de T . L'application $f : X \rightarrow T$ est naturellement définie. \square

Lemme 2.15. *Considérons le faisceau prismal \mathcal{S}_f de base T . Pour tout couple $\tau' < \tau$ de simplexes de T , et tout simplexe σ de $\mathcal{S}_f(\tau)$, on a équivalence des propriétés suivantes :*

- (i) $\dim_{\text{rel}} h_{\tau',\tau}(\sigma) = \dim_{\text{rel}}(\sigma)$
- (ii) σ est équidimensionnel au dessus de la face τ' .
- (iii) Si τ'' est la face opposée de τ' dans τ , la projection $\sigma|_{\tau''} \rightarrow \tau''$ est un isomorphisme.

PREUVE. Considérons τ comme le joint de τ' et de sa face opposée τ'' . Puisque

$$\dim \sigma = \dim \sigma|_{\tau'} + \dim \sigma|_{\tau''} + 1$$

et $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$, l'assertion (i) est équivalente à dire que $\sigma|_{\tau''}$ est isomorphe à τ'' d'où le résultat (voir Figures 1 et 3). \square

Proposition 2.16 (Caractérisation des faisceaux du type \mathcal{P}_f). *Un faisceau prismal \mathcal{F} sur un complexe simplicial T est de type \mathcal{P}_f où $f: X \rightarrow T$ est un morphisme simplicial si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

- a) *Tout prisme $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$ est le produit de simplexes $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ avec $s = \dim \tau$,*
- b) *Si $\tau' < \tau$ le morphisme $h_{\tau',\tau}: \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \mathcal{F}(\tau')$ est surjectif et si un prisme $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$ s'écrit $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$, alors on a $h_{\tau',\tau}(\pi) = \tau' \times \sigma'_0 \times \cdots \times \sigma'_k$ où chaque σ'_β est l'un des σ_α .*

PREUVE. Si un faisceau prismal \mathcal{F} est de type \mathcal{P}_f , il vérifie a) et b) par construction. Montrons la réciproque. Soit donc un faisceau prismal \mathcal{F} satisfaisant a) et b). On lui associe un faisceau prismal \mathcal{S} de base T de la façon suivante : les prismes de $\mathcal{S}(\tau)$ sont les joints itérés $\sigma_0 * \cdots * \sigma_s$ des simplexes apparaissant dans les prismes $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ de \mathcal{F} . Ce sont donc des simplexes. La propriété b) implique que, pour tout simplexe σ de $\mathcal{S}(\tau)$ et pour toute face τ' de τ , on a $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$. D'après la proposition 2.14, le faisceau \mathcal{S} est de la forme \mathcal{S}_f et le faisceau \mathcal{F} est le faisceau \mathcal{P}_f qui lui est associé par la construction de l'exemple 2.10. \square

Remarque 2.17. Pour tout prisme π de $\mathcal{P}_f(\tau)$ et pour tout sommet $\{y\}$ de τ , on a $h_{\{y\},\tau}(\pi) = \{y\} \times \sigma_{i(y)}$ où $\sigma_{i(y)}$ est le simplexe $\psi(\pi) \cap (e_\tau)^{-1}(\{y\})$ de \mathcal{S}_f .

Corollaire 2.18. *Considérons le faisceau prismal \mathcal{P}_f de base T . Pour tout couple $\tau' < \tau$ de simplexes de T , et tout prisme π de $\mathcal{P}_f(\tau)$, on a l'équivalence des propriétés suivantes :*

- i) $\dim_{\text{rel}} h_{\tau',\tau}(\pi) = \dim_{\text{rel}}(\pi)$
- ii) $h_{\tau',\tau}(\pi) = \pi|_{\tau'}$
- iii) $\psi(\pi)$ est équidimensionnel au dessus de la face τ' .

PREUVE. La proposition 2.16 et la remarque 2.17 impliquent l'équivalence de (i) et (ii), la proposition 2.14 et le fait que $\dim \psi(\pi) = \dim \pi$ impliquent l'équivalence de (i) et (iii). \square

Corollaire 2.19. *Considérons le faisceau prismal \mathcal{P}_f de base T . Pour tout simplexe τ de T , et tout prisme π de $\mathcal{P}_f(\tau)$, on a l'équivalence des propriétés suivantes :*

- i) $\psi(\pi)$ est équidimensionnel en un sommet y_0 de τ .
ii) π est isomorphe au dessus de τ à un produit $\tau \times \sigma_\pi$.

PREUVE. Le corollaire est une conséquence directe de la proposition 2.16 et de la remarque 2.17. Le simplexe σ_π du (ii) est $\psi(\pi) \cap (e_\tau)^{-1}(\{y_0\})$ de \mathcal{S}_f où $\{y_0\}$ est le sommet de τ du (i) (voir Figures 1 et 3). \square

3 Théorème de dualité de Poincaré relative

3.1 Chaînes et cochaînes.

DEFCHA

Définition 3.1. Soient T un ensemble prismal et \mathcal{P} un faisceau prismal sur T . On appelle r -chaîne sur \mathcal{P} la donnée, pour chaque prisme τ de T , d'une somme formelle $c(\tau) = \sum a_\pi \bar{\pi}$, à coefficients réels, d'adhérences de prismes de dimension r de $\mathcal{P}(\tau)$, de telle façon que, pour chaque face τ' de τ , on ait l'égalité $(h_{\tau',\tau})_*(c(\tau)) = c(\tau')$. Supposons le faisceau \mathcal{P} orienté; on dit que la chaîne c est orientée si les applications $(h_{\tau',\tau})_*$ préservent l'orientation des prismes.

Le bord d'un prisme orienté $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ est la chaîne

$$\partial(\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s) = \sum_{j=0}^s (-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} \sigma_0 \times \cdots \times \partial\sigma_j \times \cdots \times \sigma_s$$

(voir le lemme 2.7). Le bord d'une chaîne est défini par linéarité.

Remarquons que le bord d'une chaîne de dimension relative r n'est pas en général une chaîne de dimension relative $(r - 1)$.

Le bord relatif d'un prisme $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ est défini comme la partie de dimension relative $r - 1$ du bord de π . C'est donc la chaîne définie par

$$\partial_e \pi = \sum_{j=0}^s (-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \partial\sigma_j \times \cdots \times \sigma_s.$$

On vérifie l'égalité $\partial_e(\partial_e \pi) = 0$.

DEFCRE

Définition 3.2. Soient T un ensemble prismal et \mathcal{P} un faisceau prismal sur T . On appelle r -chaîne relative sur \mathcal{P} la donnée, pour chaque prisme τ de T , d'une somme formelle $c(\tau) = \sum a_\pi(y) \bar{\pi}$, à coefficients dans \mathcal{O}_τ , d'adhérences de prismes de dimension relative r de $\mathcal{P}(\tau)$, de telle façon que chaque fonction a_π soit à support dans l'image de $\bar{\pi}$ et que pour chaque face τ' de τ , on ait l'égalité $(h_{\tau',\tau})_*(c(\tau)) = c(\tau')$. Supposons le faisceau \mathcal{P} orienté; on dit que la chaîne c est orientée si les applications $(h_{\tau',\tau})_*$ préservent l'orientation des prismes.

Notons $\mathcal{C}_r^{rel}(\mathcal{P})$ le faisceau de \mathcal{O}_T -modules formé des r -chaînes relatives. Il est engendré comme \mathcal{O}_T -module par les prismes de dimension relative r et est donc libre de type fini si l'application f est propre. En fait, il est libre au sens suivant :

Définition 3.3. Un faisceau de groupes \mathcal{G} sur un ensemble prismaal T est localement libre si pour chaque face τ' d'un prisme τ de la base l'homomorphisme de groupes $h_{\tau',\tau}: \mathcal{G}(\tau) \rightarrow \mathcal{G}(\tau')$ est un isomorphisme.

Un faisceau de \mathcal{O}_T -modules \mathcal{M} est localement libre si sa restriction à chaque prisme τ de la base est un \mathcal{O}_τ -module libre et, pour chaque face τ' de τ , l'image par $h_{\tau',\tau}$ d'une base de $\mathcal{M}(\tau)$ est une base de $\mathcal{M}(\tau')$.

Le bord relatif ∂_e s'étend aux chaînes et permet de définir le complexe $\mathcal{C}_\bullet^{rel}(\mathcal{P})$ des chaînes relatives ; c'est un complexe de \mathcal{O}_T -modules libres.

Définition 3.4. Une *r-cochaîne relative* sur un faisceau prismaal propre est un morphisme \mathcal{O}_T -linéaire du \mathcal{O}_T -module $\mathcal{C}_r^{rel}(\mathcal{P})$ dans \mathcal{O}_T , c'est-à-dire la donnée pour chaque prisme τ de T d'un homomorphisme \mathcal{O}_τ -linéaire de $\mathcal{C}_r^{rel}(\mathcal{P}(\tau))$ dans \mathcal{O}_τ , ces homomorphismes satisfaisant les conditions usuelles de compatibilité. Nous noterons $\mathcal{C}_{rel}^r(\mathcal{P})$ le faisceau de \mathcal{O}_T -modules correspondant ; c'est un faisceau localement libre.

Le cobord relatif d'une *r-cochaîne relative* K est une $(r+1)$ -cochaîne $\delta_e K$ définie par $\delta_e K(c) = K(\partial_e c)$. On définit ainsi le complexe $\mathcal{C}_{rel}^\bullet(\mathcal{P})$ des cochaînes relatives.

3.2 Subdivisions barycentriques relatives, spécialisations, et Baryèmes.

Soit \mathcal{P} un faisceau prismaal sur un ensemble simplicial T , soient τ un simplexe de T , A et A' deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\tau)$ d'image τ . On appelle *joint relatif* de A et A' et on note $A *_{rel} A'$ la réunion des segments reliant un point $a \in A$ à un point $a' \in A'$ chaque fois que $e(a) = e(a')$. On a une projection $p: (A \times_T A') \times \mathbf{I} \rightarrow A *_{rel} A'$ définie par $p(a, a', v) = va + (1-v)a'$ pour $a \in A$, $a' \in A'$, $0 \leq v \leq 1$ et $e(a) = e(a')$.

Soit \mathcal{P} un faisceau prismaal de base un ensemble simplicial T , et soit τ un simplexe de T de sommets y_0, \dots, y_s . Pour tout prisme π au dessus de τ , et pour tout sommet y_j de τ , on note $b(\pi_j)$ le barycentre du prisme $\pi_j = \pi \cap e^{-1}(y_j)$. On définit l'*âme relative* de π (on dira simplement âme de π) comme le simplexe de dimension s ayant pour sommets les barycentres $b(\pi_j)$, qui sont affinement indépendants. L'âme relative de π est homéomorphe à τ .

3.2.1 Subdivision barycentrique relative.

Soit π un prisme de $\mathcal{P}(\tau)$. On définit la "subdivision barycentrique" relative de π comme suit :

A toute suite de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$ se projetant tous sur τ , on associe un sous-ensemble γ de π , joint relatif successif (ou composé) des âmes des prismes ϖ_i , $i = 0, \dots, k$. On dit que γ est un élément de la subdivision barycentrique relative de π , il est de dimension relative k . Au dessus de tout point de l'intérieur de τ , γ est un prisme de dimension k .

La subdivision barycentrique relative d'un ensemble prismaal $\mathcal{P}(\tau)$ est la réunion des subdivisions barycentriques relatives des prismes de $\mathcal{P}(\tau)$. Si γ est un élément de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau)$ et si τ' est une face de τ , l'élément $h_{\tau',\tau}(\gamma)$ est un élément de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau')$; la subdivision barycentrique d'un faisceau prismaal est donc un faisceau prismaal. En fait on a :

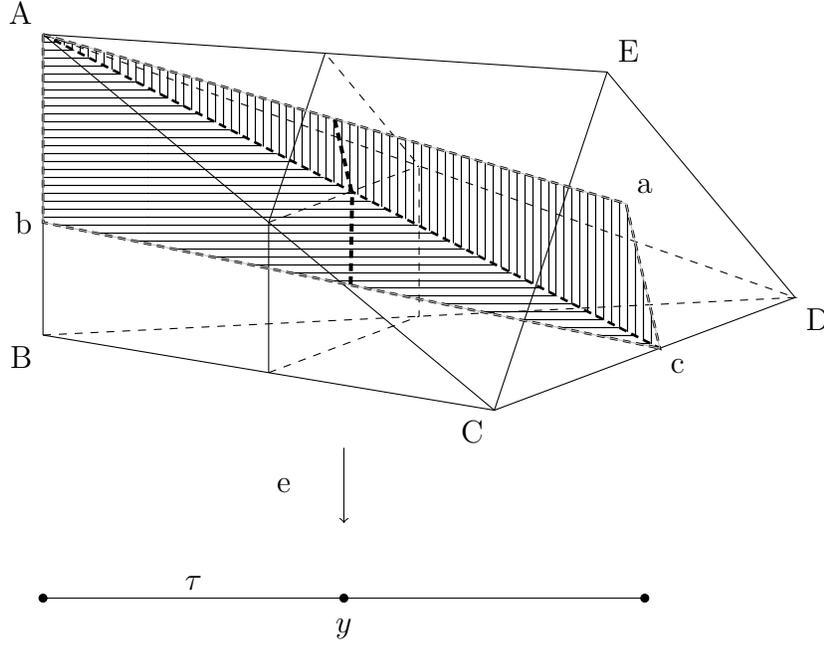


FIG. 6 – Ames et cellules relatives

Lemme 3.5. Soit \mathcal{S} un faisceau prismal et \mathcal{P} le faisceau prismal qui lui est associé comme dans le théorème 2.11. La subdivision barycentrique du faisceau prismal \mathcal{P} est le faisceau prismal associé à la subdivision barycentrique de \mathcal{S} .

OFAREM

3.2.2 Cellules duales relatives.

Soit π un prisme de $\mathcal{P}(\tau)$ de dimension relative r . On définit la cellule duale¹ relative de π comme la réunion des sous-ensembles γ de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau)$ tels que l'intersection $\gamma \cap \pi$ soit exactement l'âme de π , on la note $D(\pi)$.

La cellule duale relative de π est la réunion des sous-ensembles (fermés) γ de la subdivision barycentrique relative de $\mathcal{P}(\tau)$ ayant pour face l'âme relative de π , de dimension relative $\dim \mathcal{P}(\tau) - r$ et correspondant aux suites de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k$ pour lesquelles $\varpi_0 = \pi$ et ϖ_k est de dimension maximum dans $\mathcal{P}(\tau)$.

Remarque 3.6. La partie de la cellule duale de ϖ_0 contenue dans un prisme π admettant ϖ_0 comme face se construit à l'aide des suites $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_i < \dots < \varpi_k$ telles que $\varpi_k = \pi$ et $\dim \varpi_{i+1} - \dim \varpi_i = 1$ pour tout i .

ABBREM

La cellule duale relative de π est aussi la réunion des joints relatifs de l'âme relative de π et des cellules duales relatives des prismes π' de dimension relative $r + 1$ contenant π dans leur bord (donc tels que $e(\pi) = e(\pi') = \tau$).

La cellule duale d'un prisme de dimension relative maximum est l'âme relative de ce prisme. Elle est de dimension relative 0. En général, si $\dim_{rel} \pi = r$, alors $\dim D(\pi) = \dim St_{\mathcal{P}(\tau)}(\pi) - r$ et donc $\dim_{rel} D(\pi) = \dim St_{\mathcal{P}(\tau)}(\pi) - \dim \pi$.

¹Le terme "cellule duale" est ici employé abusivement, en fait ce sont bien des cellules si la fibre type F_τ est une variété topologique lisse.

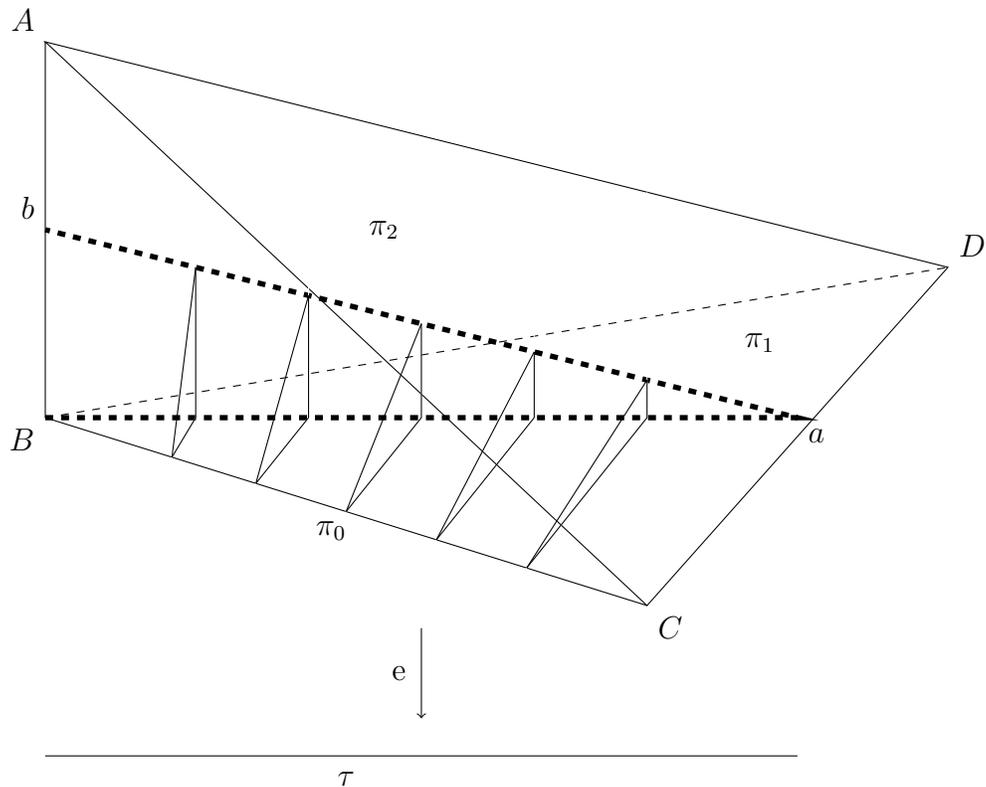
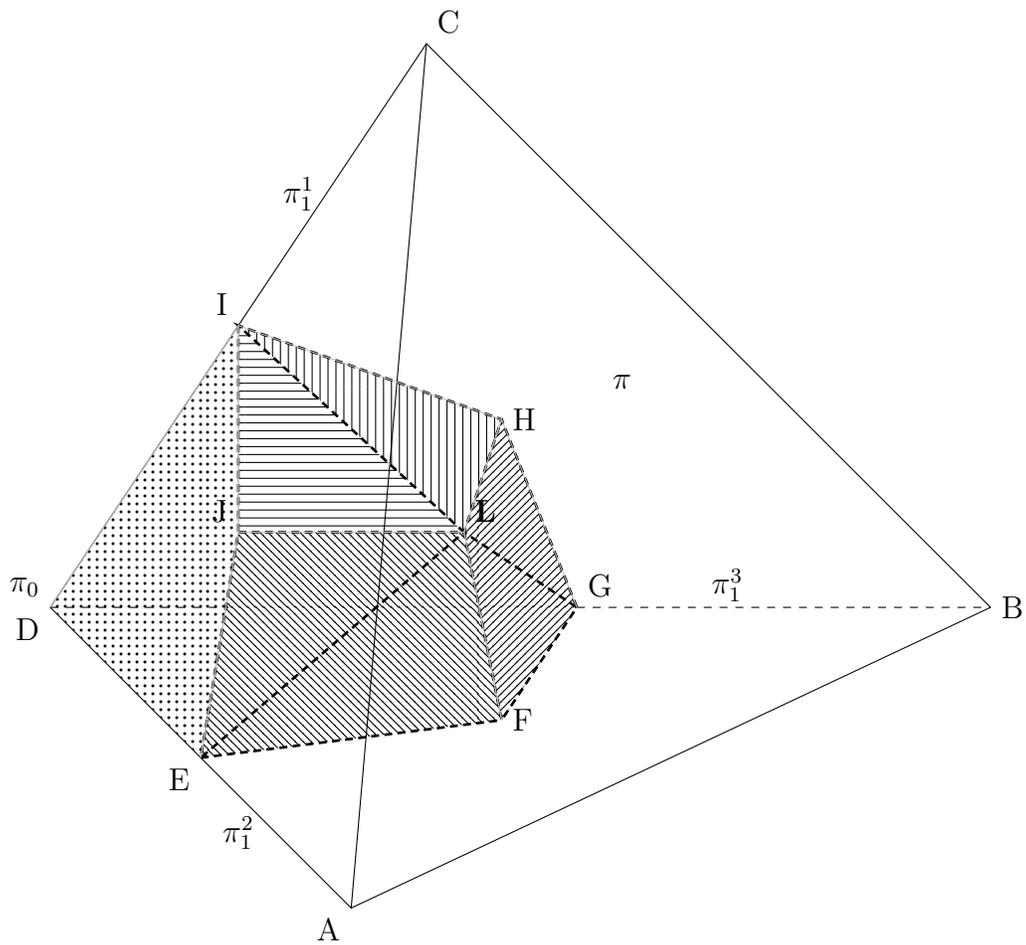


FIG. 7 – Joint relatif

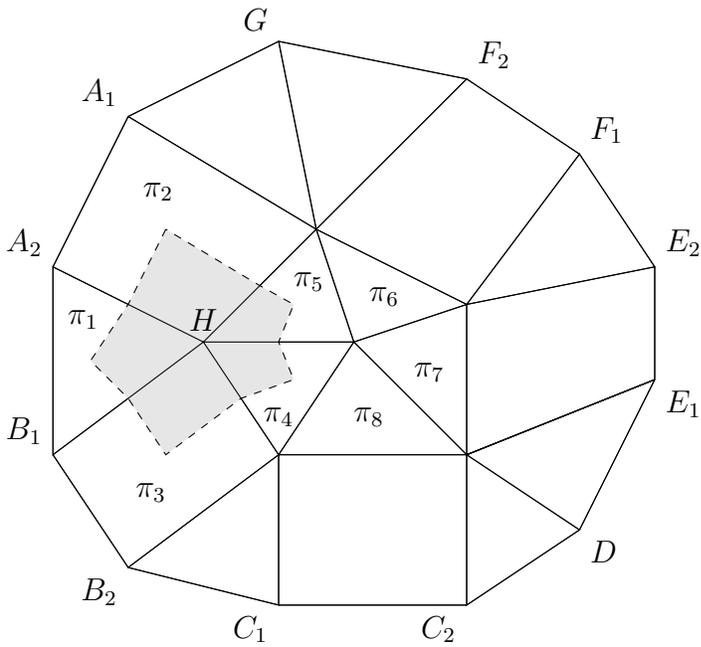
Le sous-ensemble de la subdivision barycentrique relative de π , correspondant à la suite $\varpi_0 = BC < \varpi_1 = BCD < \varpi_2 = ABCD = \pi$ est le joint relatif de BC (âme de ϖ_0), Ba (âme de ϖ_1) et ba (âme de ϖ_2), sa fibre au dessus d'un point générique de τ est un triangle. Le baryème $b(\varpi_0, \varpi_2)$ est le tétraèdre $BbCa$, réunion de l'ensemble précédent et de celui correspondant à la suite $\varpi_0 = BC < \varpi'_1 = BCA < \varpi_2 = ABCD = \pi$.



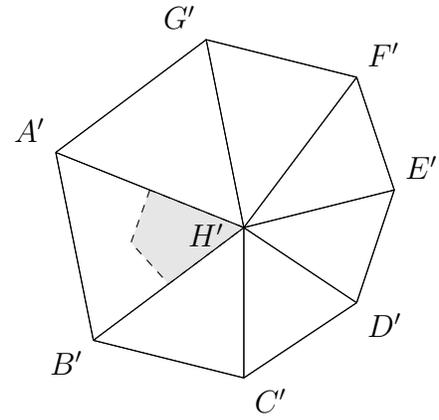
τ

FIG. 8 – Cellule relative

La cellule duale relative de ϖ_0 est la réunion des sous-ensembles γ correspondant aux suites de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \varpi_2 < \varpi_3$ (figure faite dans le cas absolu, par commodité du dessin). Le bord du baryème $b(\varpi_0, \pi)$ est la réunion des baryèmes $b(\varpi_1^i, \pi)$ où ϖ_1^i parcourt les faces de π contenant ϖ_0 comme face de codimension 1.



Fibre de \mathcal{P} au dessus de $y \in \tau$,



Fibre de \mathcal{P} au dessus de $y' \in \tau'$

FIG. 9 – \mathcal{S}_f et \mathcal{P}_f au dessus de τ

Comme expliqué dans la figure 2, et avec les fibres ci-dessus, les prismes π_2 et π_3 se spécialisent en $A'H'$ et $B'H'$ respectivement, les prismes π_4 à π_8 dégèrent en H' . L'image de la cellule duale de H par $h_{\tau, \tau'}$ n'est pas la cellule duale de $H' = h_{\tau, \tau'}(H)$. Par contre, les baryèmes vérifient la proposition 3.15 ci-dessous.

L'exemple de la figure 3.2.2, qui se comprend à l'aide de la figure 2, montre que la formation du dual ne commute pas avec la spécialisation. Dans le cas où \mathcal{P} est le faisceau prismaal \mathcal{S}_f et où $\mathcal{P}(\tau)$ est constitué de 3-simplexes se projetant sur le 1-simplexe τ , la fibre au dessus d'un point y de τ peut être un 2-simplexe se spécialisant (au dessus de τ') en un 2-simplexe ou un sommet, ou un quadrilatère (prisme) se spécialisant en un 1-simplexe.

3.3 Baryèmes

Pour pallier à cet inconvénient, l'exemple de la figure 3.2.2 suggère d'introduire la notion de *baryème* qui est intuitivement la portion d'une cellule duale qui est contenue dans un prisme donné.

OHZREM

Définition 3.7. Etant donné un couple (π_0, π) de prismes de $\mathcal{P}(\tau)$ ayant tous deux pour image τ et tels que $\pi_0 < \pi$, on appelle *baryème associé à (π_0, π)* , et on note $b(\pi_0, \pi)$, la réunion des sous-ensembles de la subdivision barycentrique relative de π qui correspondent aux suites $\pi_0 = \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$ telles que $\dim \varpi_{i+1} - \dim \varpi_i = 1$ pour tout i .

C'est bien la portion de la cellule duale relative de π_0 qui est contenue dans π . Etant donné un baryème $b(\pi_0, \pi)$, toute suite de prismes incidents $\pi_0 = \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_l < \dots < \varpi_k = \pi$ se spécialise, au dessus des sommets y_j de τ en une suite

$$(*, j) \quad \pi_{0,j} = \varpi_{0,j} < \varpi_{1,j} < \dots < \varpi_{l,j} < \dots < \varpi_{k,j} = \pi_j$$

dans laquelle certaines inclusions sont des égalités. Pour y_j , i.e. j fixé, soit K_j le nombre de suites possibles $(*, j)$ pour lesquelles les prismes $\varpi_{l,j}$ sont distincts et de codimensions successives 1 (c'est-à-dire que $\dim \varpi_{l+1,j} - \dim \varpi_{l,j} = 1$). Dans ce cas, les barycentres des prismes $\varpi_{l,j}$ engendrent un simplexe de dimension $k_j = \dim(\pi_j) - \dim(\pi_{0,j})$. Ce simplexe est l'un des simplexes composante de la spécialisation de $b(\pi_0, \pi)$ à y_j , on le note β_{j,k_j} avec $k_j \in K_j$.

Dans le cas du faisceau prismaal \mathcal{S}_f on peut alors exprimer le baryème $b(\pi_0, \pi)$ comme réunion de simplexes. En effet, soit π un simplexe situé au dessus de τ , on note π_j la restriction de π au dessus du sommet y_j de τ et k_j sa dimension. Soit π' une face de π située au dessus de τ , on note π'_j la restriction de π' au dessus du sommet y_j de τ et k'_j sa dimension. On a $\sum_{j=0}^s k_j = k - s$. La donnée d'une suite $\pi' = \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_l < \dots < \varpi_k = \pi$ de faces de π telles que $\dim \varpi_{j+1} - \dim \varpi_j = 1$ pour tout j équivaut au choix d'une suite de $(k_0 - k'_0) + \dots + (k_s - k'_s)$ sommets, puisque les sommets de π' sont déjà fixés au dessus de chaque sommet y_j . Il y a donc $(k_0 + \dots + k_s - (k'_0 + \dots + k'_s))!$ telles suites. En fait, plusieurs suites peuvent donner lieu aux mêmes simplexes β_{j,k_j} puisque ces derniers ne sont déterminés que par l'ordre dans lequel sont choisis les sommets de π_j . Il y a donc, pour chaque j , et toujours pour π_0 fixé, $(k_j - k'_j)!$ simplexes β_{j,k_j} possibles (ce sont des simplexes de la subdivision barycentrique de π_j). En tout, on obtient $(k_0 - k'_0)! \times \dots \times (k_s - k'_s)!$ possibilités de $(s + 1)$ -uples $\beta_{0,k_0}, \dots, \beta_{j,k_j}, \dots, \beta_{s,k_s}$ et chacun de ces $(s + 1)$ -uples donne lieu à un simplexe $\beta_{0,k_0} * \dots * \beta_{j,k_j} * \dots * \beta_{s,k_s}$ du baryème $b(\pi_0, \pi)$. En notant \mathcal{S} l'ensemble des permutations de $(k_0 + \dots + k_s - (k'_0 + \dots + k'_s))$ éléments, ne tenant compte que des ordres des $k_0 - k'_0$ premiers, puis des $k_1 - k'_1$ suivants, etc..., on a donc :

$$b(\pi_0, \pi) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} (\beta_{0,k_0} * \dots * \beta_{j,k_j} * \dots * \beta_{s,k_s}).$$

Dans le cas du faisceau prismal \mathcal{P}_f , tous les $\bigcup_{k_j \in K_j} \beta_{j,k_j}$, pour $j = 0, \dots, s$, sont isomorphes à un ensemble B et $b(\pi_0, \pi)$ est $B \times \tau$.

D'autre part, on a

$$\dim b(\pi_0, \pi) = \dim_{rel} \pi - \dim_{rel} \pi_0 = \dim \pi - \dim \pi_0.$$

Proposition 3.8. *Le bord d'un baryème $b(\pi_0, \pi)$ est réunion des baryèmes $b(\pi', \pi)$, où π' parcourt les faces de π contenant π_0 comme face de codimension 1.* BOBARY

Démonstration. Le bord de la cellule duale $D(\pi_0)$ de π_0 est réunion des baryèmes associés aux couples (π', π) pour lesquels π' et π ont même image, $\pi' < \pi$ et π' contient π_0 comme face de codimension 1. Le résultat est une conséquence de la remarque 3.6.

Remarquons que le bord d'un baryème est ensemblistement la partie du bord topologique de ce baryème qui n'est contenue dans aucune face stricte de π . La figure 6, bien que faite dans le cas absolu, illustre cette proposition. On peut donc définir le bord orienté d'un baryème orienté comme la somme des baryèmes précédents, chacun étant muni de l'orientation induite par celle de $b(\pi_0, \pi)$. \square

Si π est un prisme d'un faisceau prismal orienté, tous les baryèmes sont naturellement orientés comme fragments du bord des cellules duales, et en particulier le bord d'un baryème est naturellement orienté.

Notons $B_k(\tau)$ le groupe libre engendré par les baryèmes orientés de dimension relative k de $\mathcal{P}(\tau)$. On a alors :

Proposition 3.9. *Les groupes libres $B_k(\tau)$, munis du morphisme bord, forment un complexe.* GROUPI

Démonstration. Reprenons les notations de la proposition 3.8 ; le bord de chacun des baryèmes $b(\pi', \pi)$ apparaissant dans le bord de $b(\pi_0, \pi)$ est réunion des baryèmes $b(\pi'', \pi)$, où π'' parcourt les faces de codimension 2 de π contenues dans π' comme face de codimension 1. Pour chaque couple π'', π_0 , il a exactement deux prismes π' tels que $\pi'' < \pi' < \pi_0$; en effet, ou bien la codimension 2 provient d'un seul simplexe σ_i , et cela résulte des propriétés classiques des simplexes, ou bien, dans $\pi_0 = \sigma_0 \times \dots \times \sigma_i \times \dots \times \sigma_j \times \dots \times \sigma_s$, π'' est de la forme $\sigma_0 \times \dots \times \sigma'_i \times \dots \times \sigma'_j \times \dots \times \sigma_s$, où σ'_i et σ'_j sont de codimension 1 dans σ_i et σ_j respectivement, et alors les simplexes π' cherchés sont $\sigma_0 \times \dots \times \sigma_i \times \dots \times \sigma'_j \times \dots \times \sigma_s$ et $\sigma_0 \times \dots \times \sigma'_i \times \dots \times \sigma_j \times \dots \times \sigma_s$. Puisque les deux baryèmes $b(\pi', \pi)$ précédents ont la même orientation, le baryème $b(\pi'', \pi)$ apparaît dans leur bord avec des orientations opposées, ce qui prouve le résultat. \square

Remarque 3.10. Si τ' est une face de τ , toute suite de prismes incidents au dessus de τ' est spécialisée d'une suite de prismes incidents de même dimension relative au dessus de τ . Ceci implique que tout baryème au dessus de τ' est spécialisé d'un baryème de même dimension relative au dessus de τ . SURJ

Le lemme 3.5 implique le résultat suivant :

Lemme 3.11. *Soit $b(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma})$ un baryème de \mathcal{S}_τ et $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma}_1 < \dots < \bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}$ une des suites de prismes le représentant. Alors le baryème $b(\pi(\bar{\sigma}_0), \pi(\bar{\sigma}))$ est décrit par la suite de prismes $\pi_0 = \pi(\bar{\sigma}_0) < \pi(\bar{\sigma}_1) < \dots < \pi(\bar{\sigma}_k) = \pi$ de \mathcal{P}_τ .* LERTRP

Lemme 3.12. Soit β un prisme de dimension maximum de la cellule duale relative d'un prisme π_0 , alors β est défini par une suite de prismes incidents $\pi_0 = \varpi_0 < \dots < \varpi_k = \pi$ où π est de dimension maximum et les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $h_{\tau',\tau}(\beta)$ est un prisme de dimension maximum de la cellule duale relative d'un prisme π' de $\mathcal{P}(\tau')$,
- ii) $\dim_{rel} h_{\tau',\tau}(\varpi_i) = \dim_{rel}(\varpi_i)$ pour tout prisme ϖ_i de la suite $\varpi_0 < \dots < \varpi_k$ définissant β .
- iii) La dimension relative de $h_{\tau',\tau}(\pi)$ est égale à celle de π et le prisme $h_{\tau',\tau}(\beta)$ est linéairement isomorphe à $\beta|_{\tau'}$ et est donc un prisme de la subdivision barycentrique relative de $\pi|_{\tau'}$.

Démonstration. L'équivalence de i) et ii) résulte de ce que tout prisme de dimension maximum d'une cellule duale d'un prisme π' de $\mathcal{P}(\tau')$ admet pour face l'âme d'un prisme π_0 de dimension maximum de $\mathcal{P}(\tau')$, et inversement ; prouvons que ii) implique iii). Le prisme ϖ_0 du ii) est de la forme $\varpi_0 = h_{\tau',\tau}(\pi)$; écrivons τ comme joint de τ' et de sa face opposée τ'' . Le fait que ϖ_0 soit de dimension maximum dans $\mathcal{P}(\tau')$ implique qu'il est linéairement isomorphe à $\pi|_{\tau'}$. D'après l'égalité $\sum t_j = \dim_{rel}\pi$, le fait que $\dim_{rel}\pi|_{\tau'} = \dim_{rel}\pi$ implique que le prisme $\pi|_{\tau''}$ est homéomorphe à τ'' et que la dimension relative de $h_{\tau',\tau}(\pi)$ est égale à celle de π . Inversement, supposons que la dimension relative de $h_{\tau',\tau}(\pi)$ est égale à celle de π , le prisme $h_{\tau',\tau}(\beta)$ est linéairement isomorphe à $\beta|_{\tau'}$, et est donc un prisme de dimension maximum de la cellule duale de $h_{\tau',\tau}(\pi)$. \square

Remarque 3.13. Soit β un prisme de la subdivision barycentrique relative de π ; la construction de β par joints successifs utilise les âmes des prismes d'une suite de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$ se projetant tous sur τ , où $k = \dim_{rel}(\beta)$. Soit τ' une face de τ . Notons $c_{\tau',\tau}(\beta)$ le nombre de signes d'égalité dans la suite $h_{\tau',\tau}(\varpi_0) \leq h_{\tau',\tau}(\varpi_1) \leq \dots \leq h_{\tau',\tau}(\varpi_k) = h_{\tau',\tau}(\pi)$. On a la formule

$$c_{\tau',\tau}(\beta) = \dim_{rel}\beta - \dim_{rel}h_{\tau',\tau}(\beta).$$

Remarque 3.14. D'après le Lemme 3.12 , si la dimension relative de $h_{\tau',\tau}(\pi)$ est égale à celle de π , pour tout prisme de la subdivision barycentrique de π , on a $c_{\tau',\tau}(\beta) = 0$, et donc pour un baryème b de $\mathcal{P}(\tau)$, si $c_{\tau',\tau}(\beta)$ est nul pour un des prismes constituant b , il est nul pour tous et par conséquent l'assertion $c_{\tau',\tau}(b) = 0$ a un sens.

Proposition 3.15. Soient \mathcal{P} un faisceau prismal sur un ensemble prismal T , τ un prisme de T et τ' une face de τ . Pour tout baryème $b(\pi_0, \pi)$ de $\mathcal{P}(\tau)$, on a l'égalité

$$h_{\tau',\tau}(b(\pi_0, \pi)) = b(h_{\tau',\tau}(\pi_0), h_{\tau',\tau}(\pi))$$

et en particulier pour tout baryème b de $\mathcal{P}(\tau)$, $h_{\tau',\tau}(b)$ est un baryème de $\mathcal{P}(\tau')$.

Démonstration. En effet, soit $\pi_0 = \varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$ une des suites de prismes représentant le baryème $b(\pi_0, \pi)$, si $c_{\tau',\tau}(\pi) = 0$, la suite

$$h_{\tau',\tau}(\varpi_0), \dots, h_{\tau',\tau}(\varpi_k)$$

définit un prisme du baryème $h_{\tau',\tau}(b(\pi_0, \pi))$, et si $c_{\tau',\tau}(\pi) \neq 0$, il en est de même de la suite obtenue en identifiant les prismes qui sont égaux. \square

Corollaire 3.16. *Les groupes libres $\mathcal{B}(\tau)$ engendrés par les baryèmes des ensembles prismaux $\mathcal{P}(\tau)$ forment un faisceau $\mathcal{B}(\mathcal{P})$.*

La remarque 3.14 et la proposition 3.15 montrent :

Proposition 3.17. *Le bord des baryèmes commute à la spécialisation :*

$$d(h_{\tau',\tau}(b(\pi_1, \pi))) = h_{\tau',\tau}(db(\pi_1, \pi))$$

Les corollaires 3.9 et 3.16 et la proposition 3.17 montrent que les faisceaux de groupes libres engendrés par les baryèmes forment un complexe \mathcal{B}_\bullet de faisceaux prismaux.

L'application $h_{\tau',\tau}$ induit un morphisme de l'homologie de $\mathcal{B}_\bullet(\tau)$ dans celle de $\mathcal{B}_\bullet(\tau')$, c'est à dire un morphisme des faisceaux d'homologie.

Proposition 3.18. *a) L'homomorphisme naturel de faisceaux*

$$H_\bullet(\mathcal{B}_\bullet) \rightarrow H_\bullet(\mathcal{C}_\bullet^{rel}(\mathcal{P}))$$

est surjectif et induit un isomorphisme au dessus des prismes de dimension maximale de la base T .

b) Les faisceaux de groupes d'homologie relative $H_r(\mathcal{B}_\bullet)$ sont localement libres au sens de 3.3.

Démonstration. Prouvons a) Les baryèmes forment un système de générateurs de l'homologie relative du faisceau \mathcal{P} . En effet, le groupe engendré par les combinaisons linéaires de baryèmes a les propriétés suivantes :

- 1) Il engendre l'homologie de la fibre au dessus de tout point de l'intérieur d'un simplexe de dimension maximale ; cela résulte de la proposition 3.21, qui montre que les traces des baryèmes sur une telle fibre en forment une décomposition cellulaire. Cela prouve aussi l'isomorphisme au dessus des simplexes de dimension maximale.
- 2) Les bords des fibres spéciales sont spécialisés de bords des fibres régulières, (c'est une conséquence de la proposition 3.17).
- 3) Les cycles (au sens des baryèmes) des fibres spéciales sont spécialisés de cycles des fibres régulières. Cela résulte de la remarque 3.10, de la proposition 3.17 et de l'injectivité des $h_{\tau',\tau}$ en homologie.

Les mêmes arguments prouvent le b). □

Remarque 3.19. *a) Les prismes relatifs forment également un système de générateurs de l'homologie relative de \mathcal{P} .*

b) Le complexe de faisceaux $\mathcal{B}^\bullet = \text{Hom}(\mathcal{B}_\bullet, \mathcal{O}_T)$ a même cohomologie que le complexe des cochaînes relatives du faisceau \mathcal{P} .

Cela résulte du fait que le bord et le cobord relatifs commutent avec la spécialisation (cf 3.3 et 3.17).

3.3.1 Dualité de Poincaré relative

DUBARY

Lemme 3.20. *La cellule duale relative d'un prisme π_0 est donnée par la formule*

$$D(\pi_0) = \bigcup b(\pi_0, \pi)$$

où π parcourt l'ensemble des prismes de dimension maximum admettant π_0 comme face.

Cela résulte de la définition.

Notons F_τ la fibre type de τ , c'est-à-dire e_τ^{-1} (barycentre de τ); on a :

PROBAR

Proposition 3.21. *[Propriétés des baryèmes et des cellules duales]*

- 1) *La cellule duale relative $D(\pi)$ est transverse, dans $\mathcal{P}(\tau)$, au prisme $F_\tau \cap \pi$. En particulier, les baryèmes constituant cette cellule sont transverses à $F_\tau \cap \pi$.*
- 2) *Pour tout $y \in \mathring{\tau}$, et pour tout baryème b de $D(\pi)$, l'intersection $b \cap F_y$ est un baryème du prisme $F_y \cap \pi$ dans F_y et l'intersection $D(\pi) \cap F_y$ est la cellule duale du prisme $F_y \cap \pi$.*
- 3) *Le bord relatif de $D(\pi)$ est la réunion des cellules duales relatives des prismes π' contenant π dans leur bord et de dimension relative $r + 1$, donc une réunion de baryèmes.*

Démonstration. Les démonstrations sont analogues à celles du cas absolu (cf.[?]). Soit β un prisme de la subdivision barycentrique relative de π correspondant à la suite de prismes incidents $\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_k = \pi$; puisque les applications $h_{\tau',\tau}$ sont prismales, l'image $h_{\tau',\tau}(\beta)$ est un prisme de la subdivision barycentrique relative de $h_{\tau',\tau}(\pi)$ correspondant à la suite de prismes (éventuellement répétés) $h_{\tau',\tau}(\varpi_0) < \dots < h_{\tau',\tau}(\varpi_k) = h_{\tau',\tau}(\pi)$. \square

SPELU

Remarque 3.22. Soient τ' une face de τ et π' un prisme de $\mathcal{P}(\tau')$, alors la cellule duale relative de π' est égale à

$$D(\pi') = \bigcup h_{\tau',\tau}(D(\pi_\alpha))$$

où la somme porte sur les prismes π_α de $\mathcal{P}(\tau)$ tels que $h_{\tau',\tau}(\pi_\alpha) = \pi'$ et $\dim_{rel}\pi_\alpha = \dim_{rel}\pi'$.

Démonstration. D'après la remarque 3.20, on peut écrire

$$D(\pi') = \bigcup_{\alpha,\beta} h_{\tau',\tau}(b(\pi_\alpha, \pi_\beta))$$

où la réunion est étendue aux couples (π_α, π_β) satisfaisant $h_{\tau',\tau}(\pi_\alpha) = \pi'$, $\dim_{rel}\pi_\alpha = \dim_{rel}\pi'$, $c_{\tau',\tau}(b(\pi_\alpha, \pi_\beta)) = 0$ et π_β de dimension maximum. La proposition en résulte. \square

3.3.2 Nombres d'intersection

A chaque baryème $b(\pi_0; \pi_k)$ est associé un prisme relatif dual, le prisme $\varpi_0 = \pi_0$. Pour tout couple de prismes $\pi' < \pi$ ayant même image τ dans T que π_0 , définissons le nombre d'intersection $\langle b(\pi_0; \pi_k), \pi' \rangle_\pi$ comme valant ± 1 si et seulement si $\pi' = \pi_0$ et $\pi = \pi_k$, et 0 sinon. Il résulte directement de la définition des baryèmes que ce nombre est le nombre d'intersection au sens usuel ([Lefschetz]) de $b(\pi_0; \pi_k)(y)$ et $\pi'(y)$ dans la fibre

$\pi(y)$ pour tout $y \in \mathring{\tau}$. Pour toute chaîne relative c , et tout baryème b , on définit le nombre d'intersection

$$\langle b, c \rangle = \sum_{\pi} \langle b, c \rangle_{\pi}.$$

De plus, le nombre d'intersection se spécialise en ce sens que pour toute face $\tau' < \tau$ on a l'égalité suivante :

$$\langle b(\pi_0; \pi_k), \pi' \rangle_{\pi} = \langle h_{\tau', \tau}(b(\pi_0; \pi_k)), h_{\tau', \tau}(\pi') \rangle_{h_{\tau', \tau}(\pi)}.$$

Cela résulte de la proposition 3.15.

ILIOT

Remarque 3.23. On a l'égalité

$$\langle db(\pi_0, \pi_k), \pi' \rangle_{\pi} = \langle b(\pi_0, \pi_k), \partial_e \pi' \rangle_{\pi}. \quad (3.3)$$

Démonstration. En effet, les deux termes sont non nuls, et égaux si et seulement si π_0 est contenu dans le bord relatif de π' . \square

La définition du cobord d'une cochaîne s'étend aussitôt aux baryèmes :

IDIOT

Définition 3.24. Soit b un baryème; le cobord δb de la cochaîne b est $\delta b = \sum_i [b; b_i] b_i$, où la somme est étendue aux baryèmes b_i tels que b apparaisse dans le bord de b_i en tant que baryème, et le nombre d'incidence $[b; b_i]$ vaut ± 1 selon que les orientations de b et b_i sont ou non compatibles.

BULIOT

Théorème 3.25. [Dualité de Poincaré relative] L'application qui à une $(n - r)$ -chaîne relative c fait correspondre la r -cochaîne $b \mapsto \langle b, c \rangle$ du faisceau \mathcal{B} induit un morphisme de complexes de groupes du complexe $\mathcal{C}_{\bullet}^{rel}(\mathcal{P})$ dans le complexe $\mathcal{B}^{\bullet}(\mathcal{P})$. Ce morphisme induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. En fait, il suffit de prouver l'existence du morphisme de complexes de faisceaux, et l'isomorphisme de Poincaré des fibres générales (au dessus des points des simplexes de dimension maxima de T , (cf 3.18) impliquera le résultat, au vu de 3.15. Montrons que les cycles ont pour image des cocycles formés de baryèmes. Soit $\sum_i a_i \pi'_i$ une chaîne relative qui est un cycle relatif; l'égalité

$$\sum a_i \partial_e \pi'_i = 0$$

se vérifie en restriction au dessus de chaque simplexe de T ; nous pouvons donc supposer que toutes les chaînes ont la même image τ et que, pour tout baryème $b(\pi_0, \pi_k)$ et pour tout prisme π ayant pour image τ , on a

$$\sum a_i \langle b(\pi_0, \pi_k), \partial_e \pi'_i \rangle_{\pi} = 0.$$

Le cobord de la cochaîne associée à notre chaîne est

$$b(\pi_0, \pi_k) \mapsto \sum_i a_i \langle db(\pi_0, \pi_k), \pi'_i \rangle_{\pi}$$

et la formule 3.3 implique le résultat. La même formule implique qu'un bord relatif est envoyé sur un cobord formé de baryèmes, d'où l'existence du morphisme et la dualité de Poincaré relative.

En appliquant ce résultat au faisceau \mathcal{S}_f , on obtient la dualité de Poincaré pour ce faisceau, ce qui implique la dualité de Poincaré relative pour un morphisme sous-analytique triangulable, comme nous le verrons ci-dessous. \square

Proposition 3.26. *L'inclusion $\mathcal{B}^r(\mathcal{P}) \hookrightarrow C_{rel}^r(\mathcal{P})$ est un morphisme \mathcal{O}_T -linéaire ; le morphisme de complexes correspondant induit un isomorphisme des \mathcal{O}_T -modules de cohomologie.*

Démonstration. En effet, cette inclusion induit un isomorphisme au dessus de chaque simplexe de dimension maximum de T et est compatible aux spécialisations. \square

4 Théorème de de Rham relatif

4.1 Forme différentielle associée à un baryème.

Etant donné un prisme $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ d'image τ , nous avons défini la forme différentielle

$$\omega(\pi/\tau) = \omega(\sigma_0) \wedge \omega(\sigma_1) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s)$$

et on définit la forme différentielle $\omega(b)$ associée à un baryème b comme la somme des formes $\omega(\beta/\tau)$ associées aux prismes β le constituant.

ON EN EST ICI

On a une flèche $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \rightarrow \Omega(\mathcal{S})$ nous donnant un théorème de de Rham absolu et qu'on pourrait écrire, ici ce qu'on fait, c'est une version relative de cette flèche en divisant par τ . Le fait que cela marche pour les baryèmes découle de ce qui précède.

Soit $b(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma})$ un baryème de \mathcal{S}_τ et $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma}_1 < \cdots < \bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}$ une des suites de prismes le représentant. La suite de prismes $\pi_0 = \pi(\bar{\sigma}_0) < \pi(\bar{\sigma}_1) < \cdots < \pi(\bar{\sigma}_k) = \pi$ représente le baryème $b(\pi(\bar{\sigma}_0), \pi(\bar{\sigma}))$. La forme de Whitney relative du baryème β/τ est l'image réciproque par ψ de la forme de Whitney du baryème ...

Proposition 4.1. *L'homomorphisme $b \mapsto \omega(b)$ définit un homomorphisme de complexes de faisceaux prismaux de \mathcal{O}_T -modules $\omega^\bullet: \mathcal{B}^\bullet \rightarrow \Omega_{rel}^\bullet(\mathcal{P})$. A un baryème de dimension relative k il fait correspondre une forme différentielle de degré relatif k .*

Démonstration. Pour chaque simplexe τ de T et chaque prisme π d'image τ , on a d'après la définition de $\omega(\pi/\tau)$

$$\begin{aligned} d\omega(\pi/\tau) &= d_e\omega(\pi/\tau) = \sum_{j=0}^s (-1)^{(|\sigma_0|+\cdots+|\sigma_{j-1}|)} \omega(\sigma_0) \wedge \cdots \wedge d\omega(\sigma_j) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s) \\ &= \sum_{j=0}^s \left(\sum_{\beta_j} [\beta_j; \pi] \omega(\sigma_0) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma'_j) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s) \right) \\ &= \sum_{j=0}^s \left(\sum_{\beta_j} [\beta_j; \pi] \omega(\beta_j/\tau) \right), \end{aligned}$$

où la deuxième somme porte sur les prismes $\beta_j = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma'_j \times \cdots \times \sigma_s$ de dimension relative $k + 1$, d'image τ , admettant π pour face de codimension 1 et dont la fibre ne diffère de celle de π qu'au-dessus du sommet y_j de τ . Comme au lemme ??, $[\beta_j; \pi]$ est égal

à ± 1 selon que l'orientation de π coïncide ou non avec son orientation comme bord de β_j . D'autre part, le cobord de π en tant que baryème est précisément (voir le lemme 2.7)

$$\delta(\pi) = \sum_{j=0}^s \left(\sum_{\beta_j} [\beta_j; \pi] \beta_j \right)$$

on a donc pour tout baryème b l'égalité

$$\omega\delta(b) = d_e\omega(b) \tag{4.4}$$

et le résultat. □

IINCCSF

Proposition 4.2. *Soient b un baryème au dessus de τ et τ' une face de τ telle que la dimension relative de $h_{\tau',\tau}(b)$ soit égale à celle de b , on a :*

$$h_{\tau',\tau}^*(\omega(h_{\tau',\tau}(b)))|_{\tau'} = \omega(b)|_{\tau'}$$

Démonstration. La condition de dimension implique que $h_{\tau',\tau}(b)$ est isomorphe à $b|_{\tau'}$, d'où le résultat. □

RZFAIC

Définition 4.3. Soit ω une r -forme différentielle μ -régulière sur un faisceau prismal \mathcal{P} , l'application $\mathcal{I}(\omega)$ qui à toute chaîne relative μ -régulière c fait correspondre la fonction

$$y \mapsto \int_{c(y)} \omega|_{c(y)}$$

est un morphisme \mathcal{O}_T -linéaire de $\Omega_\mu^r(\mathcal{P})$ dans $C_{rel}^r(\mathcal{P})$. Elle définit aussi un morphisme des faisceaux correspondant.

INCOMF

Proposition 4.4. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} B^r & \xrightarrow{w^r} & \Omega_\mu^r(\mathcal{P}) \\ \downarrow \iota & \swarrow \mathcal{I} & \\ C_{rel}^r(\mathcal{P}) & & \end{array} \tag{4.5}$$

Démonstration. Cela résulte de la proposition 4.1 et de la définition de w^\bullet et de \mathcal{I} . □

4.2 Théorème de de Rham relatif

Le lemme suivant est importé de [1] ²

LEMENG

Lemme 4.5. *Sur un complexe simplicial ou prismal qui est une variété, les formes de Whitney engendrent la cohomologie des formes höldériennes.*

ISINSF

Théorème 4.6. *Les morphismes $H^*(\mathcal{I})$ et $H^*(w^\bullet)$ induits en cohomologie sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre via l'isomorphisme $H^*(\iota)$.*

Avant de donner la preuve du théorème, on montre d'abord quelques lemmes sur l'extension des formes différentielles relatives, suivant [9], page 137 :

Définition 4.7. On dit que (E, c) est un ensemble relativement étoilé au dessus d'un prisme τ de T si E est un sous-ensemble de $\tau \times \mathbf{R}^m$ muni d'une section $c: \tau \rightarrow E$ telle que pour tout $p \in E$ le segment $[p, c(\pi(p))] \subset \{\pi(p)\} \times \mathbf{R}^m$ soit dans E . On définit de même un faisceau prismalement étoilé en imposant la condition de compatibilité des sections sur les faces communes à deux simplexes de la base.

Définition 4.8. On dit qu'une forme différentielle ω sur un prisme trivial est de type vertical si elle ne contient que des différentielles de coordonnées de la fibre.

Lemme 4.9. Soient \mathcal{P} un faisceau prismalement étoilé, E un sous-ensemble relativement étoilé de $\mathcal{P}(\tau)$ dont les fibres sont ouvertes dans \mathbf{R}^m et ω une r -forme différentielle μ -régulière définie au voisinage de E . Supposons que la restriction de ω à chaque fibre soit fermée, alors il existe une $(r-1)$ -forme μ -régulière ξ au voisinage de E telle que l'on ait de $\wedge(d\xi - \omega) = 0$. De plus, si ω est de type vertical, il existe une forme ξ de type vertical vérifiant de $\wedge(d\xi - \omega) = 0$ unique à l'addition près d'une forme différentielle η telle que de $\wedge d\eta = 0$.

Démonstration. La preuve en est essentiellement la même que celle de ([9], Chap.IV, n° 25, p.136). Considérons l'application

$$g: \mathbf{R} \times \tau \times \mathbf{R}^m \rightarrow \tau \times \mathbf{R}^m$$

définie par $(t, y, p) \mapsto (y, (1-t)p \circ c(y) + tp) \in \tau \times \mathbf{R}^m$. Si $(y, p) \in E$ alors le point $g(t, y, p) \in E$ pour tout $t \in [0, 1]$ puisque E est relativement étoilé. D'après l'hypothèse d'ouverture des fibres, il existe un voisinage U de $[0, 1] \times E$ dans $\mathbf{R} \times \tau \times \mathbf{R}^m$ tel que l'on ait $g(U) \subset E$.

La forme différentielle $g^*(\omega)$ est μ -régulière sur U et on pose

$$\omega_1(y, p) = \int_{[0,1] \times \{p\}} g^*(\omega)(t, y, p) dt.$$

Alors ω_1 est μ -régulière au moins pour $\mu = h$ et $\mu \geq 1$; pour $\mu \geq 1$, cela résulte de la définition et pour $\mu = h$ de la preuve du lemme 4.5. On termine comme dans ([9], loc.cit.). Enfin, si ω est de type vertical, il est clair que ω_1 l'est aussi. \square

Lemme 4.10 (Lemme a_r). Soit ω une r -forme différentielle sur le faisceau prismalement étoilé \mathcal{P} , définie et μ -régulière au voisinage du bord relatif $\partial_e \pi$ d'un prisme π de $\mathcal{P}(\tau)$ et telle que de $\wedge d\omega = 0$. Si le prisme π est de dimension relative $r+1$, on suppose avoir pour tout $y \in \tau$ l'égalité

$$\int_{\partial_e \pi(y)} \omega = 0$$

Alors il existe une r -forme μ -régulière ω' définie près de π telle que de $\wedge(\omega - \omega') = 0$ près de $\partial_e \pi$ et vérifiant de $\wedge d\omega' = 0$.

Lemme 4.11 (Lemme b_r). Soit r un entier ≥ 1 , soient π un prisme de $\mathcal{P}(\tau)$ et ω une r -forme différentielle μ -régulière définie près de π et telle que de $\wedge d\omega = 0$. On suppose qu'il existe une $(r-1)$ -forme μ -régulière ξ près de $\partial_e \pi$ telle que l'on ait de $\wedge(\omega - d\xi) = 0$

²a mieux introduire

près de $\partial_e \pi$. Si π est de dimension relative r , on suppose de plus avoir pour tout $y \in \tau$ l'égalité

$$\int_{\partial_e \pi(y)} \xi = \int_{\pi(y)} \omega$$

Alors il existe une $(r-1)$ -forme μ -régulière ξ' près de π telle que l'on ait de $\wedge(\xi' - \xi) = 0$ près de $\partial_e \pi$ et de $\wedge(\omega - d\xi') = 0$ près de π .

Démonstration. Remarquons que si la forme différentielle ω est de type vertical, les formes ω' et ξ' construites dans les lemmes a_r et b_r le sont aussi.

Prouvons a_0 : la forme ω est alors une fonction définie au voisinage de $\partial_e \pi$ et localement constante par rapport aux coordonnées verticales. Si la dimension relative de π est ≥ 1 , les fibres $\pi(y)$ sont connexes et ω se prolonge naturellement en une fonction définie au voisinage de π et constante sur les fibres de e . Si la dimension relative de π est 0, l'intersection avec $e^{-1}(y)$ de l'ouvert où ω est définie n'est plus nécessairement connexe mais la condition imposée par la nullité de l'intégrale est exactement que la valeur de ω aux points d'intersection de $e^{-1}(y)$ avec $\partial_e \pi$ soit la même, ce qui permet à nouveau de prendre pour ω une fonction définie au voisinage de π et constante sur les fibres.

Prouvons b_r : D'après le lemme 4.9, il existe une $(r-1)$ -forme ξ' au voisinage de π telle que l'on ait $de \wedge (d\xi' - \omega) = 0$ au voisinage de π . Posons $\zeta = \xi - \xi'$; nous avons l'égalité $de \wedge d\zeta = 0$ près de $\partial_e \pi$, et si π est de dimension relative r , nous avons de plus pour $y \in \tau$ les égalités

$$\int_{\partial_e \pi(y)} \zeta = \int_{\partial_e \pi(y)} \xi - \int_{\partial_e \pi(y)} \xi' = \int_{\partial_e \pi(y)} \xi - \int_{\pi(y)} \omega = 0$$

et d'après a_{r-1} , il existe une $(r-1)$ -forme régulière ζ' définie près de π , égale à ζ près de $\partial_e \pi(y)$ et telle que $de \wedge d\zeta' = 0$ près de π . La forme $\xi' + \zeta'$ a les propriétés voulues.

Prouvons a_r : Le bord relatif du prisme $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ s'écrit $\partial_e \pi = \sum_{j=0}^s \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \partial \sigma_j \times \cdots \times \sigma_s$. Choisissons dans chaque simplexe σ_j un sommet x_j et notons σ'_j sa face opposée dans σ_j . Pour ϵ assez petit, un ϵ -voisinage U_j de $\partial \sigma_j \setminus \sigma'_j$ est un ouvert étoilé relativement à x_j qui contient $\partial \sigma'_j$. Le produit $V_j = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times \sigma_s$ est relativement étoilé pour e et d'après [9] il existe une $(r-1)$ -forme ξ_j sur V_j , μ -régulière et telle que l'on ait $de \wedge (\omega - d\xi_j) = 0$ sur V_j . Par ailleurs, appliquant le lemme b_r à la restriction de la forme ξ_j à un voisinage de $\Sigma'_j = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma'_j \times \cdots \times \sigma_s$, on obtient une $(r-1)$ -forme ξ'_j près de Σ'_j telle que $de \wedge (\xi_j - \xi'_j) = 0$ près de $\partial_e^{(j)} \Sigma'_j = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \partial \sigma'_j \times \cdots \times \sigma_s$. Si la dimension relative de π est $r+1$, il faut vérifier pour tout $y \in \tau$ l'égalité suivante :

$$\int_{\partial_e^{(j)} \Sigma'_j(y)} \xi_j = \int_{\Sigma'_j(y)} \omega$$

Or cela résulte de l'argument donné dans *loc.cit.* Cela nous donne pour chaque j une forme différentielle relative $\tilde{\xi}_j$ définie au voisinage de $\tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \partial \sigma_j \times \cdots \times \sigma_s$; la collection de ces $\tilde{\xi}_j$ définit une forme différentielle relative ξ près de $\partial_e \pi$ telle que $d\xi = \omega$ dans $\Omega^r(\mathcal{P})$. En la multipliant par une fonction de classe \mathcal{C}^∞ égale à 1 près de $\partial_e \pi$ et à 0 près de $\tau \times b$ où b est le point produit des barycentres des simplexes σ_j , on obtient une $(r-1)$ -forme relative μ -régulière ξ au voisinage de π et la forme $\omega' = d\xi$ a les propriétés voulues. \square

Lemme 4.12. *Pour tout faisceau prismal et tout entier s , le s -squelette relatif forme un faisceau prismal.*

Lemme 4.13. *Soit ω une r -forme différentielle telle que $de \wedge d\omega = 0$ et μ -régulière sur un faisceau prismal \mathcal{P} , avec $r > 0$. Soit K une $(r - 1)$ -cochaîne relative sur \mathcal{P} telle que $\mathcal{I}(\omega) = \delta K$. Alors il existe une $(r - 1)$ -forme h -régulière ξ sur \mathcal{P} telle que l'on ait*

$$de \wedge (d\xi - \omega) = 0 \text{ et } \mathcal{I}(\xi) = K$$

Démonstration. Choisissons une somme de baryèmes représentant la cochaîne K , que nous noterons encore K , bien qu'elle ne soit pas uniquement déterminée par la proposition 3.26.

Soit n la dimension relative de \mathcal{P} . Nous allons construire des $r - 1$ -formes relatives ξ_0, \dots, ξ_n sur \mathcal{P} telles que :

- a) Pour chaque entier s , la forme ξ_s est définie et μ -régulière au voisinage du s -squelette K_s de K , et elle est de type vertical ;
- b) On a $de \wedge (d\xi_s - \omega) = 0$ au voisinage de K_s , et $\xi_s = \xi_{s-1}$ au voisinage de K_{s-1} ;
- c) On a $\mathcal{I}(\xi_{r-1}) = K$.

Alors ξ_n est la forme cherchée.

Remarquons que le zéro-squelette relatif, c'est-à-dire la réunion des prismes de dimension relative 0 du faisceau prismal, est un faisceau prismal relativement étoilé.

Commençons par choisir une $r - 1$ -forme relative ξ'_0 vérifiant $de \wedge (d\xi'_0 - \omega) = 0$ au voisinage de chaque sommet de \mathcal{P} , ce qui est possible d'après le lemme 4.9. Si $r = 1$, notons L la 0-cochaîne relative (la fonction) $(y, p) \mapsto K(y, p) - \xi'_0(y, p)$ et posons $\xi_0 = \xi'_0 + L$; on a bien $\mathcal{I}(\xi_0) = K$.

Si $r > 1$, on pose $\xi_0 = \xi'_0$.

Supposons avoir construit ξ_{s-1} et montrons comment construire ξ_s ; il suffit de construire ξ_s au voisinage de chaque s -prisme relatif de K . En effet, ces constructions locales devant coïncider sur le $s - 1$ squelette relatif de K se recollent naturellement à cause de l'unicité de la primitive de type vertical donnée par le lemme 4.9.

Soit π un s -prisme relatif de K ; appliquons le lemme b_r aux formes ω restreinte à un voisinage de π d'une part et ξ_{s-1} restreinte à un voisinage de $\partial_e \pi$ d'autre part. On a $de \wedge d\omega = 0$ par l'hypothèse sur ω , et $de \wedge (\omega - d\xi_{s-1}) = 0$ au voisinage de $\partial_e \pi$ par construction de ξ_{s-1} . Enfin si $s = r$, on a l'égalité

$$\int_{\partial_e \pi(y)} \xi_{r-1} = \mathcal{I}(\xi_{r-1}) \cdot \partial_e \pi(y) = K(y, \partial_e \pi(y)) = \partial_e K(y, \pi(y)) = \mathcal{I}(\omega) \cdot \pi(y) = \int_{\pi(y)} \omega.$$

Les hypothèses du lemme b_r sont donc vérifiées, on en déduit l'existence d'une $r - 1$ -forme μ -régulière $\xi'_{s,\pi}$ au voisinage de π telle que l'on ait $de \wedge (\xi'_{s,\pi} - \xi'_{s-1}) = 0$ près de $\partial_e \pi$ et $de \wedge (\omega - d\xi'_{s,\pi}) = 0$ près de π .

Si $s \neq r - 1$, prenons pour ξ_s la μ -forme régulière ξ'_s définie au voisinage de K_s par recollement des formes $\xi'_{s,\pi}$.

Si $s = r - 1$, il faut modifier ξ'_s pour satisfaire la condition (c). Posons

$$L = K - \mathcal{I}(\xi'_s), \quad \text{et} \quad \xi_{r-1} = \xi'_{r-1} + \omega(L/\tau)$$

au voisinage de K_{r-1} .

Aucun baryème de L n'est dans K_{r-2} , et par conséquent, $\omega(L/\tau)$ est nulle au voisinage de K_{r-2} , donc $\xi_s = \xi_{s-1}$ au voisinage de K_{r-2} . Puisque $\omega(d(b)) = d(\omega(b))$ (formule (7)), et $\omega\partial_e L = 0$ au voisinage de K_{r-1} , on a

$$d\xi_{r-1} = d\xi'_{r-1} + \omega\partial_e L = \omega \quad \text{près de } K_{r-1}$$

En utilisant la proposition 4.4, on a

$$\mathcal{I}\xi_{r-1} = \mathcal{I}\xi'_{r-1} + L = K,$$

ce qui achève la construction de la suite de formes ξ_s . □

Démonstration du théorème 4.6. - a) $H^*(\mathcal{I})$ est surjectif.- Etant donnée une classe \tilde{K} de cochaînes relatives, elle est image par $H^*(\iota)$ d'un élément $b \in H^*(B^\bullet)$ qui, au dessus de chaque simplexe τ admet un représentant qui s'écrit comme combinaison $\sum a_i(y)b_i$ de baryèmes. Posons $\omega = w^\bullet(b)$, alors $d\omega = w^\bullet(db) = 0$ d'après 4.1; ω définit donc un élément de $H^*(\Omega^\bullet)$, dont l'image par $H^*(\mathcal{I})$ est b d'après la proposition 4.4.

b) $H^*(\mathcal{I})$ est injectif.- Supposons $H^*(\mathcal{I})(\omega) = 0$, et soit K la cochaîne $\mathcal{I}(\omega)$. Si ω est une 0-forme relative, la 0-cochaîne relative K est nulle donc la fonction ω , qui est constante dans les fibres puisque $df \wedge d\omega = 0$, est nulle. Si ω est une r -forme relative, avec $r > 0$, alors l'hypothèse implique qu'il existe une $r-1$ -cochaîne relative L telle que $K = \partial L$. D'après le Lemme 4.9, la classe de ω est nulle dans $H^r(\Omega^\bullet)$, d'où le résultat. □

Références

- [1] J.-P. Brasselet et B. Teissier,
- [2] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann Paris 1964.
- [3] H. Hironaka, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Pisa, Istituto Leonida Tonelli, 1973.
- [4] R.M Hardt, *Continuité locale Hölder de la tranche d'une chaîne sous-analytique par une application sous-analytique* C.R.A.S. Paris, t. 287 (27 Novembre 1978), p.993-995
- [5] M. Shiota, Piecewise linearization of subanalytic functions, *Trans. A.M.S.*, 1989.
- [6] E. Spanier, *Algebraic topology*, Princeton University Press.
- [7] Dennis Sullivan, Infinitesimal computations in topology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 47, (1977), 269-331.
- [8] B. Teissier, Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques, *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, No. 70, 1989, 169-198.
- [9] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.