

CHAPITRE DEUXIEME

T H E O R I E D U C O N T A C T

I - EXPOSANT NUMERIQUE DE CONTACT

(1.1) Rappelons les résultats obtenus dans le cas des courbes planes (cf. Chap. I § 1).

Soit X une courbe plane réduite. Le point $x \in X$ désignera pour simplifier l'origine $(0,0) = \underline{0}$ de \mathbb{C}^2 . Soit W une courbe lisse passant par x . On choisit des coordonnées (z,w) pour que W soit défini localement en x par $z=0$ et que X soit défini par :

$$f = \sum_{A,B} C_{A,B} z^A w^B.$$

On a donc une rétraction $r: U \rightarrow W \cap U$ d'un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{C}^2 sur $W \cap U$ définie par le choix des coordonnées. Enfin on a supposé (cf. Chap. I (1.2.1)) :

- a. $E_{r^{-1}(x), x}$ n'est pas inclus dans $C_{X, x}$
- b. $E_{W, x}$ est inclus dans $C_{X, x}$.

(Notons que $T_{W, x} = E_{W, x}$ et $T_{r^{-1}(x), x} = E_{r^{-1}(x), x}$).

On a alors défini l'exposant numérique de contact $d_x(W, X)$ de W avec X en x à l'aide du polygone de Newton de f :

$$d_x(W, X) = -\frac{1}{\delta}$$

où δ désigne la pente du premier côté du polygone de Newton.

Rappelons que les hypothèses a. et b. ci-dessus impliquent en particulier que dans le polygone de Newton on a un point $(0, \nu)$ correspondant au monôme $c_{\nu 0} z^\nu$, où ν est la multiplicité de f . Le premier côté du polygone de Newton est alors le côté dont une des extrémités

est $(0, v)$.

On a alors défini le contact maximal de W avec X en x (cf. Chap. I (1.4.7)). Dans ce cas les théorèmes (1.4.8) et (1.3.7) du Chapitre I montrent que :

$$[d_x(W, X)] = r$$

où r est le nombre de points infiniment voisins de x .

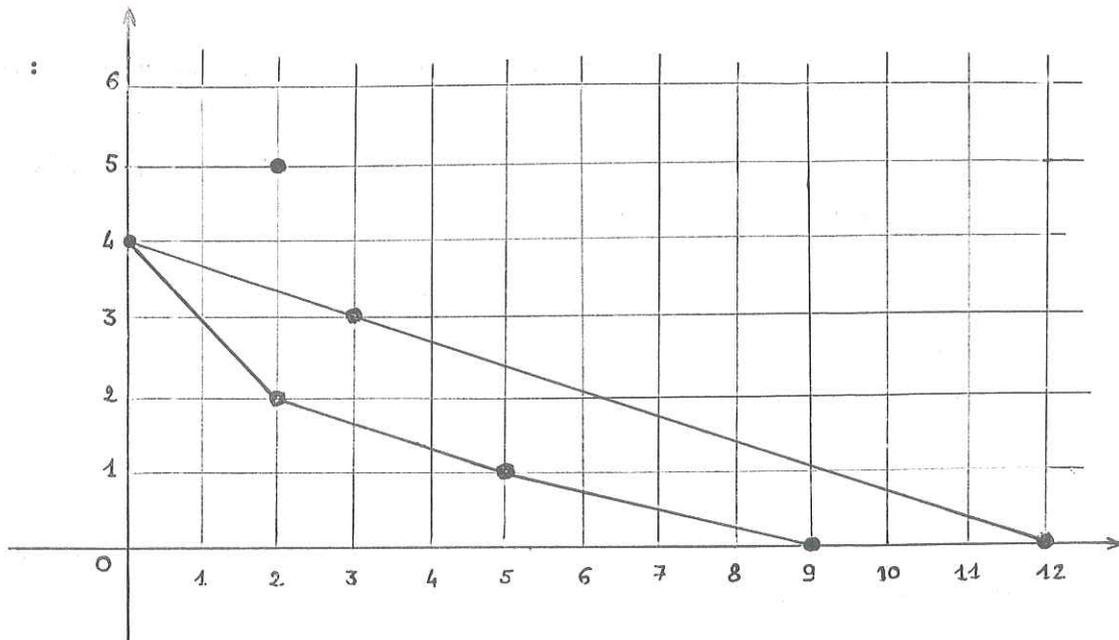
Le lemme (1.4.9) du Chapitre I nous indique comment on peut savoir que W a le contact maximal avec X en x . Ceci nous a conduit à considérer pour tout $d \in \mathbb{R}^+$ non nul :

$$\text{In}(f, d) = \sum_{A+(B/d)=v_d} C_{AB} z^A w^B$$

où $v_d = \inf \{ \mu \mid \mu = A + (B/d) \text{ et } C_{AB} \neq 0 \}$.

Un moyen visuel pour obtenir v_d est le suivant : considérons la droite Δ_d joignant le point $(0, v)$ et le point $(vd, 0)$ de \mathbb{R}^2 . Dessinons le polygone de Newton de f . Considérons dans l'ensemble des droites parallèles à Δ_d celles qui intersectent les points de $\Delta(f)$ (dont une partie de l'enveloppe convexe est le polygone de Newton. Cf. Chap. I § 1). La droite L_d parmi celles-ci, dont l'intersection avec l'axe des ordonnées a la plus petite ordonnée, a cette ordonnée égale à v_d . L'ordonnée de l'intersection d'une droite et de l'axe des ordonnées s'appellera l'ordonnée à l'origine de cette droite.

Exemple :



$$f = z^4 - 3z^2 w^2 + 27z^3 w^3 + 108z w^5 - z^5 w^2 + w^9$$

$$d = 3$$

$$v_d = \frac{8}{3}, \quad \text{in}(f, d) = -3z^2 w^2 + 108z w^5.$$

Notons $d_i = -\frac{1}{\text{pente du } i\text{-ème côté du polygone de Newton}}$.

On remarque que quand $d_1 > 1$ on a que :

$$1 \leq d < d_1 \quad \text{In}(f, d) \text{ garde la même valeur}$$

$$d_i < d < d_{i+1} \quad \text{In}(f, d) \text{ garde la même valeur.}$$

On a donc des valeurs d_i exceptionnelles. Nous verrons dans la suite qu'une telle situation se généralise : pour obtenir les d_i il suffit de regarder la variation de $\text{In}(f, d)$.

(1.2) Dans le cas général d'un espace analytique réduit X avec $x \in X$, on a considéré des modifications permises de centre Y avec $x \in Y$. Soit $f : X' \rightarrow X$ une telle modification. Soit $x' \in X'$ tel que $f(x') = x$. On a alors vu (cf. Chap. I § 5) que :

$$H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1 \Rightarrow L_{x'} \subset T_{X, x}.$$

Rappelons comment on définit $L_{x'}$.

On a : $f^{-1}(x) \simeq \text{Proj } C_{X, Y, x}$

où $C_{X, Y, x}$ est la fibre au-dessus de $x \in Y$ de $C_{X, Y} \rightarrow Y$. La platitude normale de X le long de Y entraîne :

$$C_{X, Y, x} \simeq C_{X, x} / T_{Y, x}$$

avec $T_{Y, x} \subset T_{X, x}$.

Le point $x' \in f^{-1}(x) = \text{Proj } C_{X, Y, x}$ correspond à une droite $l_{x'}$ contenue dans le cône $C_{X, Y, x}$. L'image réciproque de $l_{x'}$ dans $C_{X, x}$ par $C_{X, x} \rightarrow C_{X, Y, x}$ n'est autre que $L_{x'}$. En particulier on a :

$$\dim L_{x'} = 1 + \dim Y.$$

Notre but est d'étudier le contact de W avec X en x avec W lisse. Comme les points $x' \in f^{-1}(x)$ "aussi mauvais" que x , i.e. avec $H_{X, x}^1 = H_{X', x'}^1$, donnent $L_{x'} \subset T_{X, x}$, on ne considèrera que les W tels que $T_{W, x} = T_{X, x}$ car, comme dans le cas des courbes, on espère que $x' \in W'$ où W est le modifié de W de centre Y .

On va donc définir $d_x(W, X) \in \mathbb{Q}$ mesurant le contact de W avec X en x . Comme cela ne coûtera pas plus cher (et sera utile), on définira $d_Y(W, X)$ qui nous donnera le contact de W avec X le long de Y .

On se placera dans une situation locale où X et W sont immergés dans un espace lisse Z :

$$X \hookrightarrow Z$$

$$W \hookrightarrow Z$$

Comme dans le cas des courbes, on étudie le contact relativement à une rétraction $r: Z \rightarrow W$. Malheureusement, si l'on effectue dans W une modification quelconque, \tilde{W} n'est en général plus lisse et on ne peut pas restreindre notre étude au cas où W est lisse. Bienheureusement la rétraction r étant lisse après image réciproque, la rétraction $\tilde{r}: \tilde{Z} \rightarrow \tilde{W}$ est encore lisse bien que \tilde{W} ne soit plus lisse. Ceci nous amène à nous intéresser aux r -immersions :

Définition (1.2.1) : $i: W \rightarrow Z$ est une r -immersion si :

- a) i est une immersion
- b) il existe un ouvert U de Z contenant x et une rétraction $r: U \rightarrow U \cap W$ qui est lisse.

(1.3) Nous allons maintenant définir des objets analogues aux $C_{X,x}^{W,d}$ introduits dans le cas des courbes.

Considérons Y, V, X des espaces analytiques. Soient $i: Y \hookrightarrow V$ et $j: V \hookrightarrow X$ des immersions. On peut supposer que i et j soient des immersions fermées.

Soit d un nombre réel ≥ 1 .

Définition (1.3.1) : Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On appelle μ -ième voisinage infinitésimal de $Y \xrightarrow{j \circ i} X$ (ou, par abus de langage de Y dans X) de tropisme d dans la direction de V le sous-espace de X défini par l'Idéal cohérent

$\sum_{\substack{a+(b/d) > \mu \\ a, b \in \mathbb{N}}} \rho^a \mathfrak{Q}^b$ où ρ est l'Idéal qui définit l'immersion j et \mathfrak{Q} l'Idéal qui définit l'immersion $j \circ i$.

On remarque que cette définition est intrinsèque et ne dépend pas d'une rétraction éventuelle de Z sur W où Z contient X et $V = W \cap X$.

Exemple (1.3.2) : Cas où $Y = \{x\}$, $V = \mathbb{C}$ et $X = \mathbb{C}^2$.

$$\rho = (z)$$

$$\mathfrak{Q} = (z, w) .$$

L'idéal $\sum_{\substack{a+(b/d) > \mu \\ a, b \in \mathbb{N}}} \rho^a \mathfrak{Q}^b$ contient des éléments du type $z^a (\alpha z + \beta w)^b$

avec $a+(b/d) > \mu$ et $a, b \in \mathbb{N}$. Cet idéal contient donc $z^a z^{b-i} w^i$ pour tout i entier, $0 \leq i \leq b$. L'idéal en question coïncide donc avec l'idéal de $\mathbb{C}\{z, w\}$ engendré par les monômes $z^a w^b$ avec $a+(b/d) > \mu$. A priori on sait que cet idéal ne dépend pas du choix de la rétraction de \mathbb{C}^2 sur \mathbb{C} défini par un choix des coordonnées.

Définition (1.3.3) : On note $\text{gr} \left(\begin{array}{c} X \\ V, d \\ Y \end{array} \right)$ la \mathcal{O}_Y -algèbre :

$$\bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} \left(\begin{array}{c} \sum_{\substack{a+(b/d) \geq \mu \\ a, b \in \mathbb{N}}} \rho^a \mathfrak{Q}^b \\ \hline \sum_{\substack{a+(b/d) > \mu \\ a, b \in \mathbb{N}}} \rho^a \mathfrak{Q}^b \end{array} \right)$$

dont la structure de \mathcal{O}_Y -algèbre est induite par la multiplication dans \mathcal{O}_X .

(1.3.4) Remarquons que si $\mu \notin \mathbb{N} + \frac{1}{d} \mathbb{N}$, la composante homogène de degré μ est nulle.

Par ailleurs $\mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ est dénombrable et c'est un fermé discret de \mathbb{R} . Toute partie non vide de $\mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ a donc un plus petit élément. On peut donc faire des raisonnements par récurrence sur $\mu \in \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$.

Lemme (1.3.5) : $\text{gr}\left(\begin{smallmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ est une \mathcal{O}_Y -Algèbre de présentation finie.

Preuve : On utilise la proposition (3.5.7), car il est évident que $\text{gr}\left(\begin{smallmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ est de type fini, engendré par les éléments de degré 1 et $\frac{1}{d}$.

On peut donc définir le Specan de $\text{gr}\left(\begin{smallmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{smallmatrix}\right)$. On note :

$$C_{X,Y}^{V,d} = \text{Specan } \text{gr}\left(\begin{smallmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{smallmatrix}\right) .$$

Exemple (1.3.6) : Reprenons l'exemple (1.3.2). On obtient que $\text{gr}\left(\begin{smallmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{C}[Z, W]$ avec la graduation donnée par $\deg Z^A W^B = A + (B/d)$.

Définition (1.3.7) : On appelle $C_{X,Y}^{V,d}$ le cône normal anisotrope de X le long de Y de V-tropisme d.

(1.4) Considérons maintenant la situation suivante

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & Z \end{array}$$

où les différentes flèches sont des immersions. On notera

$$\boxed{C_{X,Y}^{W,d} = C_{X,Y}^{W \cap X, d}} .$$

On a un épimorphisme :

$$\text{gr} \begin{pmatrix} Z \\ W, d \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \text{gr} \begin{pmatrix} X \\ W \cap X, d \\ Y \end{pmatrix}$$

qui donne l'immersion $C_{X,Y}^{W,d} \hookrightarrow C_{Z,Y}^{W,d}$.

On va chercher à démontrer un théorème analogue au résultat énoncé à la fin de (1.1) du présent chapitre.

Théorème (1.4.1) : Soit $W \rightarrow Z$ une r -immersion (cf. (1.2.1)). Soient $Y \hookrightarrow X$, $X \hookrightarrow Z$, $Y \hookrightarrow W$ des immersions. Il existe une suite finie $d_0 = 1 < d_1 < \dots < d_s < \infty = d_{s+1}$ d'éléments de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ tels que :

pour d , $d_i < d < d_{i+1}$, $C_{X,Y}^{W,d}$ soit indépendant de d ;

et, en notant $C_{X,Y}^{W,d} = C_{i+1}$ si $d_i < d < d_{i+1}$, les cônes $C_{X,Y}^{W,d}$ et C_j sont tous distincts et il n'y a entre eux aucune inclusion non triviale.

Avant d'indiquer comment on démontre ce théorème, on va commencer par donner un sens à l'expression " $C_{X,Y}^{W,d}$ ne dépend pas de d quand $d_i < d < d_{i+1}$ ".

Pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme (1.4.2) : Soit $W \xrightarrow{j} Z$ une r -immersion, $Y \xrightarrow{i} W$ une immersion. Soient \mathcal{P} l'idéal qui définit j et \mathcal{Q} l'idéal qui définit i . On a alors :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : \mathcal{P}^i \cap \mathcal{Q}^{i+j} = \mathcal{P}^i \cdot \mathcal{Q}^j.$$

Preuve : On a "localement" $Z = W \times \mathbb{C}^r$, i.e. il faut entendre par là que, pour tout $x \in W$, il existe un voisinage ouvert U de $j(x)$ dans Z , un voisinage ouvert V de x dans W , un voisinage ouvert W de 0 dans \mathbb{C}^r tel que $U = V \times W$. Pour établir notre énoncé, il suffit de le démontrer dans le complété $\hat{\mathcal{O}}_{Z,x}$, car $\hat{\mathcal{O}}_{Z,x}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Or :

$$\hat{\mathcal{O}}_{Z,x} = \hat{\mathcal{O}}_{W,x}[[Z_1, \dots, Z_r]] .$$

On remarque alors que si \hat{F} désigne l'image de $\hat{\mathcal{Q}}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ on a :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} + F .$$

Ce qui permet de conclure aisément.

On remarque alors :

Lemme (1.4.3) : Pour $d > 1$ on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_Y -algèbres :

$$\text{gr} \begin{pmatrix} Z \\ W, d \\ Y \end{pmatrix} \xrightarrow{\cong} \text{gr}_Y(\text{gr}_W Z)$$

qui n'est pas un isomorphisme des structures graduées.

Pour $d = 1$, on a un isomorphisme canonique :

$$\text{gr} \begin{pmatrix} Z \\ W, 1 \\ Y \end{pmatrix} \xrightarrow{i_1} \text{gr}_Y Z$$

et $\text{gr}_Y Z$ n'est pas canoniquement isomorphe à $\text{gr}_Y(\text{gr}_W Z)$.

Nous allons indiquer comment on construit i_d quand $d > 1$ et i_1 .

Si $\mu \in \mathbb{R}^+$, on note :

$$G_\mu = \frac{\sum_{a+(b/d) \geq \mu} \rho^a \mathcal{Q}^b}{\sum_{a+(b/d) > \mu} \rho^a \mathcal{Q}^b}$$

où ρ est l'Idéal qui définit $W \hookrightarrow Z$ et \mathcal{Q} l'Idéal qui définit $Y \hookrightarrow W \hookrightarrow Z$.

Pour $i \in \mathbb{N}$ on note

$$G_{\mu, i} = \rho^i \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)} + \frac{\sum_{a+(b/d) > \mu} \rho^a \mathcal{Q}^b}{\sum_{a+(b/d) > \mu} \rho^a \mathcal{Q}^b}$$

où $\bar{\alpha}(\mu, i) = \inf \{ j \in \mathbb{N} \mid i + j/d \geq \mu \}$.

$G_{\mu, i}$ est donc un sous-Module de G_μ . De plus $G_{\mu, i} = 0$ si $\bar{\alpha}(\mu, i) \neq d(\mu - i)$ et :

$$G_\mu = \bigoplus_i G_{\mu, i}.$$

Or si $G_{\mu, i} \neq 0$, on a :

$$G_{\mu, i} \approx \text{gr}_Y^{\bar{\alpha}(\mu, i)}(\text{gr}_W^i(Z)).$$

En effet on a les épimorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \rho^i \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)} & \longrightarrow & G_{\mu, i} \\ \downarrow & & \\ \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)} \rho^i / \rho^{i+1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)+1} \rho^i / \rho^{i+1} \end{array}$$

Or $\rho^i/\rho^{i+1} = \mathcal{O}_W^i[Z]$, qui est l'ensemble des polynômes homogènes en z à coefficients dans \mathcal{O}_W et de degré i .

Considérons $\xi \in G_{\mu, i}$ et un antécédent f de ξ par $\rho^i \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)} \rightarrow G_{\mu, i}$. On a :

$$f = \sum f_A Z^A$$

car $\hat{\mathcal{O}}_{Z, X} = \hat{\mathcal{O}}_{W, X}[[Z]]$ où Z est une multivariable. L'image de f dans $\mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)} \rho^i/\rho^{i+1} / \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}(\mu, i)+1} \rho^i/\rho^{i+1}$ est $\sum_{|A|=i} \bar{f}_A z^A$ avec $\bar{f}_A \in F^{\bar{\alpha}(\mu, i)} / F^{\bar{\alpha}(\mu, i)+1}$, où F est l'image de $\hat{\mathcal{Q}}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{W, X}$. Il est clair que la correspondance $\xi \mapsto \sum_{|A|=i} \bar{f}_A z^A$ ne dépend pas du choix de f ; il reste à montrer que c'est bien un isomorphisme.

On définit alors :

$$\text{In}_Y(X, Z)_{W, d} = \text{Ker} \left(\text{gr} \begin{pmatrix} Z \\ W, d \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \text{gr} \begin{pmatrix} X \\ W \cap X, d \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

et on obtient que :

- $i_d(\text{in}_Y(X, Z)_{W, d})$ est engendré par les $\text{in}_Y(f, d)$ où $f \in J$ idéal qui définit X dans Z . Si

$$f = \sum f_A z^A$$

alors on note : $v_Y(f, d) = \inf \left(|A| + \frac{v_Y(f_A)}{d} \right)$

- et :

$$\text{in}_Y(f, d) = \sum_{|A| + v_Y(f_A)/d = v_Y(f, d)} \left(\text{cl } f_A \text{ mod. } \left(F^{v_Y(f_A)+1} \right) \right) z^A.$$

L'expression $C_{X,Y}^{W,d}$ ne dépend pas de d , $d_i < d < d_{i+1}$ signifie donc que $i_d(\text{In}_Y(X,Z)_{W,d})$ ne dépend pas de d , $d_i < d < d_{i+1}$.

Nous indiquons maintenant comment se démontre le théorème (1.4.1). La démonstration résulte des lemmes suivants :

Lemme (1.4.4) : Soient $1 < d_1 \leq d \leq d_2$. Si

$$\text{In}_Y(X,Z)_{W,d_2} \subset \text{In}_Y(X,Z)_{W,d_1}$$

alors $\text{In}_Y(X,Z)_{W,d_1} \supset \text{In}_Y(X,Z)_{W,d} \supset \text{In}_Y(X,Z)_{W,d_2}$. On note $\text{In}_Y(X,Z)_{W,d}$ au lieu de $i_d(\text{In}_Y(X,Z)_{W,d})$.

Lemme (1.4.5) : Soit d irrationnel, $1 < d \leq \infty$, il existe alors d' , $d' < d$ tel que, pour tout δ , $d' \leq \delta \leq d$:

$$\text{In}_Y(X,Z)_{W,\delta} = \text{In}_Y(X,Z)_{W,d}.$$

Lemme (1.4.6) : Soit d avec $1 < d < \infty$, il existe $d' < d$ tel que, pour tout δ , $d' \leq \delta < d$, on ait :

$$\text{In}_Y(X,Z)_{W,\delta} = \text{In}_Y(X,Z)_{W,d'}.$$

Le théorème (1.4.1) résulte immédiatement de ces lemmes. Car soit I un $\text{In}_Y(X,Z)_{W,\bar{d}}$ pour un \bar{d} donné. Soit :

$$E_I = \{d \mid \text{In}_Y(X,Z)_{W,d} = I\}.$$

Alors nécessairement E_I est un intervalle (a, b) . Donc à tout idéal I de $\mathbb{C}[Z, W]$ qui apparaît comme $\text{In}_Y(X, Z)_{W, \bar{d}}$ effectivement on fait correspondre un nombre réel a_I . Soit a_∞ celui qui correspond à I_∞ ; si on avait une infinité de I , on aurait une infinité de $1 \leq a_I \leq a_\infty$. On aurait donc un point d'accumulation pour le a_I , ce qui serait contradictoire d'après (1.4.6). On a donc un nombre fini de a_I qui sont nécessairement rationnels d'après (1.4.5).

Les lemmes précédents se démontrent à l'aide du :

Lemme (1.4.7) : Soit $1 < d_1 < d_2 < \infty$ si

$$\text{In}_Y(X, Z)_{W, d_2} \subset \text{In}_Y(X, Z)_{W, d_1}$$

si $M_{\alpha_0, \beta_0} = \sum_{\substack{|A| = \alpha_0 \\ \deg F_A = \beta_0}} F_A z^A \in (\text{gr}_Y W)[Z]$ appartient à $\text{In}_Y(X, Z)_{W, d_1}$, i.e.

$M_{\alpha_0, \beta_0} = \text{In}_Y(g, d_1)$ avec $g \in J$, idéal qui définit X dans Z , alors il existe $f \in J$ tel que :

- 1) $M_{\alpha_0, \beta_0} = \text{In}_Y(f, d_1)$
- 2) $v_Y(f, d_2) = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{d_2}$.

Preuve : Elle se fait par récurrence sur

$$v_2 = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{d_2} .$$

Si $v_2 = \frac{1}{d_2}$ alors $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$ et il n'y a rien à prouver.

Posons $\mu = v_Y(g, d_2)$ et supposons :

$$\mu < \alpha_0 + \frac{\beta_0}{d_2} .$$

On a que : $\text{In}_Y(\mathfrak{g}, d_2) \subset \text{In}_Y(X, Z)_{W, d_1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $M_{\alpha_1, \beta_1} \in \text{In}_Y(X, Z)_{W, d_1}$, il existe $\mathfrak{g}_1 \in J$ avec :

$$1) \quad M_{\alpha_1, \beta_1} = \text{In}_Y(\mathfrak{g}_1, d_1)$$

$$2) \quad v_Y(\mathfrak{g}_1, d_2) = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{d_2} .$$

Soit $\text{In}_Y(\mathfrak{g}, d_2) = \sum_{\substack{\text{deg } \gamma_A \\ |A| + \frac{\text{deg } \gamma_A}{d_2} = v_Y(\mathfrak{g}, d_2)}} \gamma_A Z^A$, alors on applique

ce qui précède à :

$$M_{\alpha_1, \beta_1} = \sum_{\substack{|A| = \alpha_1 \\ \text{deg } \gamma_A = \beta_1}} \gamma_A Z^A$$

où (α_1, β_1) sont définis par $\alpha_1 + \frac{\beta_1}{d_1} = \inf \left\{ |A| + \frac{\text{deg } \gamma_A}{d_1} \mid \gamma_A \neq 0 \right\}$.

Ainsi, si dans le plan, on considère l'ensemble $\Delta_Y(\mathfrak{g}, d_2)$ des points $(\text{deg } \gamma_A, |A|)$ quand $\gamma_A \neq 0$, ces points sont situés sur la droite d'équation $Y = \frac{X}{d_2} = \mu$. Considérons alors les droites parallèles à $Y + \frac{X}{d_1} = 0$ qui passent par un point de $\Delta_Y(\mathfrak{g}, d_2)$. Le point α_1, β_1 est le point de $\Delta_Y(\mathfrak{g}, d_2)$ qui est contenu dans celle de ces droites qui a la plus petite ordonnée à l'origine.

On considère $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_1$. On a :

$$v_Y(\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_1, d_2) \geq \mu .$$

Si $v_Y(g - g_1, d_2) = \mu$, alors :

$$\text{In}_Y(g - g_1, d_2) = \sum_{\substack{|\Lambda| + \frac{\deg \tilde{\gamma}_\Lambda}{d_2} = \mu}} \tilde{\gamma}_\Lambda Z^\Lambda$$

et

$$\inf \left\{ |\Lambda| + \frac{\deg \tilde{\gamma}_\Lambda}{d_1} \mid \tilde{\gamma}_\Lambda \neq 0 \right\} > \alpha_1 + \beta_1/d_1$$

donc après un nombre fini de telles opérations, on trouve un f_1 pour lequel :

$$v_Y(f_1, d_2) > \mu .$$

Nous allons faire quelques remarques sur le théorème (1.4.1).

Remarques (1.4.8) :

- 1) Il n'y a aucune inclusion non triviale entre deux quelconques des $\left\{ C_{X,Y}^{W, d_i}; C_j \right\}$ ($1 \leq i \leq s+1, 0 \leq j \leq s$).
- 2) $C_{X,Y}^{W, \infty} = C_{X,Y}^{W, d}$ pour tout $d > d_s$ (continuité à l'infini).
- 3) Regardons ce qui se passe quand d tend vers 1 et $Y = \{x\}$.

S'il existe une rétraction de $W \xrightarrow{C_j} Z$ qui soit transverse à X en x et telle qu'après identification i_d associée à cette rétraction, on ait

$$(\alpha) \quad C_{X,x}^{W, d} = C_{X,x} \quad \text{pour } d, 1 < d < d_1$$

alors cette égalité aura lieu pour toute rétraction transverse.

Remarquons que l'on peut rencontrer le cas où :

$$(\beta) \quad C_{X,x} \neq C_{X,x}^{W, d} \quad \text{pour tout } d = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0 \text{ (cf. le cas des courbes planes)}.$$

Signalons que r est une rétraction transverse à X en x si l'application $C_r : C_{X,x} \rightarrow C_{W,x}$ définie par r est plate.

On avait défini dans le cas d'un espace ambiant lisse Z que $E \hookrightarrow Z$ est transverse à X en x si :

$$H_{E \cap X, x}^{i+s} = H_{X, x}^i$$

avec $s = \text{codim}_x E$ dans Z .

On remarque que dans ce cas r est une rétraction transverse à X en x si et seulement si $r^{-1}(x)$ est transverse à X en x .

On montrera que dans le cas où l'espace ambiant est singulier la transversalité de r à X en x signifie :

$$\begin{aligned} H_{X, x}^k(v) &= \sum_i H_{X \cap r^{-1}(x), x}^{k-i} (v-i) H_{W, x}^k(i) \\ &= (H_{X \cap r^{-1}(x), x}^k * H_{W, x}^k)(v) . \end{aligned}$$

On a : $\text{gr}_x \text{gr}_W Z = \text{gr}_x W[Z]$.

Notons \bar{N} l'idéal maximal de $\text{gr}_x W$:

$$\bar{N} = \bigoplus_{i>0} \text{gr}_x^i W .$$

Cet idéal définit $\{x\} \hookrightarrow C_{W, x}$.

Soit :

$$\text{In}_x(X, Z) = \{ \text{In}_x f, f \in J \text{ idéal qui définit } X \text{ dans } Z \} .$$

Alors :

Lemme (1.4.9) : La rétraction r de la r -immersion $j: W \hookrightarrow Z$ est transverse à X en x si et seulement si pour tout $p \in N$:

$$\bar{N}^p \cap \text{In}_x(X, Z) = \bar{N}^p \cdot \text{In}_x(X, Z) .$$

Preuve : Supposons que r soit transverse à X en x .

Rappelons le lemme bien connu :

Lemme : Soit A un anneau noëthérien, M un A -module plat, alors l'homomorphisme canonique

$$M/IM \otimes_{A/I} \text{gr}_I A \rightarrow \text{gr}_I M$$

est un isomorphisme A/I -linéaire.

(Ce lemme a une réciproque si A est local noëthérien :

Soit A un anneau local noëthérien, M un A -module de type fini si I est contenu dans l'idéal maximal de A et si M/IM est un A/I -module plat, alors, si l'homomorphisme ci-dessus est un isomorphisme, M est un A -module plat).

Comme le rédacteur va partir et que le conférencier a eu la flemme de finir la preuve, considérée comme "standard", nous laissons au lecteur le soin de compléter la preuve de ce lemme.

Le lemme précédent nous donne que l'homomorphisme canonique :

$$(\text{In}_x(X, Z) + \bar{N} \text{gr}_x Z) \otimes_{\mathbb{C}} \text{gr}_x W \xrightarrow{\sigma} \text{In}_{\bar{N}}(\text{In}_x(X, Z), \text{gr}_x Z)$$

est un isomorphisme car on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 & \uparrow & \\
 \text{gr}_x X / \bar{N} \text{gr}_x X \otimes_{\mathbb{C}} \text{gr}_x W & \xrightarrow{\sim} & \text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x X) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{gr}_x Z / \bar{N} \text{gr}_x Z \otimes_{\mathbb{C}} \text{gr}_x W & \xrightarrow{\sim} & \text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x Z) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\text{In}_x(X, Z) + \bar{N} \text{gr}_x Z) \otimes_{\mathbb{C}} \text{gr}_x W & \xrightarrow{\sigma} & \text{In}_{\bar{N}}(\text{In}_x(X, Z), \text{gr}_x Z) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

où les lignes verticales sont exactes ; les deux premières lignes sont des isomorphismes en vertu du lemme cité et de l'hypothèse et les carrés commutatifs.

On a en particulier $\text{In}_{\bar{N}}(\text{In}_x(X, Z), \text{gr}_x Z)$ est engendré par l'image de σ . Or $\text{In}_{\bar{N}}(\text{In}_x(X, Z), \text{gr}_x Z)$ est engendré par l'image des éléments de $\text{In}_x(X, Z)$, dont la valuation \bar{N} -adique est nulle.

Définition (1.4.10) : On appelle exposant numérique de contact de W avec X en x (et on le note $d_x(W, X)$) le rationnel d_1 dans le cas (α) de la remarque 3 de (1.4.8) et 1 dans le cas (β) de la même remarque.

On a que :

$d_x(W, X) > 1$ si et seulement si $C_{X, x}$ peut s'écrire sous la forme $C_{W, X} \times C$ où C est un sous-cône de $\mathbb{C}[Z]$: $C_{Z, x} = C_{W, x} \times C_{r^{-1}(x), x}$ (quand W est lisse ceci équivaut à dire $T_{W, x} \subset T_{X, x}$).

On a alors :

Proposition (1.4.11) : Soient d_0, \dots, d_{s+1} définis par (1.4.1). Soit $d_i < d < d_{i+1}$ ($i = 1, \dots, s-1$) (resp. $1 \leq d \leq d_x(W, X)$, resp. $d_s < d \leq d_{s+1} = \infty$). Alors il existe un système (f_1, \dots, f_m) d'éléments de J tels que les $\text{In}(f_k, d)$ soient indépendants de d quand $d \in]d_i, d_{i+1}[$ (resp. $d \in [1, d_x(W, X)]$, resp. $d \in]d_s, \infty[$) et engendrent $\text{In}_x(X, Z)_{W, d}$. $\text{In}_x(X, Z)_{W, d_i}$ est engendré par les $\text{In}_x(f_k, d_i)$.

(Remarquons que f_1, \dots, f_m dépend de i).

Preuve : La preuve a déjà été faite implicitement dans ce qui précède. En fait on utilise le lemme (1.4.7).

Remarque : Sous les conditions de la proposition (1.4.11), il est facile de voir que (f_1, \dots, f_m) engendrent J .

Nous allons maintenant chercher à calculer le nombre $d_x(W, X)$ (toujours sous l'hypothèse que l'immersion $W \rightarrow Z$ est une r -immersion).

Soient (f_1, \dots, f_m) des éléments de $\mathcal{O}_{Z, x}$, identifiés à $\mathcal{O}_{W, x}\{z_1, \dots, z_r\}$ par le choix d'une rétraction. On écrira $f_i = \sum f_A^i z^A$ où $f_A^i \in \mathcal{O}_{W, x}$ et où A représente un multi-indice dans \mathbb{Z}_0^r . On peut alors construire un "polygone de Newton" pour f_i , en prenant l'enveloppe convexe des points de coordonnées $(v_x(f_A^i), |A|)$ tels que $f_A^i \neq 0$ ($|A|$ représente la longueur du multi-indice A).

Lemme (1.4.12) : Si r est transverse à X en x , il existe des éléments f_1, \dots, f_m de J tels que :

- 1) la famille de $\text{in}(f_i, 1) = \text{in}_x(f_i)$ engendre $\text{In}_x(X, Z)$;
- 2) ce soit un système minimal de générateurs de $\text{In}_x(X, Z)$;
- 3) la suite d'entiers $v_i = v_x(f_i)$ ($1 \leq i \leq m$) soit croissante ;
- 4) pour tout i , le point $(0, v_i)$ est un des sommets du polygone de Newton de f_i (c'est-à-dire que dans l'écriture de f_i il y a un terme $f_A^i z^A$ avec $|A| = v_i$ et f_A^i inversible dans $\mathcal{O}_{W, x}$).

Preuve : Le lemme (1.4.9) montre que si r est transverse à X en x , on a, pour tout p , l'égalité

$$\bar{N}^p \cap \text{In}_x(X, Z) = \bar{N}^p \text{In}_x(X, Z)$$

où \bar{N} est l'idéal engendré par les éléments de degrés positifs dans $\text{gr}_x W$. Ceci entraîne que $\text{In}_x(X, Z)$ est engendré par des éléments homogènes n appartenant pas à $\bar{N} \text{gr}_x Z$. C'est en effet une conséquence de la démonstration du lemme (1.4.9) ou plus simplement d'un lemme de Nakayama gradué), d'où la propriété 4). Il est alors clair que l'on peut avoir les propriétés 2) et 3).

Soit (f_1, \dots, f_m) un système de générateurs de J vérifiant les conditions du lemme précédent : pour chacun des f_i on peut parler sans ambiguïté du premier côté de son polygone de Newton : ce sera celui qui passe par le point $(0, v_i)$. On posera $\delta_i = -1/p_i$ où p_i désigne la pente du premier polygone de Newton de f_i .

On a alors :

Proposition (1.4.13) : Sous les hypothèses précédentes, on a $d_x(W, X) \geq \inf(\delta_i)$.

Preuve : Ou $\inf(\delta_i) = 1$ et alors par définition on a toujours $d_x(W, X) \geq 1$, où bien prenons un nombre d tel que $1 < d < \inf(\delta_i)$: on a alors pour tout i l'égalité $\text{in}_x(f_i, d) = \text{in}_x(f_i, 1)$ par définition de δ_i (δ_i est le plus petit nombre d tel que $\text{in}_x(f_i, d) \neq \text{in}_x(f_i, 1)$).

Comme par hypothèse les $\text{in}_x f_i$ engendrent $\text{in}_x(X, Z)$, ceci implique que $\text{in}_x(X, Z) \subset \text{in}_x(X, Z)_{W, d}$.

On a donc l'égalité à cause du théorème (1.4.1), ce qui, par définition de $d_x(W, X)$, entraîne que $d < d_x(W, X)$.

Remarque : Toujours si r est transverse à X en x , il résulte du théorème (1.4.1) qu'il existe un système de générateurs de J tel que, pour $1 \leq d < d_x(W, X)$, $\text{in}_x(f_i, d)$ soit indépendant de d , et que l'idéal $\text{In}_x(X, Z)_{W, d}$ soit engendré par les $\text{in}_x(f_i, d)$. Pour de tels f_i on a donc $\inf(\delta_i) \geq d_x(W, X)$, donc $\inf(\delta_i) = d_x(W, X)$ d'après la proposition précédente.

Nous allons chercher un critère qui permette, à partir d'un système de générateurs de $\text{In}_x(X, Z)$, d'en trouver un qui soit tel que $\inf(\delta_i) = d_x(W, X)$.

Soit donc (f_1, \dots, f_m) un système de générateurs de J vérifiant les conditions du lemme (1.4.2), et supposons que $d_x(W, X) > \inf(\delta_i) = \delta$.

On sait, par définition des δ_i , que les $\text{in}_x(f_i, d)$ sont indépendants de d pour $1 \leq d < \delta$ et que les $\text{in}_x(f_i, \delta)$ engendrent $\text{In}_x(X, Z)_{W, \delta}$ (prop. 1.4.11). Si on pose

$$P_i = \text{in}_x(f_i, \delta) - \text{in}_x(f_i, 1),$$

on a donc que $P_i \in \text{In}_x(X, Z)$. De plus le degré en Z de P_i est strictement inférieur à v_i .

(P_i n'est non nul que si $\delta_i = \delta$).

On peut donc écrire

$$P_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k \text{in}_x(f_k, 1)$$

et même

$$P_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \text{in}_x(f_k, 1)$$

puisque P_i est d'ordre inférieur à v_i en Z et que les v_k forment une suite croissante par hypothèse.

On essaie de diviser f_i par (f_1, \dots, f_{i-1}) (i.e. de remplacer f_i par le reste de cette division) de façon à "supprimer" la relation P_i et donc à augmenter $\delta_i = \delta$.

Théorème (1.4.14) (Théorème de division) : Soient g_1, \dots, g_k des éléments de $\mathcal{O}_{W, X}\{z_1, \dots, z_r\}$ tels que

$$g_i - \sum C_A^i z^A \in M_{W, X} \mathcal{O}_{W, X}\{z\} \quad (C_A^i \in \mathbb{C})$$

(A représente un multi-indice dans \mathbb{Z}_0^r).

On pose : $v_i = \inf |A|$ tels que $C_A^i \neq 0$
 $A_i = \sup_1$ des A tels que $\begin{cases} |A| = v_i \\ C_A^i \neq 0 \end{cases}$

(1 désigne l'ordre lexicographique dans \mathbb{Z}_0^r).

Alors, pour tout $g \in \mathcal{O}_{W,x}\{z_1, \dots, z_r\} = \mathcal{O}_{W,x}\{z\}$, il existe des éléments h_1, \dots, h_k et R de $\mathcal{O}_{W,x}\{z\}$ tels que :

$$g = \sum_{i=1}^k h_i g_i + R$$

et si l'on pose $R = \sum d_A z^A$,

$$d_A = 0 \text{ pour } A \in U(A_i + \mathbb{Z}_0^r).$$

De plus on peut exiger que $v_x(h_i) \geq v_x(g) - v_x(g_i)$.

Remarques :

- 1) Le choix des A_i n'est pas canonique (il dépend en particulier de l'ordre des variables z_1, \dots, z_r).
- 2) Si on fait $i = r = 1$, on retrouve une des formes du théorème de préparation de Weierstrass (qui s'énonce généralement avec en plus w lisse).
- 3) Monique Lejeune a démontré un théorème de division analogue à celui-ci, mais plus général en ce sens qu'il permet de calculer les d_i du théorème (1.4.14) pour $i > 1$.

Nous ne montrerons pas le théorème (1.4.14) pour l'instant, mais nous allons en tirer des conséquences.

Soit $I = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ un idéal homogène de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_r]$.

Définition (1.4.15) : Soit φ un élément homogène de $I : \varphi = \sum_{|A|=d} C_A Z^A$, l'exposant privilégié de φ , noté $\exp(\varphi)$, est le \sup_1 (i.e. pour l'ordre lexicographique de \mathbb{Z}_0^r) des A tels que $C_A \neq 0$. On posera

$$\text{Exp}^r I = \cup \exp(\varphi)$$

lorsque φ parcourt l'ensemble des éléments homogènes de I .

Remarque (1.4.16) : $\text{Exp}^r I$ est un E-ensemble, c'est-à-dire que

$$\text{Exp}^r I + \mathbb{Z}_0^r = \text{Exp}^r I$$

(car si $A = \exp \varphi$ et $B \in \mathbb{Z}_0^r$, $A+B = \exp(\varphi Z^B)$).

Il est facile de voir qu'un E-ensemble possède toujours un système fini de générateurs sur \mathbb{Z}_0^r (il suffit de montrer par exemple que toute suite croissante de E-ensembles est stationnaire).

Soient maintenant f_1, \dots, f_k des éléments de $\mathcal{O}_{W,x}\{z_1, \dots, z_r\}$ vérifiant la condition 4) du lemme (1.4.12). On leur fait correspondre des éléments λ_i homogènes dans $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_r]$ en prenant les classes des $\text{in}_x(f_i, 1)$ modulo \bar{N} (idéal des éléments de degré positif de $\text{gr}_x W$). Posons

$$I = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

et

$$E = \text{Exp}^r I .$$

On a alors :

Proposition (1.4.17) : Pour tout $f \in \mathcal{O}_{W,x}\{\underline{z}\}$, il existe des éléments h_1, \dots, h_k de $\mathcal{O}_{W,x}\{\underline{z}\}$ tels que

- 1) $v_x(h_i) \geq v_x(f) - v_x(f_i)$
- 2) si $f - \sum h_i f_i = \sum C_A \underline{z}^A$ alors $C_A = 0$ pour $A \in E$.

Preuve : Soit (A_1, \dots, A_q) un système de générateurs de E . Il existe donc des $\phi_i \in I$ homogènes de degré μ_i tels que

$$\exp(\phi_i) = A_i .$$

On peut donc écrire

$$\phi_i = \sum \phi_{ik} \lambda_k$$

où ϕ_{ik} est homogène de degré $\mu_i - \nu_k$ ($\nu_k = \text{degré de } \lambda_k$).

Posons $g_i = \sum \phi_{ik} f_k$ dans $\mathcal{O}_{W,x}\{z\}$ (l'anneau $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_r]$ est inclus canoniquement dans $\mathcal{O}_{W,x}\{z\}$).

On a alors

$$\text{in}_{\mathbb{N}}(\text{in}_x g_i) = \phi_i$$

et l'on peut alors écrire

$$g_i = \phi_i + \sum_{|A| > \mu_i} C_A^i z^A + \alpha_i \quad \text{avec } \alpha_i \in M_{W,x} \cdot \mathcal{O}_{W,x}\{z\}$$

$$\text{et } C_A^i \in \mathbb{C} .$$

Appliquons le théorème de division avec les g_i :

$$f = \sum p_i g_i + R$$

avec $R = \sum C_A z^A$ et $C_A = 0$ pour $A \in U(A_i' + \mathbb{Z}_0^r)$ où $A_i' = \sup_1$ des A tels que $|A| = \mu_i$ et qui apparaissent dans le développement en Z de $g_i - \alpha_i$.
On a donc $A_i' = A_i$ par définition de $A_i = \exp(\phi_i)$ de $A_i = \exp(\phi_i)$ et donc $U(A_i' + \mathbb{Z}_0^r) = E$.

Pour montrer 2) dans la proposition, il suffit de poser

$$h_i = \sum_{j=1}^q p_j \phi_{ji} .$$

On a alors

$$\begin{aligned} v_x(h_i) &\geq \inf_j (v_x(p_j) + v_x(\phi_{ij})) \\ &\geq \inf_j (v_x(f) - \mu_j + \mu_j - v_i) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration puisque $v_i = \text{degré de } \lambda_i = v_x(f_i)$.

Toujours dans l'hypothèse d'une r -immersion $W \rightarrow Z$, soit J un idéal de $\mathcal{O}_{W,x}\{z\}$ (J est l'idéal qui définit X localement au voisinage de x). Choisissons une rétraction $r : Z \rightarrow W$.

Définition (1.4.18) :

a) Une base standard de l'idéal J est une famille (f_1, \dots, f_m) d'éléments de J telle que

- 1) la famille des $\text{in}_x(f_i)$ engendre $\text{In}_x(X, Z)$;
- 2) ce soit un système minimal de générateurs ;
- 3) la suite d'entiers $v_i = v_x(f_i)$ ($1 \leq i \leq m$) est croissante.

b) Une base standard de J est dite adaptée à la rétraction r si :

- 4) pour tout i , le point $(0, v_i)$ est un des sommets du polygone de Newton de f_i (c'est-à-dire que $\lambda_i \neq 0$, si λ_i désigne la classe de $\text{in}_x(f_i)$ modulo \bar{N}).

c) Une base standard de J est dite normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1, \dots, Z_r)$ si elle est adaptée à r et si elle vérifie la condition suivante :

$$5) \text{ posons } f_i = \sum f_{iA} z^A \text{ et } E_{i-1} = \exp(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}).$$

Alors $f_{iA} = 0$ si $A \in E_{i-1}$, ceci pour tout i , $1 \leq i \leq m$, (remarquez que $E_0 = \emptyset$).

Remarques (1.4.19) :

1) Comme on l'a déjà vu, si (f_1, \dots, f_m) forment une base standard de J , ils engendrent J .

2) Si la rétraction r est transverse à X en x , toute base standard est adaptée à r (lemme 1.4.12).

3) Si (f_1, \dots, f_m) est une base standard adaptée, on a $d_x(W, X) \geq \inf(\delta_i)$ où $\delta_i = -\frac{1}{p_i}$ et où p_i désigne la pente du premier côté du polygone de Newton de f_i (proposition 1.4.13).

Nous noterons dorénavant π l'application canonique :

$$\text{gr}_x^W[Z_1, \dots, Z_r] \rightarrow \frac{\text{gr}_x^W}{\bar{N}} [Z_1, \dots, Z_r]$$

(de sorte que $\pi(\text{in}_x(f_i)) = \lambda_i$).

Théorème (1.4.20) : Sous les mêmes hypothèses que plus haut (i.e. la rétraction r est transverse à X en x), il existe une base standard de J normalisée (par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1, \dots, Z_r)$).

Soit (g_1, \dots, g_m) une base standard adaptée à r . Nous allons procéder par récurrence et supposer qu'il existe des éléments $(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ de J tels que

$$1) \quad (\text{in}_x g_1, \dots, \text{in}_x g_{i-1}) = (\text{in}_x f_1, \dots, \text{in}_x f_{i-1}),$$

$$2) \quad v_x(f_j) = v_x(g_j) \quad \text{pour } j \leq i-1,$$

3) si $E_j = \exp(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ ($\lambda_k = \pi(\text{in}_k)$) et $f_j = \sum f_{jA} z^A$, on ait $f_{jA} = 0$ pour $A \in E_{j-1}$ (ceci pour $j = 1, \dots, i-1$).

Appliquons la proposition (1.4.17) en divisant g_i par (f_1, \dots, f_{i-1}) et notons f_i le reste de la division : on a donc

$$f_i = g_i - \sum_{j=1}^{i-1} h_j f_j$$

et la condition 3) ci-dessus est vérifiée pour f_i .

Il faut maintenant vérifier les deux premières conditions ; on a $v_x(h_j) \geq v_x(g_i) - v_x(f_j)$ pour $j \leq i-1$ d'après la proposition (1.4.17), il s'ensuit que $v_x(f_i) \geq v_x(g_i)$. Si l'on avait $v_x(f_i) > v_x(g_i)$, cela entraînerait

$$\text{in}_x(g_i) = \text{in}_x \left(\sum_{j=1}^{i-1} h_j f_j \right),$$

d'où, comme $v(h_j f_j) \geq v(g_i)$ une relation

$$\text{in}_x(g_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \overline{h_j} \text{in}_x(f_j),$$

où $\overline{h_j}$ désigne la classe de h_j modulo $M_x^{v(g_i) - v(f_j) + 1}$. Ceci est impossible, car par hypothèse de récurrence,

$$(\text{in}_x(f_1), \dots, \text{in}_x(f_{i-1})) = (\text{in}_x(g_1), \dots, \text{in}_x(g_{i-1})),$$

d'où

$$\text{in}(g_i) \in (\text{in}(g_1), \dots, \text{in}(g_{i-1})),$$

ce qui est exclu puisque, par hypothèse, les g_i forment une base standard.

On a donc

$$v_x(f_i) = v_x(g_i),$$

et par suite

$$\text{in}_x(f_i) = \text{in}_x(g_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \overline{h_j} \text{in}_x(f_j);$$

on peut ainsi continuer la récurrence, les conditions 1), 2) et 3) ci-dessus étant réalisées pour (f_1, \dots, f_i) .

Il reste à vérifier que la base standard (f_1, \dots, f_m) est adaptée à r , c'est-à-dire que

$$\pi(\text{in}_x(f_i)) = \lambda_i \neq 0.$$

Or ceci est clair car $\lambda_i = 0$ est équivalent à

$$\text{in}_x(f_i) \in \overline{N} \text{gr}_x(Z) \cap \text{In}_x(X, Z) = \overline{N} \text{In}_x(X, Z)$$

à cause de la transversalité ; or un élément d'un système minimal de générateurs de $\text{In}_x(X, Z)$ ne peut appartenir à $\overline{N} \text{In}_x(X, Z)$ à cause du "lemme de Nakayama gradué" (cf. le lemme (1.4.12)).

De tout ce qui précède le résultat tombe comme un fruit mûr.

Théorème (1.4.21) : Si (f_1, \dots, f_m) est une base standard normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{W, X}, Z_1, \dots, Z_r)$, alors

$$\delta = \inf(\delta_i) = d_x(W, X)$$

(rappelons que $\delta_i = -\frac{1}{p_i}$ où p_i est la pente du premier côté du polygone de Newton de f_i).

Preuve : On a vu (1.4.13) que $d_x(W, X) \geq \inf(\delta_i) = \delta$. Supposons que l'on ait $d_x(W, X) > \delta$, et soit i le premier indice tel que $\delta_i = \delta$.

Si δ est > 1 , on a vu au cours de la démonstration de la proposition (1.4.13) que

$$P_i = \text{in}_x(f_i, \delta) - \text{in}_x(f_i, 1) = \sum_{k=1}^{i-1} Q_k \text{in}_x(f_k, 1)$$

(avec des notations légèrement différentes et améliorées).

P_i , non nul par hypothèse, a une représentation de la forme

$$P_i = \sum^* \overline{f_{iA}} Z^A$$

où \sum^* représente la sommation étendue aux A tels que

$$|A| + v_x(f_{iA})/\delta = v_i$$

et $\overline{f_{iA}}$ est la classe de f_{iA} mod $M_{W,x}^{\delta(v_i - |A|) + 1}$ et appartient donc à $\text{gr}_x W$.

On a donc

$$\sum_A^* \overline{f_{iA}} Z^A = \sum_{k=1}^{i-1} Q_k \lambda_k$$

où $Q_k \in \text{gr}_x W[Z]$ ($\lambda_k = \text{in}_x(f_k, 1)$ car on a supposé $\delta > 1$).

Les λ_k étant des polynômes homogènes en Z , on en déduit que, pour toute valeur α de $|A|$ telle que A apparaisse dans Σ^* ,

$$(*) \quad \sum_{|A|=\alpha}^* \overline{f_{iA}} Z^A = \sum_{k=1}^{i-1} S_k \lambda_k \quad \text{où } S_k \in \text{gr}_x(W)[Z]$$

et S_k est homogène en Z .

Soit \tilde{I} l'idéal de $\text{gr}_x W[Z]$ engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ dans $\text{gr}_x W[Z]$. Si $\tilde{\varphi}$ est un polynôme homogène en Z , non nul, de \tilde{I} qui s'écrit

$$\tilde{\varphi} = \sum \tilde{\varphi}_A Z^A \quad \text{avec } \tilde{\varphi}_A \in \text{gr}_x W,$$

désignons par $\exp \tilde{\varphi}$ le plus grand exposant A pour l'ordre lexicographique de \mathbb{Z}_0^r tel que $\tilde{\varphi}_A \neq 0$ et soit $E_{i-1} = \cup \exp \tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}$ parcourt tous les éléments homogènes en Z non nuls de \tilde{I} .

P_i étant non nul, il existe un α tel que le 1er membre de (*) soit non nul. Par conséquent, si A_0 désigne son exposant privilégié $\overline{f_{iA_0}} \neq 0$ et par conséquent aussi f_{iA_0} . Pour que ceci soit contradictoire avec l'hypothèse de normalisation, il suffit de voir que $\tilde{E}_{i-1} = E_{i-1}$.

Lemme : $E_{i-1} = \tilde{E}_{i-1}$.

Il est clair que $E_{i-1} \subset \tilde{E}_{i-1}$.

Soit maintenant $\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\varphi}_k \lambda_k$ un élément homogène non nul de $\text{gr}_x(W)[Z]$. Choisissons une base $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ du \mathbb{C} -espace vectoriel $\text{gr}_x(W)$, on peut écrire $\tilde{\varphi}_k = \sum \tilde{\varphi}_{kj} e_j$ où $\tilde{\varphi}_{kj} \in \mathbb{C}$ et où $\tilde{\varphi}_{kj} = 0$, sauf pour un nombre fini d'indices j ; on a alors :

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j \in \mathcal{J}} e_j \left(\sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\varphi}_{kj} \lambda_k \right).$$

Soit

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_{kj} \lambda_k.$$

Alors $\varphi_j \in I$ et $\varphi_j \neq 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit $E_j = \exp \varphi_j$, alors $E_j \in E$ et on vérifie facilement que $E = \sup_1 E_j$.

(1.5) Nous allons interpréter la condition $d_x(W, X) = \infty$, toujours sous l'hypothèse que r est une r -immersion transverse à X en x .

Soient (f_1, \dots, f_m) des éléments de J tels que les $\text{in}(f_k, d)$ soient indépendants de d ($1 \leq d < +\infty$) et forment une base standard adaptée à r (proposition (1.4.11)).

Si on écrit

$$f_i = \sum f_{iA} z^A,$$

cela implique que δ_i est infini, donc que $f_{iA} \neq 0 \Rightarrow |A| \geq v_i$ (car le polygone de Newton de f_i a un seul côté qui est horizontal).

En particulier $f_i \in (z)^{v_i}$, donc $W \subset X$ (l'idéal de W est défini localement par les z_j) et $\text{in}_W(f_i) = \sum f_{iA} z^A$ pour $|A| = v_i$, alors que $\text{in}_x(f_i) = \overline{\sum f_{iA} z^A}$ pour $|A| = v_i$ ($\overline{f_{iA}}$ = classe de f_{iA} modulo $M_{W,x}$).

Ceci donne un isomorphisme

$$C_{x,x} \cong C_{X,W,x} \times C_{W,x},$$

la flèche de $C_{X,x}$ dans $C_{X,W,x}$ étant la flèche canonique, celle de $C_{X,x}$ dans $C_{W,x}$ celle provenant du choix de r .

Lorsque W est lisse, on reconnaît la condition de normale platitude de X en x le long de W ; on a en fait :

Lemme (1.5.1) : Si W est lisse, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) X est normalement plat en x le long de W ;
- b) $d_x(W, X) = +\infty$.

C'est évident car a) est équivalent à l'existence d'une base standard adaptée (f_1, \dots, f_m) telle que $v_W(f_i) = v_x(f_i)$.

Supposons toujours W lisse, et posons

$$f_i = \sum c_{iAB} z^A w^B.$$

Le diagramme de Newton de f_i est formellement le même que celui de la courbe C_i d'équation $\sum c_{iAB} \zeta^{|A|} \eta^{|B|}$, pourvu que deux termes de l'équation de C_i qui proviennent de deux termes différents de f_i ne s'annulent pas.

Cela revient à considérer l'intersection de l'hypersurface f_i avec un 2-plan d'équations :

$$z_1 = \lambda_2 z_2 = \dots = \lambda_r z_r$$

$$w_1 = \mu_2 w_2 = \dots = \mu_s w_s$$

$(\lambda_i \text{ et } \mu_i \in \mathbb{C})$, et à choisir les λ_i et μ_i assez "généraux" pour que de telles annulations ne se produisent pas. Un tel 2-plan sera dit générique.

Si X est une hypersurface, on voit donc que $d_x(W, X) = d_x(\tilde{W}, C)$, C et \tilde{W} étant les intersections de X et W avec un 2-plan "générique". (On peut en effet appliquer le théorème (1.4.21), car une seule équation forme toujours une base standard normalisée). Ceci donne une interprétation plus géométrique du nombre $d_x(W, X)$.

Pour illustrer ce que l'on vient de voir, nous allons donner un exemple qui montre que l'exposant de contact $d_x(W, X)$ ne marque pas la fin de nos efforts dans la recherche d'un invariant qui mesure la singularité de X en x et qui diminue par modification permise.

On va en effet considérer une modification permise de centre Y (Y lisse) contenu dans $W \cap X$ en supposant W lisse. En appelant W' (resp. X' et Z') les modifications de W (resp. X et Z) par Y , on va voir qu'il peut exister un point $x' \in W' \cap X'$ (dont l'image par la modification est x) tel que $d_{x'}(W', X') > d_x(W, X)$.

Remarque : On peut montrer que l'on a toujours $d_x(W, X) - 1 \leq d_{x'}(W', X') \leq 2d(W, X) - 1$.

Exemple (1.5.2) : X sera l'hypersurface dans \mathbb{C}^4 d'équation

$$f = z^4 + z^2 u^3 y w + y^2 w^{112},$$

W sera défini par l'équation z , Y par (z, u, w) et x sera l'origine.

X est bien normalement plat le long de Y en x car

$$v_x(f) = 4 = v_Y(f).$$

L'intersection de X avec un 2-plan "générique" est la courbe C d'équation

$$\zeta^4 + \zeta^2 \eta^5 + \eta^{114} = 0$$

(avec éventuellement des constantes qui n'ont pas d'importance).

On voit donc que $d_x(W, X) = \frac{5}{2}$.

Plaçons-nous dans une carte de la modification de centre Y donnée par

$$\begin{cases} w' = w \\ y' = y \\ z' = z/w \\ u' = u/w \end{cases} .$$

La modification de X a alors pour équation

$$f' = z'^4 + z'^2 w'^2 y' u'^3 + y'^2 w'^{108} .$$

Si on prend pour x' le point $(0, 0, 0, 0)$, on a

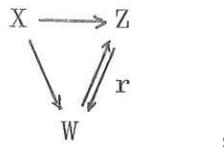
$$d_{x'}(W', X') = \frac{6}{2} > \frac{5}{2} .$$

Remarque : Les courbes intersections de X et X' par les 2-plans "génériques" ne semblent avoir aucun rapport : cela vient du fait que x' n'appartient pas à la transformée stricte de la courbe C , autrement dit x' n'est pas une point "générique" de la fibre au-dessus de x du diviseur exceptionnel de X' .

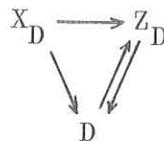
II - EXPOSANT IDEALISTE DE CONTACT

(2.1) Soient X un espace analytique plongé dans un espace lisse Z , x un point de X : nous avons considéré la fonction de Samuel $H_{X,x}$, puis le cône tangent $C_{X,x}$, et nous avons vu que les deux pouvaient rester "constants" par une modification permise de centre $Y \subset X$. D'autre part, après un choix d'une r -immersion $W \rightarrow Z$, nous avons défini le nombre $d_x(W, X)$. Mais nous avons vu à la fin du dernier paragraphe qu'il pouvait augmenter par modification permise : il faut donc regarder quelque chose de plus fin si on veut avoir un espoir de résoudre les singularités de X .

On va pour cela considérer toutes les "courbes" contenues dans W , i.e. les morphismes analytiques $h : 0 \rightarrow W$ tels que $h(0) = x$, où D désigne le disque unité de \mathbb{C} . En prenant l'image réciproque par h du diagramme



on obtient un diagramme



qui permet de définir $d_0(D, X_D)$ (exposant de contact de la courbe D avec X_D à l'origine). On posera

$$\delta_x^h(W, X) = d_0(D, X_D) .$$

On a ainsi toute une collection de nombres rationnels lorsque h varie, et c'est cette collection qui "s'améliorera" par modification permise.

Pour donner un sens précis au mot "collection" et pouvoir parler d'amélioration nous allons montrer qu'il existe un idéal cohérent \mathfrak{I} sur W et un entier b tels que, pour tout morphisme $D \xrightarrow{h} W$, on ait

$$\frac{v_o^h(\mathfrak{I})}{b} = \delta_x^h(W, X)$$

où

$$v^h(\mathfrak{I}) = v_o(\mathfrak{I} \cdot \mathcal{O}_D) .$$

On est ainsi amené à considérer que deux couples (\mathfrak{I}, b) et (\mathfrak{I}', b') sont équivalents si l'on a

$$\frac{v^h(\mathfrak{I})}{b} = \frac{v^h(\mathfrak{I}')}{b'}$$

pour tout morphisme h : c'est ce qui motive la digression qui va suivre.

(Dorénavant un morphisme $h : D \rightarrow W$ tel que $h(0) = x$ sera appelé un disque testant).

(2.2) Rappelons d'abord un théorème bien connu :

Théorème (2.2.1) (0ka) : Soit (X, \mathcal{O}) un espace analytique réduit. Il existe une unique \mathcal{O}_X algèbre de présentation finie (qui est aussi un \mathcal{O}_X -module cohérent) notée $\overline{\mathcal{O}_X}$ telle que $(\overline{\mathcal{O}_X})_x = \overline{\mathcal{O}_{X,x}}$, pour tout $x \in X$ ($\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ désigne la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans son anneau total des fractions).

On posera $\overline{X} = \text{Specan}(\overline{\mathcal{O}_X})$: \overline{X} est le normalisé de X , et il est muni d'un morphisme canonique $\overline{X} \rightarrow X$.

Nous ne saurions trop mettre en garde le lecteur contre l'illusion trop répandue que voici : pour tout espace normal (i.e. égal à sa normalisation) T et pour tout morphisme $T \rightarrow X$, il existe un morphisme unique $T \rightarrow \bar{X}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \bar{X} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

soit commutatif.

On trouve en effet facilement des exemples où le morphisme en question n'existe pas, et d'autres où il existe trop (i.e. où il n'est pas unique).

Notons F_x l'anneau total des fractions de \mathcal{O}_X .

Définition (2.2.2) : Soit \mathfrak{S} un idéal cohérent sur \mathcal{O}_X .

Un élément $h \in F_x$ est dit entier sur \mathfrak{S}_x si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée

a) il existe un entier k et des éléments $a_0 \in I_x^k, a_1 \in I_x^{k-1}, \dots, a_{k-1} \in I_x$ tels que

$$h^k + a_{k-1} h^{k-1} + \dots + a_0 = 0 ;$$

b) pour tout $\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ -module M de type fini, on a

$$hM \subset \mathfrak{S}_x M .$$

La démonstration de l'équivalence de a) et b) est laissée en exercice.

Si \mathfrak{I} est un faisceau cohérent d'idéaux sur X , on en déduit facilement qu'il existe un unique faisceau cohérent d'idéaux sur \bar{X} , noté $\bar{\mathfrak{I}}$ tel que, pour tout $x \in X$, $(\bar{\mathfrak{I}})_{\bar{x}}$ soit la clôture intégrale de l'idéal \mathfrak{I}_x dans F_x , i.e. l'ensemble des éléments de F_x entiers sur \mathfrak{I}_x . (Si $n: \bar{X} \rightarrow X$ est la normalisation, $(\bar{\mathfrak{I}})_{\bar{x}}$ désigne le germe de $\bar{\mathfrak{I}}$ en l'ensemble fini $\bar{x} = n^{-1}(x)$).

Un idéal cohérent \mathfrak{I} sur \bar{X} tel que $\mathfrak{I} = \bar{\mathfrak{I}}$ sera dit intégralement clos.

On a par exemple :

Lemme (2.2.3) : Sur un espace normal X , un idéal cohérent inversible \mathfrak{I} est intégralement clos.

\mathfrak{I} est inversible si et seulement si \mathfrak{I} est principal, engendré par un élément non diviseur de 0, pour tout $x \in X$. Choisissons $x \in X$ et supposons que \mathfrak{I}_x soit engendré par f ; soit $z \in F_x$ entier sur \mathfrak{I}_x : il existe donc un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module fidèle M tel que $zM \subset fM$, soit $\frac{z}{f}M \subset M$ ce qui implique que $\frac{z}{f} \in \mathcal{O}_{X,x}$.

Remarque (2.2.4) : Soit X un espace analytique réduit, $x \in X$. Les germes en x de fonctions méromorphes qui sont entiers sur $\mathcal{O}_{X,x}$ sont exactement les germes de fonctions méromorphes localement bornées sur X en x . On a une interprétation analogue pour la clôture intégrale d'un idéal cohérent \mathfrak{I} : si dans un voisinage U de x \mathfrak{I} est engendré par g_1, \dots, g_m , alors le germe en x d'une fonction h est entier sur \mathfrak{I}_x si et seulement si il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'on ait $|h| \leq \text{Sup } |g_i|$ sur V .

Proposition (2.2.5) : Soient W un espace analytique, normal en $x \in W$, \mathfrak{I}_1 et \mathfrak{I}_2 deux idéaux cohérents tels que $\mathfrak{I}_{1,x} \neq 0$ et $\mathfrak{I}_{2,x} \neq 0$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$1) \quad \overline{\mathfrak{I}_{1,x}} = \overline{\mathfrak{I}_{2,x}}$$

2) si on pose, pour tout entier i :

$$v(i) = \text{Sup}\{v \mid \mathfrak{I}_{1,x}^i \subset \mathfrak{I}_{2,x}^v\}$$

et

$$\mu(j) = \text{Sup}\{\mu | \mathfrak{S}_{2,x}^j \subset \mathfrak{S}_{1,x}^\mu\},$$

on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v(i)}{i} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mu(j)}{j} = 1$$

3) Pour tout disque testant $h : D \rightarrow W$ tel que $h(0) = x$, on a :

$$v^h(\mathfrak{S}_1) = v^h(\mathfrak{S}_2).$$

(Rappelons que l'on a posé $v^h(\mathfrak{S}_1) = v_o(\mathfrak{S}_1 \circ \mathcal{O}_D)$).

4) Pour tout morphisme $h : W' \rightarrow W$ tel que :

- W' soit normal ;
- il existe un voisinage V de x tel que $h|_{h^{-1}(V)}$ soit propre et surjectif ;

- $(\mathfrak{S}_1|_V)_{h^{-1}(V)} \circlearrowleft$ (ou $(\mathfrak{S}_2|_V)_{h^{-1}(V)} \circlearrowleft$) soit inversible, alors il existe un voisinage U de x tel que

$$(\mathfrak{S}_1|_U)_{g^{-1}(U)} \circlearrowleft = (\mathfrak{S}_2|_U)_{g^{-1}(U)} \circlearrowleft ;$$

5) il existe un idéal cohérent K sur X , tel que si $k : W' \rightarrow W$ est la modification de centre K , $(\mathfrak{S}_1|_U)_{k^{-1}(U)} \circlearrowleft = (\mathfrak{S}_2|_U)_{k^{-1}(U)} \circlearrowleft$, pour un voisinage U convenable de x .

Remarques (2.2.6) :

a) L'équivalence de 1) et 3) est intéressante, car 3) (qui est un critère valuatif) est une propriété ponctuelle en x alors que 1) est une propriété locale (si 1) est vraie en x , elle est vraie dans le complémentaire d'un fermé analytique, à savoir l'ensemble des points où les fibres de deux faisceaux cohérents coïncident).

b) Cette proposition montre l'unicité de la clôture intégrale d'un idéal cohérent qui satisfait à notre problème, à savoir un idéal cohérent

\mathfrak{S} tel qu'il existe un entier b avec

$$\frac{v^h(\mathfrak{S})}{b} = \delta_x^h(W, X)$$

pour tout disque testant : $D \xrightarrow{h} W$ de centre x .

Nous allons maintenant donner des indications de démonstration de la proposition (2.2.5).

1) \Rightarrow 2) : Posons $R(\mathfrak{S}_x) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{S}_x^n$ et $R(\bar{\mathfrak{S}}_x) = \bigoplus (\bar{\mathfrak{S}}_x)^n$.

$R(\bar{\mathfrak{S}}_x)$ est alors un $R(\mathfrak{S}_x)$ -module gradué de type fini, (cf. par exemple Zariski-Samuel, Commutative Algebra, Vol. II).

Il existe donc un entier N_0 tel que

$$(\bar{\mathfrak{S}}_{2,x})^{N_0+k} = \mathfrak{S}_{2,x}^k (\bar{\mathfrak{S}}_{2,x})^{N_0} \quad \text{pour } k \geq 0.$$

On a donc $\mathfrak{S}_{1,x}^{N_0+k} \subset \mathfrak{S}_{2,x}^k (\bar{\mathfrak{S}}_{2,x})^{N_0}$ d'où $v(N_0+k) \geq k$ pour $k \geq 0$ par définition de v . Ceci implique que

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{v(i)}{i} \geq 1,$$

et donc

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu(i)}{i} \geq 1$$

puisque la situation est symétrique,

D'autre part $\mathfrak{S}_{2,x}^i \subset \mathfrak{S}_{1,x}^{\mu(i)} \subset \mathfrak{S}_{2,x}^{v(\mu(i))}$ par définition de μ et de v .

On a donc $i \geq v(\mu(i)) \geq (1-\varepsilon)\mu(i)$ pour ε arbitraire et i assez grand (car $\liminf \frac{v(i)}{i} \geq 1$ est équivalent à $v(i) \geq (1-\varepsilon)i$ pour i assez grand).

2) \Rightarrow 3) : Soit $h : D \rightarrow W$ avec $h(0) = x$ tel que

$$v^h(\mathfrak{I}_1) = n_1 \quad \text{et} \quad v^h(\mathfrak{I}_2) = n_2 .$$

On a $\mathfrak{I}_1^i \subset \mathfrak{I}_2^{v(i)}$ donc $n_1 i \geq n_2 v(i)$ donc $\frac{n_1}{n_2} \geq \frac{v(i)}{i}$ quel que soit i : on a ainsi $\frac{n_1}{n_2} \geq 1$, soit $n_1 \geq n_2$, d'où $n_1 = n_2$ par symétrie.

3) \Rightarrow 4) : Cette partie de la démonstration est plus délicate. Nous allons d'abord énoncer un lemme sans démonstration :

Lemme (2.2.7) : Soient \mathfrak{I} un idéal inversible sur un espace normal W , x un point de W , h une fonction telle que $h_x \notin \mathfrak{I}_x$. Il existe alors un disque testant $g : D \rightarrow W$ avec $h(0) = x$ tel que $v^g(h_x) < v^g(\mathfrak{I}_x)$.

Soit maintenant W' un espace normal et $h : W' \rightarrow W$ un morphisme satisfaisant aux conditions de 4) ; posons $\mathfrak{I}_i^* = \mathfrak{I}_i \big|_{V \circ h^{-1}(V)}$ ($i=1,2$). Par hypothèse \mathfrak{I}_2^* est inversible.

Nous admettrons que, grâce à l'hypothèse de propreté sur h , l'inclusion $(\mathfrak{I}_{1,x'}^* \subset \mathfrak{I}_{2,x'}^*)$ pour tout $x' \in h^{-1}(x)$ implique $(\mathfrak{I}_1^* \subset \mathfrak{I}_2^*)$. Supposons donc que $\mathfrak{I}_{1,x'}^* \not\subset \mathfrak{I}_{2,x'}^*$ pour $x' \in h^{-1}(x)$: il existerait alors un élément $h_{x'} \in \mathfrak{I}_{1,x'}^*$ tel que $h_{x'} \notin \mathfrak{I}_{2,x'}^*$; on aurait ainsi d'après le lemme (2.2.7) un disque testant $g : D \rightarrow W'$ tel que $g(0) = x'$ et tel que $v^g(h_{x'}) < v^g(\mathfrak{I}_{2,x'}^*)$. Puisque $h_{x'} \in \mathfrak{I}_{1,x'}^*$, on a donc $v^g(\mathfrak{I}_{1,x'}^*) < v^g(\mathfrak{I}_{2,x'}^*)$. Or $h \circ g : D \rightarrow W$ est un disque testant de centre $h(x') = x$: on aurait donc $v^{h \circ g}(\mathfrak{I}_{1,x}) < v^{h \circ g}(\mathfrak{I}_{2,x})$ contrairement à l'hypothèse 3). On a ainsi $\mathfrak{I}_1^* \subset \mathfrak{I}_2^*$ et par symétrie $\mathfrak{I}_1^* = \mathfrak{I}_2^*$.

4) \Rightarrow 5) : La normalisation de la modification de l'idéal \mathfrak{I}_2 est la modification d'un idéal cohérent sur X : la normalisation, et le composé de deux modifications, sont en effet des modifications. Il est clair que cette modification vérifie les hypothèses de 4).

5) \Rightarrow 1) : Par hypothèse, il existe un idéal cohérent \mathcal{K} tel que, si $k : W' \rightarrow W$ est la modification de \mathcal{K} , on ait $\mathfrak{S}_1 \mathcal{O}_{W'} = \mathfrak{S}_2 \mathcal{O}_{W'}$, au moins sur l'image réciproque d'un voisinage U de x . On peut supposer que $\mathcal{K}|_U$ est engendré par un nombre fini de sections g_1, \dots, g_m . $W'|_{k^{-1}(U)}$ est alors recouvert par des ouverts V'_i tels que

$$V'_i \simeq \text{Specan } \mathcal{O}_U \left[\frac{g_1}{g_i}, \dots, \frac{\widehat{g_i}}{g_i}, \dots, \frac{g_m}{g_i} \right] .$$

Par hypothèse, $\mathfrak{S}_1 \mathcal{O}_{V'_i} = \mathfrak{S}_2 \mathcal{O}_{V'_i}$ pour $i = 1, \dots, m$. Soit $f \in \mathfrak{S}_{1,x}$: l'égalité ci-dessus implique qu'il existe des entiers μ_i tel que

$$f g_{i,x}^{\mu_i} \in \mathfrak{S}_{2,x} \mathcal{K}_x^{\mu_i} ,$$

donc

$$f \mathcal{K}_x^N \subset \mathfrak{S}_{2,x} \mathcal{K}_x^N$$

pour N assez grand.

Or \mathcal{K}_x^N est un idéal dans l'anneau $\mathcal{O}_{W,x}$ qui est intègre (car toute algèbre analytique locale et normale est intègre). \mathcal{K}_x^N est donc un $\mathcal{O}_{W,x}$ -module fidèle, ce qui implique que f est entier sur $\mathfrak{S}_{2,x}$. On a donc $\mathfrak{S}_{1,x} \subset \overline{\mathfrak{S}_{2,x}}$, d'où 1) à cause de la symétrie.

Définition (2.2.8) : Soient W un espace analytique réduit, $h : \overline{W} \rightarrow W$ sa normalisation, \mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 deux idéaux cohérents, x un point de W . On dit que $\mathfrak{S}_{1,x}$ et $\mathfrak{S}_{2,x}$ sont asymptotiquement équivalents, et l'on note $\mathfrak{S}_{1,x} \simeq \mathfrak{S}_{2,x}$ si, quel que soit $x' \in h^{-1}(x)$, on a $(\mathfrak{S}_1 \mathcal{O}_{\overline{W}})_{x'} = (\mathfrak{S}_2 \mathcal{O}_{\overline{W}})_{x'}$.

Il est alors facile de voir que la proposition (2.2.5) reste vraie sous la seule hypothèse que W est réduit, à condition de remplacer la condition 1) par la condition $\mathfrak{S}_{1,x} \simeq \mathfrak{S}_{2,x}$ définie plus haut.

Pour la condition 3) on se sert du lemme suivant :

Lemme (2.2.9) : Soit $p: W' \rightarrow W$ un morphisme propre et surjectif (c'est par exemple le cas de la normalisation), alors, pour tout disque testant $h: D \rightarrow W$ tel que $h(0) = x$, et pour tout $x' \in p^{-1}(x)$, il existe un morphisme $h': D \rightarrow W'$ tel que $h'(0) = x'$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h'} & W' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

soit commutatif, φ étant un morphisme non constant.

♦

Le lecteur est invité à montrer le lemme (2.2.9) et la proposition (2.2.5) améliorée en exercice.

(2.3) Nous allons maintenant passer au programme prévu, qui était la recherche d'un "exposant idéaliste de contact".

Définition (2.3.1) : Soit W un espace analytique réduit. Un exposant idéaliste \mathcal{E} sur W est une classe d'équivalence de couples (\mathfrak{J}, b) où \mathfrak{J} est un idéal cohérent sur W , et $b \in \mathbb{N}$, pour la relation :

$$(\mathfrak{J}, b) \sim (\mathfrak{J}', b') \Leftrightarrow \mathfrak{J}^{b'} \simeq \mathfrak{J}'^b,$$

(ce qui signifie $\mathfrak{J}_x^{b'} \simeq \mathfrak{J}'_x^b$ pour tout $x \in W$).

Un germe \mathcal{E}_x d'exposant idéaliste en $x \in W$ est une classe d'équivalence de couples (\mathfrak{J}_x, b) où \mathfrak{J}_x est un germe en x d'Idéal cohérent, et $b \in \mathbb{N}$ pour la relation $(\mathfrak{J}_x, b) \sim (\mathfrak{J}'_x, b') \Leftrightarrow \mathfrak{J}_x^{b'} \simeq \mathfrak{J}'_x^b$.

On note

$$\mathcal{E}_x = ((\mathfrak{J}_x, b)).$$

♦ (Remarque : L'énoncé réciproque qui a un sens est vrai : c'est le critère valuatif de propreté).

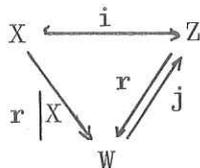
Remarques (2.3.2) :

a) si $\mathfrak{F}_x^{b'} \simeq \mathfrak{F}_x^b$, alors $\mathfrak{F}^{b'} \simeq \mathfrak{F}^b$ dans tout un voisinage de x , comme nous l'avons déjà signalé. Ainsi, un germe d'exposant idéaliste en x est bien le germe en x d'un exposant idéaliste \mathcal{E} défini sur un voisinage de x dans W .

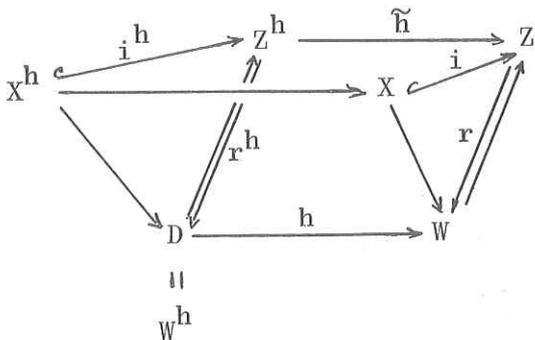
b) si $\mathcal{E} = ((\mathfrak{F}, b))$ est un exposant idéaliste sur W , pour tout $k: \tilde{W} \rightarrow W$, on a que si $(\mathfrak{F}, b) \sim (\mathfrak{F}', b')$, alors $(\mathfrak{F} \circ_{\tilde{W}}, b) \sim (\mathfrak{F}' \circ_{\tilde{W}}, b')$. Ainsi l'image réciproque d'un exposant idéaliste est bien définie. En particulier, si $h: D \rightarrow W$ est un disque testant, on note $v_0(\mathcal{E}^h)$ et $v^h(\mathcal{E})$ la valeur commune des $\frac{v_0(\mathfrak{F} \circ_D)}{b}$ pour tous les couples (\mathfrak{F}, b) appartenant à \mathcal{E} . (cf. 2.2.6).

(2.3.3) Ce qui précède règle la question de l'unicité de l'objet que nous cherchons. Occupons-nous maintenant de l'existence.

Considérons le diagramme



où r est une rétraction lisse transverse à X en $x \in W \cap X$. (On ne supposera même pas que W est normal). Si $h: D \rightarrow W$ est un disque testant de centre x , on considère le diagramme de changement de base de la situation par h :



$$\text{où } D \cong W^h = W \times D$$

$$Z^h = Z \times D \quad (\tilde{h} \text{ est la première projection})$$

$$x^h = \{0\} \in D.$$

Si $g \in \mathcal{O}_{Z,x}$, on notera g^h pour $g \circ \tilde{h} : g^h \in \mathcal{O}_{Z^h, x^h}$.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

(a.h.) Il existe une base standard (f_1, \dots, f_m) de l'idéal définissant X dans Z en x , normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}; Z_1, \dots, Z_r)$ telle que, pour tout disque testant $h : D \rightarrow W$ de centre x , (f_1^h, \dots, f_m^h) soit une base standard de l'idéal définissant X^h dans Z^h en x^h .

Remarque (2.3.4) : L'hypothèse (a.h.) est réalisée en particulier si W est lisse. Nous y reviendrons.

On a alors :

Théorème (2.3.5) : Dans les conditions que nous venons de rappeler, sous l'hypothèse supplémentaire (a.h.), il existe un unique germe en x d'exposant idéaliste \mathcal{E}_x tel que, pour tout disque testant $h : D \rightarrow W$ de centre x , on ait

$$v_o(\mathcal{E}^h) = \delta_x^h(W^h, X^h).$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'énoncé a un sens !

En effet, d'après l'hypothèse (a.h.), le morphisme

$d(r^h | X^h) : C_{X^h, x^h} \rightarrow T_{W^h, x^h}$ est obtenu à partir du morphisme $C_{X, x} \rightarrow C_{W, x}$

par changement de base par $dh : T_{W^h, x^h} \rightarrow C_{W, x}$. Ainsi, puisque un morphisme plat le reste par changement de base, r^h est transverse à X^h en x^h .

De plus, il est clair que (f_1^h, \dots, f_m^h) est une base standard de l'idéal de X^h dans Z^h en x^h , normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W^h, x^h}; Z_1^h, \dots, Z_r^h)$ (en

effet on écrit $f_i = \sum_A f_{iA} z^A$, $f_i^h = \sum (f_{iA} \circ h)(z^h)^A$ et les opérateurs qui n'étaient pas présents au départ ne peuvent se réintroduire subrepticement).

Construisons donc \mathcal{E} .

Considérons tous les développements

$$f_i = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^r} f_{iA} z^A \quad 1 \leq i \leq m$$

où $f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$, et considérons les $v_i = v_x(f_i)$. L'entier b que nous choisissons est $b = \prod_{i=1}^m (v_i!)$ et l'idéal I est l'idéal engendré par les

$$\frac{b}{v_i - |A|} f_{iA} \quad \text{pour } |A| < v_i, 1 \leq i \leq m. \quad I = \left(\left\{ \frac{b}{v_i - |A|} f_{iA} \right\}_{1 \leq i \leq m} \right)_{|A| < v_i} \mathcal{O}_{W,x}. \quad \text{Je dis que}$$

le \mathcal{E} que nous cherchons est déterminé par ce I et ce b . En effet, soit un disque testant $D \xrightarrow{h} W$ de centre x , puisque (f_1^h, \dots, f_m^h) est une base standard normalisée, on a d'après (1.4.21)

$$\delta_x^h(W^h, X^h) = \inf_{1 \leq i \leq m} \delta_i^h$$

où

$$\delta_i^h = \inf_{|A| < v_i} \left\{ \frac{v_x^h(f_{iA}^h)}{v_i - |A|} \right\}$$

donc

$$\delta_x^h(W^h, X^h) = \inf_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{v_x^h(f_{iA}^h)}{v_i - |A|} \right)_{|A| < v_i}$$

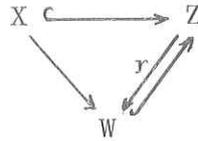
Mais d'autre part

$$v_x^h(\mathcal{E}^h) = \frac{1}{b} \inf_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < v_i}} \left\{ v_x \left((f_{iA}^h)^{\frac{b}{v_i - |A|}} \right) \right\} = \inf_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < v_i}} \left(\frac{v_x(f_{iA}^h)}{v_i - |A|} \right)$$

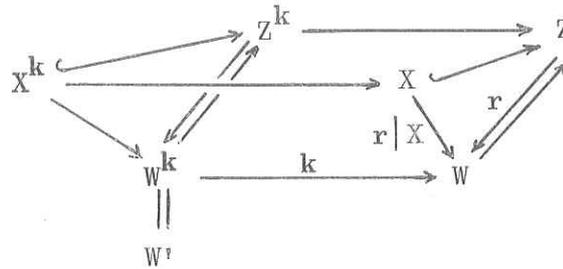
ce qui nous donne l'égalité cherchée, Q.E.D.

(2.3.6) Nous allons montrer que dans la situation de (2.3.3) l'hypothèse (a.h.) est toujours vérifiée. Ce fait résultera du

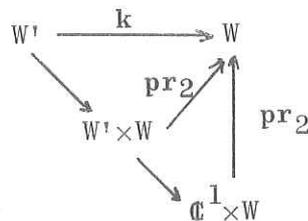
Lemme (2.3.7) : Soit



où r est une rétraction lisse transverse à X en $x \in W \cap X$. Alors, pour tout morphisme $k : W' \rightarrow W$, si (f_1, \dots, f_m) est une base standard de l'idéal de X dans Z en x , il en est de même de (f_1^k, \dots, f_m^k) pour l'idéal de X^k dans Z^k en tout point $x' \in k^{-1}(x)$.



Preuve : Nous allons tout d'abord montrer comment l'on se ramène au cas où k est une immersion : au voisinage de $x' \in k^{-1}(x)$, plongeons W' dans un espace lisse \mathbb{C}^1 . On peut alors "factoriser k par son graphe" ainsi :



où le morphisme $W' \rightarrow \mathbb{C}^1 \times W$ est clairement une immersion. Or le lemme (2.3.7) se vérifie immédiatement dans le cas où k est de la forme $\mathbb{C}^1 \times W \xrightarrow{pr_2} W$. Il suffit donc de la vérifier dans le cas où k est une

immersion. La question étant locale en x' , on peut supposer que k est une immersion fermée et identifier x' à x . Notons T l'idéal définissant W' dans W en x . On a donc $\mathcal{O}_{W^k, x} = \mathcal{O}_{W, x}/T$ et $\mathcal{O}_{Z^k, x} = \mathcal{O}_{W^k, x} \{z_1, \dots, z_r\}$ si l'on choisit un système de coordonnées locales (z_1, \dots, z_r) de centre x sur $r^{-1}(x)$. Notons J l'idéal définissant X dans Z en x , et J^k l'idéal définissant X^k dans Z^k en $x = x$. Ce qu'il nous faut montrer c'est que les $\text{in}_x(f_i^k)$, $1 \leq i \leq m$, forment une base standard de $\text{in}_x(X^k, Z^k)$.

Soit donc $g^k \in J^k$, ($g^k \neq 0$). Relevons-le en un élément $g \in J$ (en effet $J^k = J + T \cdot \mathcal{O}_{Z, x}/T_x \cdot \mathcal{O}_{Z, x}$) et posons

$$\begin{aligned} v &= v_x(g) \\ v^k &= v_x(g^k) \\ v_i &= v_x(f_i) \end{aligned}$$

Puisque (f_1, \dots, f_m) est une base standard de J , on peut écrire :

$$\text{in}_x(g) = \sum P_i \text{in}_x(f_i) \quad \text{où } P_i \in \text{gr}_x^{v-v_i} Z$$

et

$$P_i = \sum_{|A| \leq v-v_i} P_{i,A} Z^A \quad \text{où } P_{i,A} \in \text{gr}_x^{v-v_i-|A|} W.$$

Relevons $P_{i,A}$ en un élément $p_{i,A} \in \mathfrak{M}_{W, x}^{v-v_i-|A|}$ et posons :

$$p_i = \sum_{|A| \leq v-v_i} p_{i,A} Z^A \in \mathcal{O}_{Z, x}.$$

Posons enfin

$$g_1 = g - \sum_{i=1}^m p_i f_i$$

et remarquons que $v_x(g_1) > v$ puisque grâce à la définition des p_i ,

$$g \equiv \sum_{i=1}^m p_i f_i \text{ mod. } \mathfrak{M}_{Z, x}^v.$$

Remarquons aussi que puisque r est transverse à X en x , (f_1, \dots, f_m) est certainement adaptée à r (cf. (1.4.19)), et l'on peut donc écrire :

$$f_i = \lambda_i(z) + \varepsilon_i + h_i$$

avec : λ_i polynôme homogène non nul de degré v_i en z

$$: \varepsilon_i \in \mathfrak{M}_{W, x} \circ \mathcal{O}_{Z, x}$$

$$: v_x(h_i) \geq v_i + 1,$$

on a donc :

$$f_i^k = \lambda_i^k(z) + \varepsilon_i^k + h_i^k$$

ce qui montre que

$$v_x(f_i^k) = v_i.$$

Or l'égalité $g_1 = g - \sum_{i=1}^m p_i f_i$ entraîne que

$$g_1^k = g^k - \sum p_i^k f_i^k.$$

Et il y a deux possibilités :

A) si $v^k = v$: puisque $v(g_1^k) \geq v(g_1) \geq v+1$, on a

$$\text{in}_x(g^k) = \text{in}_x(\sum p_i^k f_i^k) = \sum (\text{in}_x p_i^k) (\text{in}_x f_i^k)$$

puisque $\text{in}_x(\sum p_i^k f_i^k)$ est de degré v .

Ceci montre que $\text{in}_x g^k$ appartient à l'idéal engendré par les $\text{in}_x(f_i^k)$.

B) si $v^k > v$: il nous faut montrer que nous pouvons changer le relèvement g de g^k de façon à nous ramener au cas A). Si $v^k > v$, cer-

tainement $\sum_{i=1}^m \text{in}_x(p_i^k) (\text{in}_x f_i^k) = 0$; ceci est une relation dans

$\text{gr}_x Z^k = \text{gr}_x Z / \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z$. Ce dernier quotient n'est autre, grâce à

l'hypothèse de lixivité de la rétraction, que $[\text{gr}_x W / \text{in}_x(W', W)][Z]$. Si nous remontons à notre relation dans $\text{gr}_x W[Z]$, nous trouvons qu'elle donne :

$$\sum [\{ \text{cl. } p_i \text{ mod } (T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + M_{Z,x}^{v-v_i+1}) \} \{ \text{cl. } f_i \text{ mod } (T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + M_{Z,x}^{v_i+1}) \}] = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^m p_i f_i \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + M_{Z,x}^{v+1}$$

écrivons donc

$$\sum_{i=1}^m p_i f_i = g' + r' \quad \text{où } g' \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} \text{ et } r' \in M_{Z,x}^{v+1}.$$

Puisque grâce à la définition des p_i , $\text{cl}(\sum_{i=1}^m p_i f_i) \text{ mod } M_{Z,x}^{v+1} = \text{in}_x(g) \neq 0$, on voit que $v_x(g') = v$ et que $\text{in}_x(g') = \text{in}_x(g)$. Ceci montre que $\text{in}_x(g) \in \text{in}_x(W', W) \cdot \text{gr}_x Z$, puisque $g' \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x}$.

Ainsi, nous avons montré que si $v^k > v$,

$$\text{in}_x(g) \in \text{in}_x(X, Z) \cap \text{in}_x(W', W) \cdot \text{gr}_x Z.$$

Or, supposons que nous sachions montrer qu'en fait

$$\text{in}_x(g) \in \text{in}_x(X, Z) \cdot \text{in}_x(W', W) \cdot \text{gr}_x Z.$$

On en déduirait que dans l'écriture

$$\text{in}_x g = \sum_{i=1}^m P_i \text{in}_x f_i \quad \text{où } P_i = \sum_{|A| \leq v-v_i} P_{iA} Z^A$$

on peut supposer que :

$$P_{i,A} \in \text{in}_x^{v-v_i-|A|}(W', W)$$

et donc que l'on peut relever $P_{i,A}$ en $p_{i,A} \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + \mathfrak{M}_{Z,x}^{\nu - \nu_i - |A| + 1}$
 ce qui entraîne que si $p_i = \sum_{|A| \leq \nu - \nu_i} p_{i,A} Z^A$, on a :

$$\sum p_i f_i \in T \cdot J \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + \mathfrak{M}^{\nu+1} \cdot J$$

et l'on peut donc écrire

$$\sum p_i f_i = g'' + r''$$

avec $g'' \in T \cdot J \cdot \mathcal{O}_{Z,x}$ et $r'' \in \mathfrak{M}^{\nu+1} \cdot J$.

Mais maintenant si nous posons $g_2 = g_1 + r''$, puisque $g = g_1 + g'' + r''$, on voit que :

- puisque g'' et g sont tous deux dans J , il en est de même de g_2 ;
- puisque $g'' \in T$, on a $g_2^k = g^k$;
- qui plus est, puisque $r'' \in \mathfrak{M}^{\nu+1}$, on a $\nu_x(g_2) = \nu_x(g - g'') \geq \nu + 1$.

Ainsi, g_2 est un relèvement de g^k d'ordre $\nu + 1$. Si $\nu^k = \nu + 1$, on s'est ainsi ramené au cas A). Sinon on continue, et au bout d'un nombre fini de pas, on sera ramené au cas A).

Ainsi, nous aurons montré que les $\text{in}_x(f_i^k)$ ($1 \leq i \leq m$) engendrent $\text{in}_x(X^k, Z^k)$ si nous montrons que

$$\text{in}_x(X, Z) \cap \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z = \text{in}_x(X, Z) \cdot \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z \quad .$$

Or ceci résulte de l'hypothèse de transversalité qui nous dit que $\text{gr}_x Z / \text{in}_x(X, Z)$ est plat sur $\text{gr}_x W$, i.e. que le morphisme

$$\text{gr}_x W \rightarrow \text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(X, Z) = \text{gr}_x X$$

est plat.

Ceci entraîne que

$$\text{Tor}_1^{\text{gr}_x W} \left(\text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(X, Z), \text{gr}_x W / \text{in}_x(W', W) \right) = 0 .$$

Mais on a les égalités (Abstract nonsense, mon cher Watson !)

$$\begin{aligned} (0 =) \text{Tor}_1^{\text{gr}_x W} \left(\text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(X, Z), \text{gr}_x W / \text{in}_x(W', W) \right) &= \\ \text{Tor}_1^{\text{gr}_x W[Z]} \left(\text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(X, Z), \text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x W[Z] \right) &= \\ \text{in}_x(X, Z) \cap \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x W[Z] / \text{in}_x(X, Z) \cdot \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x W[Z] &= \\ \text{in}_x(X, Z) \cap \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z / \text{in}_x(X, Z) \cdot \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z &, \end{aligned}$$

ce qu'il nous fallait.

Arrivés ici, nous avons montré que les $\text{in}_x(f_i^k)$ formaient un système de générateurs de $\text{in}_x(X^k, Z^k)$. Il nous faut montrer que ce système de générateurs est minimal : c'est la même méthode qui va nous servir.

Souvenons-nous que nous avons vu plus haut que $v_x(f_i^k) = v_i$ et donc que les degrés des $\text{in}_x f_i^k$ vont croissant au sens large avec i . Si les $\text{in}_x f_i^k$ ne formaient pas un système minimal de générateurs, nous aurions une relation :

$$\text{in}_x(f_i^k) = \sum_{1 \leq j \leq i-1} Q_j \cdot \text{in}_x f_j^k$$

(le $j \leq i-1$ vient de ce que les degrés vont croissant !) où $Q_j \in \text{gr}_x W \text{ in}_x(W', W) [Z]$.

Mais exactement comme plus haut, en relevant les Q_j dans $\text{gr}_x Z$, et en prenant des représentants q_i dans $\mathcal{O}_{Z, x}$, on obtient des q_j tels que $\text{in}_x q_j \in \text{gr}_x^{v_i - v_j} Z$

$$f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x} + \mathfrak{M}_{Z,x}^{v+1}$$

que l'on écrit

$$f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j = s + r \quad \text{où } s \in T \cdot \mathcal{O}_{Z,x}$$

et $r \in \mathfrak{M}_{Z,x}^{v+1}$. Mais si $v_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) > v_i$, on doit avoir

$\text{in}_x(f_i) = \sum_{i=1}^m \text{in}_x q_i \cdot \text{in}_x f_j$, ce qui est impossible puisque les $\text{in}_x(f_i)$

forment un système minimal de générateurs de $\text{in}_x(X, Z)$. Ainsi,

$v_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) = v_i$, et par conséquent

$$\text{in}_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) = \text{in}_x s \in \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z$$

puisque $f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j \in J$, on trouve donc que

$$\text{in}_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) \in \text{in}_x(X, Z) \cap \text{in}_x(W', W) \cdot \text{gr}_x Z$$

mais comme il l'a été vu plus haut, ceci entraîne que

$$\text{in}_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) \in \text{in}_x(X, Z) \cdot \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z$$

et que l'on peut écrire :

$$\text{in}_x(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j) = \sum_{k=1}^m R_k \text{in}_x f_k \quad \text{où } R_k \in \text{in}_x(W', W) \text{gr}_x Z$$

i.e.

$$\text{in}_x f_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_j f_j = \sum_{k=1}^m R_k \text{in}_x f_k$$

Comme le degré du terme de gauche est v_i , la sommation de droite est en fait à prendre seulement jusqu'à $i-1$, donc $\text{in}_x f_i$ n'apparaît pas dans la somme de droite, et cela nous donne une relation

$$\text{in}_x f_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\text{in}_x q_j - R_j) \text{in}_x f_j$$

ce qui est une contradiction, puisque les $\text{in}_x(f_i)$ forment un système minimal de générateurs de $\text{in}_x(X, Z)$.

Ceci termine la démonstration du lemme (2.3.7).

Corollaire (2.3.8) : On obtient immédiatement comme corollaire que $\text{in}_x(X^k, Z^k) = \text{in}_x(X, Z) + \text{in}_x(W', W) / \text{in}_x(W', W)$, autrement dit, dans la démonstration du lemme (2.3.7), le carré :

$$\begin{array}{ccc} C_{X^k, x'} & \longrightarrow & C_{X, x} \\ \downarrow \text{dr}^k & & \downarrow \text{dr} \\ C_{W', x'} & \longrightarrow & C_{W, x} \end{array}$$

est cartésien. Comme un morphisme plat le reste par changement de base, ceci montre que l'image réciproque r^k de la rétraction r est transverse à X^k en tout point $x' \in k^{-1}(x)$.

Corollaire (2.3.9) : On a remarqué au cours de la démonstration de (2.3.7) que $\text{in}_x(f_i)$ et $\text{in}_{x'}(f_i^k)$ avaient la même partie en Z , $\lambda_i(Z)$. Ceci montre que si (f_1, \dots, f_m) est normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W, x}; Z_1, \dots, Z_r)$, (f_1^k, \dots, f_m^k) est normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W', x'}; Z_1, \dots, Z_r)$ pour tout $x' \in k^{-1}(x)$.

Nous avons donc démontré le théorème (2.3.5) sans autre hypothèse que l'existence d'une rétraction lisse $r: Z \rightarrow W$ transverse à $X \subset Z$ en $x \in W \cap X$.

Définition (2.3.10) : L'unique germe en x d'exposant idéaliste \mathcal{E}_x tel que, pour tout disque testant $h: D \rightarrow W$ de centre x , on ait :

$$v_o(\mathcal{E}^h) = \delta_x^h(W^h, X^h)$$

est appelé le germe d'exposant idéaliste de contact de W avec X en x .

Remarque (2.3.11) : Le germe d'exposant idéaliste dépend de la rétraction transverse $r: Z \rightarrow W$ choisie.

Prenons par exemple $Z = \mathbb{C}^3$ muni des coordonnées z, w_1, w_2 , prenons pour X la surface d'équation $z^3 - w_1^2 w_2 = 0$, pour W le plan $z = 0$, et pour x l'origine. Choisissons pour première rétraction r_1 celle qui est définie par

$$w_1 \circ r_1 = w_1$$

$$w_2 \circ r_1 = w_2.$$

La recette de (2.3.5) nous donne pour l'exposant idéaliste de contact correspondant à r_1 :

$$b = 3! = 6$$

$$J = (w_1^2 w_2)^2 \mathbb{C}_{W,x}$$

en simplifiant

$$\mathcal{E}_x^1 = ((w_1^2 w_2 \mathbb{C}\{w_1, w_2\}, 3))$$

et regardons la rétraction r_2 définie par :

$$w_1 \circ r_2 = w_1$$

$$w_2 \circ r_2 = w_2 - z$$

les coordonnées adaptées à r_2 sont z, w_1 et $w_2' = w_2 - z$ (il faut que $r_2^{-1}(x)$ soit définie par l'annulation des coordonnées de W choisies). Dans ces coordonnées, l'équation de X s'écrit :

$$z^3 + w_1^2 z - w_1^2 w_2' = 0$$

et la recette de (2.3.5) nous donne

$$\mathcal{E}_x^2 = ((w_1 \circ (w_1, w_2') \mathbb{C}\{w_1, w_2'\}, 3)) .$$

Or, $J_1 = w_1^2 w_2 \mathbb{C}\{w_1, w_2\}$ étant un idéal principal d'un espace normal est intégralement clos et on voit que $\mathcal{E}_x^1 = \mathcal{E}_x^2$ si et seulement si la fermeture intégrale de $J_2 = w_1 \cdot (w_1, w_2^1)$ est égale à J_1 mais ceci est impossible, puisque J_2 contient w_1^2 qui n'est pas dans J_1 .

(2.3.12) Cependant, dans le cas où $\dim W = 1$ et W réduit l'exposant idéaliste de contact ne dépend pas du choix de la rétraction transverse. Pour le voir, normalisons W , comme dans (2.2.8) on se ramène ainsi au cas où $\mathcal{O}_{W,x} = \mathbb{C}\{W\}$. Mais on lit immédiatement en (2.3.5) l'égalité importante

$$v_x(\mathcal{E}) = \delta_x(W, X)$$

et on a vu que $\delta_x(W, X)$ était défini indépendamment de toute rétraction. Or, si $\mathcal{O}_{W,x} = \mathbb{C}\{W\}$, un germe d'exposant idéaliste est uniquement déterminé par son ordre, et nous venons de voir que celui-ci était indépendant de la rétraction.

(2.4) Le but de ces prochaines pages est de rectifier la pathologie suivante : si $\text{gr}_Y W$ n'est pas intègre, il se peut que $v_Y(f.g) > v_Y(f) + v_Y(g)$ ou que $v_Y(f^k) > k v_Y(f)$ (i.e. la Y-forme initiale de f est nilpotente). C'est surtout ce dernier phénomène qui nous gêne, par exemple pour définir $v_x(\mathcal{E})$ si $\text{gr}_x W$ n'est pas réduit. Le \bar{v} étudié ci-dessous est une nouvelle notion d'ordre qui a de meilleures propriétés que et qui coïncide avec l'ordre ordinaire si $\text{gr}_x W$ est réduit.

Proposition (2.4.1) : Soient \mathcal{O} un anneau noëthérien et P un idéal de \mathcal{O} . Posons, pour tout idéal I de \mathcal{O} , $v_P(I) = \text{Sup}\{v/I \subset P^v\}$. Soit maintenant J un idéal de \mathcal{O} . La suite $u_k = \frac{v_P(J^k)}{k}$ est convergente, ou tend vers l'infini.

Démonstration : Soit $\bar{v} = \overline{\text{Lim}}_{k \rightarrow \infty} u_k$, $\underline{v} = \underline{\text{Lim}}_{k \rightarrow \infty} u_k$. Nous allons montrer que si $\bar{v} < \infty$, on a $\bar{v} = \underline{v}$. Le lecteur verra par la même méthode que si $\bar{v} = \infty$, $\underline{v} = \infty$.

Remarquons tout d'abord que d'après la définition de $\overline{\text{Lim}}$ et de $\underline{\text{Lim}}$:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \geq i : u_j < \underline{v} + \varepsilon$$

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i' \in \mathbb{N}, \exists j' \geq i' : u_{j'} > \bar{v} - \varepsilon$$

Fixons un $\varepsilon > 0$ quelconque, et choisissons un indice i assez grand pour

$\frac{1}{i} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{v - \frac{\varepsilon}{2}}$. D'après (**), il existe $j \geq i$ tel que $\frac{v_P(J^j)}{j} > \bar{v} - \frac{\varepsilon}{2}$, et

et d'après (*), il existe $k \geq j$ tel que $\frac{v_P(J^k)}{k} < \underline{v} + \varepsilon$. Divisons k par j :

$$k = l.j + q \quad (q < j).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{v} + \varepsilon &> \frac{v_P(J^{1j+q})}{1j+q} \geq \frac{1 \cdot v_P(J^j) + v_P(J^q)}{1 \cdot j+q} \geq \frac{v_P(J^j)}{j} \left(1 - \frac{q}{j(1 \cdot j+q)}\right) \\ &\geq \left(\bar{v} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{q}{j(1 \cdot j+q)}\right) \geq \left(\bar{v} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{i}\right) \geq \bar{v} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\underline{v} + \varepsilon \geq \bar{v} - \varepsilon$. Q.E.D.

Définition (2.4.2) : Nous noterons $\bar{v}_P(J) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_P(J^k)}{k}$.

Remarque (2.4.3) : Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\bar{v}_P(J^l) = l \cdot \bar{v}_P(J)$.

Remarque (2.4.4) : Si $\text{Gr}_P \mathcal{O}$ est intègre, $\bar{v}_P(J) = v_P(J)$.

Proposition (2.4.5) : Supposons \mathcal{O} réduit, et soit $\bar{\mathcal{O}}$ le normalisé de \mathcal{O} que nous supposerons être un \mathcal{O} -module de type fini. Gardons les notations de la Proposition (2.4.1), et posons de plus $P' = P \cdot \bar{\mathcal{O}}$, $J' = J \cdot \bar{\mathcal{O}}$. On a alors

$$\bar{v}_P(J) = \bar{v}_{P'}(J') = \bar{v}_{P'}(\bar{J})$$

où \bar{J} désigne la clôture intégrale de J (ou de J' , d'ailleurs) dans $\bar{\mathcal{O}}$.

Démonstration : Pour n assez grand, on aura $J'^k \cdot \bar{J}^n = \bar{J}^{n+k}$ pour tout $k \geq 0$.

On aura donc, pour n assez grand et tout k :

$$\frac{v_{P'}(\bar{J}^{n+k})}{n+k} \geq \frac{v_{P'}(J'^k)}{n+k} + \frac{v_{P'}(\bar{J}^n)}{n+k}.$$

Mais d'autre part, puisque $J' \subset \bar{J}$, on a

$$\frac{v_{P'}(J'^{n+k})}{n+k} \geq \frac{v_{P'}(\bar{J}^{n+k})}{n+k}.$$

Mais remarquons que d'après Artin-Rees, $\bar{\mathcal{O}}$ étant fini sur \mathcal{O} , il existe ν_0 tel que pour $\nu > \nu_0$, on ait $P^\nu \cap \mathcal{O} = P^{\nu-\nu_0} \cdot (P^{\nu_0} \cap \mathcal{O})$, donc, si $J^{n+k} \subseteq P^\nu$, $J^{n+k} \subseteq J^{n+k} \cap \mathcal{O} \subseteq P^{\nu-\nu_0}$, ce qui montre que

$$\frac{\nu_P(J^{n+k})}{n+k} \geq \frac{\nu_{P'}(J^{n+k}) - \nu_0}{n+k}$$
. Nous avons donc montré jusqu'à maintenant les inégalités :

$$(*) \quad \frac{\nu_P(J^{n+k}) + \nu_0}{n+k} \geq \frac{\nu_{P'}(J^{n+k})}{n+k} \geq \frac{\nu_{P'}(\bar{J}^n)}{n+k} + \frac{\nu_{P'}(J^k)}{n+k}$$

pour n assez grand. Mais d'autre part, puisque $J' \subset \bar{J}$, on a $\bar{\nu}_{P'}(J') \geq \bar{\nu}_{P'}(\bar{J})$, et en faisant tendre k vers l'infini dans la première inégalité que nous avons trouvée, nous obtenons :

$$\nu_{P'}(\bar{J}) \geq \nu_{P'}(J') ,$$

enfin, puisque si $J^k \subset P^\nu$, $J'^k \subset P^\nu$, on a certainement $\nu_{P'}(J') \geq \nu_P(J)$. D'où $\nu_{P'}(\bar{J}) \geq \nu_{P'}(J') \geq \nu_P(J)$. Mais en faisant tendre n vers l'infini dans (*), on trouve

$$\nu_P(J) \geq \nu_{P'}(J') \geq \nu_{P'}(\bar{J}) . \quad \text{Q.E.D.}$$

Proposition (2.4.6) : Dans la situation de la Proposition (2.4.1), pour tout système de générateurs (f_1, \dots, f_m) de J , on a

$$\bar{\nu}_P(J) = \min_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_P(f_i) .$$

Démonstration : Considérons J^k , qui est engendré par les

$$\left\{ f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m} \mid a_1 + \dots + a_m = k \right\} .$$

Fixons un $\varepsilon > 0$, et soit k'_0 le plus petit entier tel que pour tout $k \geq k'_0$ on ait, pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\bar{v}_P(f_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{v_P(f_i^k)}{k} \leq \bar{v}_P(f_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(d'après la Proposition (2.4.1), la suite des $\frac{v_P(f_i^k)}{k}$ converge vers $\bar{v}_P(f_i)$). Posons $k_0 = m \cdot k'_0$.

Pour $k \geq k_0$, dans un monôme $f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m}$, $a_1 + \dots + a_m = k$, il y a au moins un $a_i > k'_0$.

Posons $\eta = \sup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ a \leq k'_0}} \{ |v_P(f_i^a) - a \cdot \bar{v}_P(f_i)| \}$.

On a alors, pour tout i , et tout $a \leq k'_0$

$$v_P(f_i^a) \geq a \bar{v}_P(f_i) - \eta.$$

Dans notre monôme $f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m}$, $a_1 + \dots + a_m = k$, supposons que $a_1 > k'_0$.

On a alors :

$$v_P(f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m}) \geq a_1 \bar{v}_P(f_1) - \frac{\varepsilon}{2} a_1 + \sum_{i=2}^m a_i \bar{v}_P(f_i) - (m-1)\eta$$

d'où

$$\frac{v_P(f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m})}{k} \geq \frac{\sum_{i=1}^m a_i \bar{v}_P(f_i)}{k} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{(m-1)\eta}{k}$$

et puisque $\sum a_i = k$

$$\frac{v_P(f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m})}{k} \geq \min_{1 \leq i \leq m} \{ \bar{v}_P(f_i) \} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{(m-1)\eta}{k},$$

et donc, en laissant tendre k vers l'infini,

$$\bar{v}_P(f_1^{a_1} \dots f_m^{a_m}) \geq \min_{1 \leq i \leq m} \{ \bar{v}_P(f_i) \} - \varepsilon.$$

Mais maintenant, d'une part l'inégalité précédente montre que

$\bar{v}_P(J) \geq \min_{1 \leq i \leq m} \{ \bar{v}_P(f_i) \} - \varepsilon$ et d'autre part il est évident que

$\bar{v}_P(J) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \{\bar{v}_P(f_i)\}$. Comme ε était quelconque, ceci achève la démonstration.

Corollaire (2.4.7) : Dans la situation de la proposition (2.4.1), on a

$$\bar{v}_P(J) = \min_{f \in J} \{\bar{v}_P(f)\}.$$

Corollaire (2.4.8) : Pour que $\bar{v}_P(J) = v_P(J)$, il suffit que $\text{gr}_P \mathcal{O}$ soit réduit.

Remarque (2.4.9) : On n'a pas en général $\bar{v}_P(f \cdot g) = \bar{v}_P(f) + \bar{v}_P(g)$.

Prendre par exemple $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\} / (x^2 - y^3)(y^2 - x^3)$, $P = (x, y)$ et $f = x$, $g = y$. Mais on a bien sûr toujours $\bar{v}_P(f \cdot g) \geq \bar{v}_P(f) + \bar{v}_P(g)$.

Proposition (2.4.10) : Soient W un espace analytique complexe réduit, et x un point de W . Notons \mathcal{D}_x l'exemple des disques testants $h: \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x (i.e. tels que $h(0) = x$). Pour un $h \in \mathcal{D}_x$, notons $e(h) = v_0(\mathcal{M}_{W, x} \circ h)$. On a alors, pour tout idéal cohérent \mathfrak{J} défini sur un voisinage de x dans W

$$(\bar{v}_{\mathcal{M}_{W, x}}(\mathfrak{J}_x \mathcal{O}_{W, x})) = \bar{v}_x(\mathfrak{J}_x) = \min_{h \in \mathcal{D}_x} \left\{ \frac{v_0(h^* \mathfrak{J})}{e(h)} \right\}.$$

Démonstration : Nous allons tout d'abord grâce à la proposition (2.4.6) nous ramener à démontrer : pour un élément quelconque $f \in \mathcal{O}_{W, x}$, on a

$$\bar{v}_x(f) = \min_{h \in \mathcal{D}_x} \left\{ \frac{v_0(f \circ h)}{e(h)} \right\}.$$

Ceci fait, nous nous ramenons au cas où $\dim_x W = 1$ par des "sections hyperplanes génériques" successives. Le lemme suivant traduit algébriquement ce procédé.

Lemme (2.4.11) : Soit \mathcal{O} une algèbre analytique de dimension ≥ 2 , d'idéal maximal \mathfrak{M} . Soit $f \in \mathcal{O}$. Il existe un ouvert dense U du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ tel que pour tout élément $g \in \mathfrak{M}$ tel que $g \bmod \mathfrak{M}^2 \in U$ on ait, en notant $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}/(g)$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}/(g)$, $f_1 = f \bmod (g)$:

$$\bar{v}_{\mathfrak{M}_1}(f_1) = \bar{v}_{\mathfrak{M}}(f) .$$

Démonstration : Montrons tout d'abord qu'il existe un élément g tel que $v_{\mathfrak{M}_1}(f_1) = v_{\mathfrak{M}}(f)$. On a évidemment $v_{\mathfrak{M}_1}(f_1) \geq v_{\mathfrak{M}}(f)$. Posons $v_{\mathfrak{M}}(f) = v$. Il suffit de démontrer qu'il existe g tel que $f_1 \notin \mathfrak{M}_1^{v+1}$. Mais supposons $\overline{f_1} = 0$ où $\overline{f_1}$ désigne la classe de f_1 dans $\mathcal{O}_1/\mathfrak{M}_1^{v+1}$, pour tout choix de $g \in \mathfrak{M}$. Cela signifie que la classe de $f \bmod \mathfrak{M}^{v+1}$ est contenue dans tous les idéaux principaux de $\mathcal{O}/\mathfrak{M}^{v+1}$, d'où il résulte immédiatement que $\mathfrak{M}^v/\mathfrak{M}^{v+1} = (\text{cl.}(f) \bmod \mathfrak{M}^{v+1}) \cdot \mathcal{O}/\mathfrak{M}^{v+1}$, et, d'après Nakayama, que \mathfrak{M}^v est principal, ce qui est impossible puisque \mathcal{O} est de dimension ≥ 2 . Maintenant montrons que nous pouvons choisir g dans $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$. Soit donc $g \in \mathfrak{M}$ tel que $v_{\mathfrak{M}_1}(f_1) = v_{\mathfrak{M}}(f)$. Choisissons un système de générateurs $\mathfrak{M} = (x_1, \dots, x_d)$, $x_i \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$, et écrivons $g = \sum \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in \mathcal{O}$. Puisque $f \bmod \mathfrak{M}^{v+1}$ n'est pas contenu dans l'idéal engendré par $(g \bmod \mathfrak{M}^{v+1})$, il existe certainement un x_i tel que $f \bmod \mathfrak{M}^{v+1}$ n'appartienne pas à l'idéal engendré par $(x_i \bmod \mathfrak{M}^{v+1})$: ce x_i fait l'affaire. D'autre part, il est clair que les éléments $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$ tels que $v_{\mathfrak{M}_1}(f_1) = v_{\mathfrak{M}}(f)$ forment un ouvert de Zariski U_1 du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$. Nous venons de voir qu'il est non vide, et donc dense dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ (pour la topologie forte). Enfin, nous pouvons refaire le même raisonnement avec f^k à la place de f , obtenant ainsi un ouvert dense U_k de $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ tel que si $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$ et $g \bmod \mathfrak{M}^2$ est dans U_k , on a $v_{\mathfrak{M}_1}(f_1^k) = v_{\mathfrak{M}}(f^k)$. D'après Baire, $U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ est encore dense dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$, et si nous prenons $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$ tel que $g \bmod \mathfrak{M}^2 \in U$, nous avons

$$\frac{v_{\mathfrak{M}_1}(f_1^k)}{k} = \frac{v_{\mathfrak{M}}(f^k)}{k} \quad \text{pour tout } k,$$

et donc

$$v_{\mathfrak{M}_1}(f_1) = \bar{v}_{\mathfrak{M}}(f) \quad \text{Q.E.D. pour le lemme.}$$

Grâce au lemme, nous pouvons, par un nombre fini de sections "génériques" nous ramener à démontrer la Proposition (2.4.10) dans le cas où $\dim_x W = 1$. En effet, il faut noter que puisque le disque unité \mathbb{D} est lisse, on a $v_o(f^k \circ h) = v_o((f \circ h)^k) = k v_o(f \circ h)$, d'où il résulte immédiatement que, pour tout disque testant $h: \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x , on a

$$\bar{v}_x(f) \geq \frac{v_o(f \circ h)}{e(h)}. \quad \text{Notre problème étant de trouver un disque testant pour}$$

lequel l'égalité a lieu. Mais puisque nous venons de voir que par des sections hyperplanes "génériques" nous ne changeons pas $\bar{v}_x(f)$, nous pouvons chercher notre disque testant dans la courbe W_1 obtenue après $(\dim_x W - 1)$ telles sections génériques successives. Ici il nous faut remarquer que, quitte à restreindre un peu l'ouvert dense U à chaque pas, W_1 est réduite. En effet, le même raisonnement que celui que nous venons de faire montre qu'il existe, si \mathcal{O} est réduite, un ouvert dense \mathcal{R} du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ tel que si $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^2$ et $(g \bmod \mathfrak{M}^2) \in \mathcal{R}$, $\mathcal{O}/(g)$ est réduite. Nous avons à choisir notre $g \pmod{\mathfrak{M}^2}$ dans $U \cap \mathcal{R}$, qui est encore un ouvert dense de $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$. Maintenant nous sommes bien ramenés à démontrer la proposition (2.4.10) dans le cas où W est une courbe réduite. Soit donc \mathcal{O} une algèbre analytique réduite de dimension 1, et soit I un idéal principal de \mathcal{O} . $I = (f)$. D'après la Proposition (2.4.5),

$$\bar{v}_{\mathfrak{M}}(I) = \bar{v}_{\mathfrak{M}\mathcal{O}}(I\mathcal{O}). \quad \text{Mais si } \bar{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^k \bar{\mathcal{O}}_i \text{ où } \bar{\mathcal{O}}_i \simeq \mathbb{C}\{t_i\}, \text{ on a } \bar{v}_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}}(f\bar{\mathcal{O}}) =$$

$$\min_{1 \leq i \leq k} \bar{v}_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}_i}(f\bar{\mathcal{O}}_i) \text{ car } \bar{v}_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}}(f\bar{\mathcal{O}}) = v_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}}(f\bar{\mathcal{O}}). \quad \text{Les morphismes } \mathcal{O} \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_i \text{ sont}$$

les disques testants "primitifs" h_i de la courbe W (tous les autres s'en déduisent par $t_i \rightarrow t_i^{e_i}$), et $v_o(\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}_i) = e(h_i)$. Donc

$$v_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}_i}(f\bar{\mathcal{O}}_i) = v_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}_i}(f\bar{\mathcal{O}}_i) \quad (\text{puisque } \bar{\mathcal{O}}_i = \mathbb{C}\{t_i\} \text{ et}$$

$$v_{\mathfrak{M}\bar{\mathcal{O}}_i}(f\bar{\mathcal{O}}_i) = \frac{v_o(f \circ h_i)}{e(h_i)}). \quad \text{Nous avons donc trouvé notre disque testant}$$

pour lequel l'égalité a lieu. Q.E.D. pour la Proposition (2.4.10).

Remarque (2.4.12) : Sur un espace analytique W réduit, il résulte de la Proposition (2.4.5) que si l'on a pour deux Idéaux cohérents \mathfrak{I}_1 et \mathfrak{I}_2 tels que $\mathfrak{I}_{1,x} \simeq \mathfrak{I}_{2,x}$, on a $\bar{v}_x(\mathfrak{I}_{1,x}) = \bar{v}_x(\mathfrak{I}_{2,x})$. En particulier, si \mathcal{E} est un exposant idéaliste, on peut définir $\bar{v}_x(\mathcal{E})$ comme la valeur commune des $\frac{v_x(\mathfrak{I}_x)}{b}$ pour tous les $(\mathfrak{I}, b) \in \mathcal{E}$. Si $\text{gr}_x W$ est réduit, on aura $\bar{v}_x(\mathcal{E}) = \delta_x(W, X)$.

Dans le cas général, nous définirons une nouvelle notion d'exposant de contact. Nous y reviendrons.

Remarque (2.4.13) : Si \mathcal{O} est l'anneau local d'une courbe plane, irréductible, regardons l'ensemble des $\bar{v}_{\mathfrak{M}}(f)$ pour $f \in \mathfrak{M}$. Le plus petit $\bar{v}_{\mathfrak{M}}(f)$ qui est > 1 est le premier exposant caractéristique de Puiseux de la courbe.

Remarque (2.4.14) : Il résulte de la Proposition (2.4.10) que $\bar{v}_x(\partial)$ est un nombre rationnel.

III - EFFETS D'UNE MODIFICATION PERMISE

(3.1) Nous avons affirmé plus haut que \mathcal{E} s'améliorait sous l'effet d'une modification permise. Il nous faut tout d'abord décrire ce que nous entendrons par "modification de \mathcal{E} de centre donné". Nous verrons qu'il y a certains centre de modification (contenus dans W) que nous avons envie d'appeler "permis par \mathcal{E} ", et nous étudierons leur relation avec les centres de modification qui sont permis pour X et pour W .
Tout d'abord une définition générale :

Définition (3.1.1) : Soit W un espace analytique. Soit \mathcal{P} un Idéal sur W définissant un sous-espace analytique fermé Y de W , et soit \mathfrak{J} un autre Idéal sur W . Soit $W' \rightarrow W$ la modification de centre Y . Si $v_Y(\mathfrak{J}) = \text{Sup}\{i \mid \mathfrak{J} \subset \mathcal{P}^i\}$, (on remarque, en plongeant W localement dans un espace lisse \tilde{W} , et on l'applique chap. I, (2.4.2), que $v_Y(\mathfrak{J}) = \inf_{\xi \in Y} \{v_{\xi}(\mathfrak{J})\}$).

On a : $\mathfrak{J} \cdot \mathcal{O}_{W'} \subset \mathcal{P}^{v_Y(\mathfrak{J})} \cdot \mathcal{O}_{W'}$, mais $\mathcal{P} \cdot \mathcal{O}_{W'}$ étant inversible, ceci signifie que $\mathcal{P}^{-v_Y(\mathfrak{J})} \cdot \mathfrak{J} \cdot \mathcal{O}_{W'}$ est un Idéal de $\mathcal{O}_{W'}$. C'est par définition cet Idéal que l'on appelle le transformé faible de \mathfrak{J} dans la modification de centre Y .

Remarque (3.1.2) : La transformée stricte de \mathfrak{J} n'est autre que l'Idéal de $\mathcal{O}_{W'}$ engendré par les transformés faibles de tous les éléments de \mathfrak{J} .

Définition (3.1.3) : Soit \mathcal{E} un exposant idéaliste sur un espace analytique réduit W . On note $\text{Sing}^{\mathcal{E}}$ le sous-espace analytique de W :

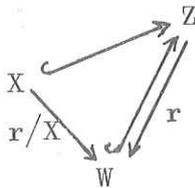
$$\text{Sing}^{\mathcal{E}} = \{x \in W \mid v_x(\mathcal{E}) \geq 1\} .$$

Définition (3.1.4) : Nous dirons que la modification de centre $Y \subset W$ est permise pour \mathcal{E} si

- a) Y est lisse
- b) $Y \subset \text{Sing}^{\mathcal{E}}$.

Remarquons que si $\mathcal{E} = ((\mathfrak{J}, b))$, si \mathfrak{P} est l'Idéal correspondant à Y , la condition b) signifie que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}^b$.

Proposition (3.1.5) : Soit



le diagramme habituel, où r est une rétraction lisse, transverse à X en $x \in W \cap X$. Soit \mathcal{E} l'exposant idéaliste de contact de W avec X en x relativement à r .

Pour un sous-espace analytique Y de Z qui est lisse en x , les conditions suivantes sont équivalentes (dans un voisinage de x dans Z)

- a) $Y \subset \text{Sing } \mathcal{E} \cap W_0$
- b) $Y \subset X_0 \cap W_0$

où W_0 (resp. X_0) désigne la strate de Samuel de x dans W (resp. X).

Démonstration : Choisissons une base standard (f_1, \dots, f_m) pour l'idéal de X dans Z en x qui soit normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}; Z_1, \dots, Z_r)$ (cf. 1.4.18).

Montrons d'abord que $Y \subset \text{Sing } \mathcal{E} \cap W_0 \Rightarrow Y \subset X_0 \cap W_0$: dire que $Y \subset \text{Sing } \mathcal{E}$ c'est dire que $v_{\xi}(\mathcal{E}) \geq 1$ pour tout ξ dans un voisinage de x dans Y , i.e. si $\mathcal{E} = ((\mathfrak{J}, b))$ où

$$\mathfrak{J} = \left(\left\{ \begin{array}{c} b \\ f_{i,A} \end{array} \right\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < v_i}} \right)_{\mathcal{O}_{W,x}},$$

(cf. (2.2.5)) $v_{\xi}(f_{i,A}) \geq v_i - |A|$, d'où $v_{\xi}(f_i) \geq v_i$ (où $v_i = v_x(f_i)$) donc $v_Y(f_i) = v_i$. Or, si nous traduisons en termes algébriques le diagramme canonique :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{Z,x} & \longrightarrow & C_{Z,Y,x} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 C_{X,x} & \longrightarrow & C_{X,Y,x}
 \end{array}$$

nous voyons plus facilement que, puisque les $\text{in}_x f_i$ forment une base standard de $\text{in}_x(X,Z)$, si $v_Y(f_i) = v_x(f_i)$, ce diagramme est cartésien. Mais, si $Y \subset W_0$, certainement $Y \subset Z_0$, strate de Samuel de Z passant par x puisque la rétraction est lisse. Mais ceci signifie que la suite

$$(0) \rightarrow T_{Y,x} \rightarrow C_{Z,x} \rightarrow C_{Z,Y,x} \rightarrow (0)$$

est exacte et scindée, et la fait que le diagramme soit cartésien nous dit qu'il en est de même de la suite

$$(0) \rightarrow T_{Y,x} \rightarrow C_{X,x} \rightarrow C_{X,Y,x} \rightarrow (0)$$

ce qui revient à dire que $Y \subset X_0$ au voisinage de x .

(Pour tout ce qui précède, cf. chap. I, théorème (5.2.6)).

Pour montrer la réciproque, la difficulté est la suivante : puisque si $Y \subset W_0 \cap X_0$, les deux lignes du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (0) & \rightarrow & T_{Y,x} & \rightarrow & C_{Z,x} & \rightarrow & C_{Z,Y,x} & \rightarrow & (0) \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 (0) & \rightarrow & T_{Y,x} & \rightarrow & C_{X,x} & \rightarrow & C_{X,Y,x} & \rightarrow & (0)
 \end{array}$$

sont exactes et scindées, le diagramme de droite est cartésien. Encore faut-il montrer que la base standard normalisée le lit, c'est-à-dire que $v_Y(f_i) = v_x(f_i)$ dans ce cas (en effet cela nous assurera que $v_\xi(f_i) \geq i$, donc $v_\xi(\mathcal{E}) \geq 1$ pour tout ξ d'un voisinage de x dans Y) :

pour cela, on plonge localement W dans un \tilde{W} lisse, et l'on étend la rétraction $r: Z \rightarrow W$ en $\tilde{r}: \tilde{Z} \rightarrow \tilde{W}$, où $\tilde{Z} = \tilde{W} \times r^{-1}(x)$. En utilisant le fait que puisque Y et \tilde{Z} sont lisses et que $Y \subset Z_0$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{\tilde{Z}, x} & \longrightarrow & C_{\tilde{Z}, Y, x} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_{Z, x} & \longrightarrow & C_{Z, Y, x} \end{array}$$

est cartésien, on parvient à démontrer que l'on a un isomorphisme $\text{gr}_x \text{gr}_Y Z \xrightarrow{\sim} \text{gr}_x Z$. On raisonne ensuite par l'absurde en utilisant bien sûr le fait que (f_1, \dots, f_m) est une base standard normalisée.

(3.1.6) Etant maintenant convaincus que les modifications permises pour X et pour W le sont aussi pour l'exposant idéaliste de contact \mathcal{E} , occupons-nous de regarder leur effet. Il nous faut tout d'abord définir quels seront les transformés de \mathcal{E} et de la rétraction par une modification permise :

Définition (3.1.7) : Soit \mathcal{E} un exposant idéaliste sur W réduit, soit Y lisse défini par \mathcal{Q} tel que la modification de centre Y soit permise pour \mathcal{E} . Soit $W' \xrightarrow{\mathcal{E}} W$ la modification de centre Y . On appelle transformé \mathcal{E}' de \mathcal{E} par g l'exposant idéaliste ainsi défini : si $\mathcal{E} = ((\mathfrak{J}, b))$, $\mathcal{E}' = ((\mathcal{Q}^{-b}(\mathfrak{J}_{W'}), b))$ (cf. (3.1.1)).

(3.1.8) Passons maintenant aux retractions. Si $W \hookrightarrow Z$ admet une rétraction $r: Z \rightarrow W$, et si $Y \subset W$, considérons les modifications F et g de centre Y

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{\quad} & Z' \\ g \downarrow & & \downarrow F \\ W & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \xleftarrow{\quad r} & \end{array}$$

et demandons-nous s'il existe une rétraction $r' : Z' \rightarrow W'$ qui rende le diagramme commutatif, au voisinage de tout point $x' \in g^{-1}(x)$ (rappelons que, bien que cela n'apparaisse pas dans les notations, les rétractions que nous considérons sont locales, i.e. la donnée d'une rétraction est la donnée d'un voisinage U de x ($\in W$) dans Z et d'une rétraction de U sur $U \cap W$).

Remarquons que si une telle rétraction r' existe, puisque $g^{-1}(Y)$ est un diviseur de W' , il doit en être de même de $r'^{-1}(g^{-1}(Y)) = F^{-1}(r^{-1}(Y))$ puisque le diagramme doit être commutatif. Mais dans la modification F de centre Y , si nous posons $T = r^{-1}(Y)$, et si nous notons T' la transformée stricte de T dans la modification de centre Y , il est clair que sauf dans des cas triviaux, $F^{-1}(T)$ n'est pas inversible au voisinage d'un point de T' . Mais comme nous pouvons nous restreindre à de petits ouverts, posons $Z'' = Z' - T'$. Z'' est un ouvert de Z' où $F^{-1}(r^{-1}(Y))$ coïncide avec $F^{-1}(Y)$, donc est inversible. De plus, puisque $F^{-1}(r^{-1}(Y))$ est inversible dans Z'' , la flèche canonique $Z'' \rightarrow W$ se factorise par W' d'après la propriété universelle des modifications. Il est facile de voir que cette factorisation est la rétraction r' cherchée. Il faut vérifier qu'en enlevant T' nous ne perdons aucun point de W' . Mais ceci revient à montrer que $T' \cap W' = \emptyset$, ce qui est clair puisque $C_{W,Y}$ et $C_{T,Y}$ ne peuvent avoir en commun que le "vertex" Y . (La modification de centre Y "sépare" W de $r^{-1}(Y)$).

Ainsi, nous avons trouvé une rétraction $Z' \xrightarrow{r'} W'$ rendant le diagramme commutatif (attention à l'abus d'écriture : elle n'est définie que sur $Z'' = Z' - T'$).

Remarquons que, puisque au voisinage d'un point de Z'' , F coïncide avec la modification de centre $r^{-1}(Y)$, on a dans ce voisinage $F^{-1}(Y) = F^{-1}(T)$.

Remarquons maintenant que la rétraction r' est lisse : par hypothèse, on peut en effet écrire localement $Z = W \times \mathbb{C}^k$ (la rétraction r

envoyant \mathbb{C}^k sur (0)), et la propriété universelle de la modification montre que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W' & \xleftarrow{r'} & Z'' \\ \downarrow & & \downarrow F \\ W & \xleftarrow{r} & Z \end{array}$$

est cartésien. On a donc localement $Z'' = W' \times \mathbb{C}^k$, c'est-à-dire que r' est lisse.

(3.2) Nous nous proposons maintenant de démontrer, toujours sous les mêmes hypothèses, le :

Théorème (3.2.1) : Soit $F: Z' \rightarrow Z$ la modification de centre Y , avec Y lisse et $Y \subset W_0 \cap X_0$. Soit $x' \in W' \cap X'$ (en notant avec un ' les transformés stricts des sous-espaces de Z) un point de $F^{-1}(x)$.

Supposons que :

- a) $H_{W', x'}^1 = H_{W, x}^1$
 b) $H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1$.

Alors :

1) Si $r: Z \rightarrow W$ est transverse à X en x , il en est de même de $r': Z' \rightarrow W'$ en x'

2) Si (f_1, \dots, f_m) est une base standard normalisée de X dans Z en x , (cf. (1.4.18)), il en est de même de la base transformée (i.e. de la famille (f'_1, \dots, f'_m) où f'_i est la transformée stricte de f_i).

Remarque : Comme Y est lisse, il revient au même de dire que $Y \subset X_0 \cap W_0$ ou que la modification de centre Y est permise pour X et pour W .

Démontrons d'abord 1) : Nous allons utiliser le théorème de Tangence (chap. I, (5.4.5)) à la fois pour X et pour W .

Nous allons pour cela nous ramener d'abord au cas où W et Z sont lisses, en plongeant (localement en x) W dans un espace lisse \tilde{W} et en choisissant \tilde{Z} tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \tilde{Z} \\ r \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \tilde{W} \end{array}$$

soit cartésien.

Ceci entraîne que \tilde{Z} est lisse puisque r est une rétraction lisse.

Si on note $l_{x'} \in C_{X,x}/T_{Y,x}$ la droite correspondant à x' , $L_{x'}$ l'image inverse de $l_{x'}$ dans $C_{X,x}$, et de même $L_{1x'}$ l'image inverse de $l_{1x'}$ dans $C_{W,x}$, le théorème de Tangence nous dit que $L_{x'} \subset T_{X,x}$ (resp. $L_{1x'} \subset T_{W,x}$) et que l'on a des isomorphismes naturels (en notant $\tilde{F}: \tilde{Z}' \rightarrow \tilde{Z}$ la modification de \tilde{Z} de centre Y) :

$$C_{X' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} \xrightarrow{\cong} C_{X,x}/L_{x'}$$

et

$$C_{W' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} \xrightarrow{\cong} C_{W,x}/L_{1x'}$$

D'autre part le théorème de Tangence dit que $\tilde{F}^{-1}(x)$ est transverse à X' et à W' en x' .

On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{X', x'} & \xleftarrow{i} & C_{X' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{X, x} / L_{x'} \\
 \downarrow dr' & & \downarrow dr' & & \downarrow dr \\
 C_{W', x'} & \xleftarrow{j} & C_{W' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{W, x} / L_{1x'}
 \end{array}
 \quad (1) \quad (2)$$

où dr et dr' représentent les applications induites par les rétractions r et r' , et où i et j sont des immersions régulières (i.e. par exemple l'idéal définissant $C_{X' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'}$ dans $C_{X', x'}$ est engendré par une suite régulière : cf. chap. I, (5.3.2)).

Pour montrer que r' est transverse à X' en x' , il faut montrer que dr' est plat. Mais l'hypothèse de transversalité sur r (i.e. la platitude de dr) implique que la restriction de dr' à $C_{X' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'}$ est plate ; d'autre part, le carré (1) est cartésien, comme on le vérifie tout de suite en écrivant $C_{W' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} = C_{W', x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'}$ et $C_{X' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'} = C_{X', x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'}$ (toujours le théorème de Tangence) et en remarquant que $(dr')^{-1}(T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'}) = T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'}$ puisque $\tilde{F}^{-1}(x)$ s'identifie (localement en x') à $\tilde{G}^{-1}(x) \times r'^{-1}(x')$, en notant $\tilde{G} : \tilde{W}' \rightarrow \tilde{W}$ la modification de centre Y .

Rappelons maintenant le :

Lemme (3.2.2) : Soient A un anneau noëthérien gradué, I un idéal homogène de A , M un A -module gradué de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) M est plat sur A ;
- 2) M/IM est plat sur A/I et l'homomorphisme canonique : $M/IM \otimes_A Gr_I A \rightarrow Gr_I M$ est un isomorphisme.

(Ce lemme s'énonce en général dans le cas où A est local noëthérien et est connu sous le nom de critère de platitude, cf. par exemple Bourbaki, algèbre commutative, chap. III).

Nous allons appliquer ce lemme avec

$$\text{gr}_{x'} W' = A, \text{gr}_{x'} W' = M, I = \text{idéal de } C_{W' \cap \tilde{F}^{-1}(x), x'}$$

dans $C_{W', x'}$: nous venons de voir que M/IM est plat sur A/I .

D'autre part, le fait que i et j soient des immersions régulières implique que

$$\text{gr}_I A \xrightarrow{\sim} A/I [T_1, \dots, T_n]$$

et

$$\text{gr}_I M \xrightarrow{\sim} A/IM [T_1, \dots, T_n]$$

(n = nombre d'éléments de la suite régulière engendrant I).

On a donc bien $M/IM \otimes \text{Gr}_I A \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_I M$, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème. (3.2.1).

Avant de montrer la seconde partie du théorème (3.2.1), nous allons énoncer un lemme, qui est l'analogie du théorème de Tangence dans la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire où Z n'est pas lisse. Nous allons aussi associer à l'immersion de X dans Z autour de x un caractère numérique.

Lemme (3.2.3) : Les notations étant les mêmes que pour le théorème (3.2.1), supposons que $H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1$ et $H_{Z', x'}^1 = H_{Z, x}^1$. Alors :

1) le carré

$$\begin{array}{ccc} C_{f^{-1}(x), x'} & \longrightarrow & C_{F^{-1}(x), x'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{X', x'} & \longrightarrow & C_{Z', x'} \end{array}$$

est cartésien (f étant la modification $X' \rightarrow X$ de centre Y).

2) $\text{Tor}_i^{\text{gr}_{x'} Z'}(\text{gr}_{x'}(F^{-1}(x)), \text{gr}_{x'} X') = 0$ pour tout $i \geq 1$. (En particulier, pour $i = 1$, cela est équivalent à $\text{in}_{x'}(X', Z') \cap \text{in}_{x'}(F^{-1}(x), Z') = \text{in}_{x'}(X', Z') \cdot \text{in}_{x'}(F^{-1}(x), Z')$).

Remarque (3.2.4) : Dans le cas où Z est lisse (et donc aussi $F^{-1}(x)$) la condition 2) ci-dessus est équivalente à la transversalité de $F^{-1}(x)$ et de X' en x' (car elle implique que $T_{f^{-1}(x), x'}$ est engendré par une suite régulière pour $\text{gr}_{x'} X'$: cf. chap. I, (5.3.2) et chap. II, (1.4.9)). On pourra donc dire par analogie que $F^{-1}(x)$ est transverse à X' dans Z' en x' bien qu'aucune hypothèse de lissité n'intervienne plus.

Démonstration :

1) Plongeons localement Z dans un espace lisse \tilde{Z} , et notons \tilde{F} la modification de \tilde{Z} ayant pour centre Y : d'après le théorème de Tangence, le carré

$$\begin{array}{ccc}
 C_{f^{-1}(x), x'} & \longrightarrow & C_{\tilde{F}^{-1}(x), x'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{X', x'} & \longrightarrow & C_{Z', x'}
 \end{array}$$

est cartésien.

En appliquant ce même théorème à Z' , on obtient que

$$\begin{array}{ccc}
 C_{F^{-1}(x), x'} & \longrightarrow & C_{\tilde{F}^{-1}(x), x'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{Z', x'} & \longrightarrow & C_{\tilde{Z}', x'}
 \end{array}$$

est cartésien.

La combinaison de ces deux diagrammes entraîne par un résultat classique que le carré du lemme est cartésien.

2) Nous avons vu que la transversalité de $\tilde{F}^{-1}(x)$ et de X' (transversalité qui est donnée par le théorème de Tangence) pouvait s'exprimer par la nullité des $\text{Tor}_i^{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'}(\text{gr}_{x'}(\tilde{F}^{-1}(x)), \text{gr}_{x'} X')$. On a de même $\text{Tor}_i^{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'}(\text{gr}_{x'}(\tilde{F}^{-1}(x)), \text{gr}_{x'} Z') = 0$.

Or on a les suites exactes

$$0 \rightarrow \text{in}_{x'}(X', Z') \rightarrow \text{gr}_{x'} Z' \rightarrow \text{gr}_{x'} X' \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned}
 (*) \quad 0 &\rightarrow \text{Tor}_{\text{gr}_{x'} Z'}^1(\text{gr}_{x'} F^{-1}(x), \text{gr}_{x'} X') \rightarrow \text{gr}_{x'} F^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} Z'} \text{in}_{x'}(X', Z') \rightarrow \\
 &\hookrightarrow \text{gr}_{x'} F^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} Z'} \text{gr}_{x'} Z' \rightarrow \text{gr}_{x'} F^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} Z'} \text{gr}_{x'} X' \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

On a aussi une identification canonique

$$\begin{aligned} \text{gr}_{x'} F^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} Z'} ? &\simeq \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{gr}_{x'} Z' \otimes_{\text{gr}_{x'} Z'} ? \\ &\simeq \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} ? \end{aligned}$$

La suite (*) s'identifie donc à

$$\begin{aligned} (**) \quad 0 \rightarrow \text{Tor}_{\text{gr}_{x'} Z'}^1(\text{gr}_{x'} F^{-1}(x), \text{gr}_{x'} X') &\rightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{in}_{x'}(X', Z') \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{gr}_{x'} Z' &\rightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{gr}_{x'} X' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mais par définition, on a aussi la suite exacte :

$$\begin{aligned} (***) \quad \text{Tor}_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'}^1(\text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x), \text{gr}_{x'} Z') &\rightarrow \text{Tor}_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'}^1(\text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x), \text{gr}_{x'} X') \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{in}_{x'}(X', Z') &\rightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{gr}_{x'} Z' \rightarrow \text{gr}_{x'} \tilde{F}^{-1}(x) \otimes_{\text{gr}_{x'} \tilde{Z}'} \text{gr}_{x'} X' \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par hypothèse les deux Tor^1 figurant dans (***) sont nuls. Par suite, comparant (**) et (***), on en déduit le résultat.

Si le lecteur dispose d'un papier de plus grande dimension, il se convaincra qu'en continuant les suites exactes, on montre de la même façon que $\text{Tor}^i(,) = 0$.

Définition (3.2.5) : Soit $X \rightarrow Z$ une immersion fermée, x un point de X . Soit (f_1, \dots, f_m) une base standard de l'idéal définissant X dans $\mathcal{O}_{Z, x}$ (cf. chap. II (1.4.18)). Soit $v_i = v_x(f_i)$. Alors la suite (v_1, \dots, v_m) ne dépend que de l'immersion. On pose

$$v_x^*(X, Z) = (v_1, \dots, v_m).$$

Le plan de la démonstration va maintenant être le suivant :

a) Nous allons montrer que $v_{x'}^*(X', Z') = v_x^*(X, Z)$ en montrant que ces deux suites sont égales à $v_x^*(f^{-1}(x), F^{-1}(x))$.

b) Si (f_1, \dots, f_m) est une base standard normalisée de X dans Z en x , nous montrerons que $v_x(f_i) \geq v_{x'}(f'_i)$, et que l'égalité (pour tout i) implique que les $\text{in}_{x'}(f'_i)$ sont "indépendants", donc qu'ils forment une base standard de X' dans Z' en x' , à cause de a).

c) L'hypothèse que la base standard f_1, \dots, f_m est normalisée entraînera que, pour tout i , $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$. Il sera alors clair que la base (f'_1, \dots, f'_m) est encore normalisée.

Pour montrer a), remarquons d'abord que le théorème de l'annexe nous donne des isomorphismes naturels $C_{f^{-1}(x), x'} \xrightarrow{\sim} C_{X, x} / L_{x'}$ et $C_{F^{-1}(x), x'} \xrightarrow{\sim} C_{Z, x} / L_{x'}$, d'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{f^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{X, x} / L_{x'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{F^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{Z, x} / L_{x'} \end{array} .$$

Ce qui implique que $v_x^*(X, Z) = v_{x'}^*(f^{-1}(x), F^{-1}(x))$.

D'autre part, la première partie du lemme (3.2.3) nous montre que si g'_1, \dots, g'_n est une base standard de X' dans Z' en x' , si $\varphi'_i = \text{in}_{x'} g'_i$ et si $\bar{\varphi}'_i$ est la classe de φ'_i modulo $\text{in}_{x'}(F^{-1}(x), Z')$, alors les $\bar{\varphi}'_i$ engendrent l'idéal $\text{in}_{x'}(f^{-1}(x), F^{-1}(x))$.

La seconde partie du même lemme entraîne que les $\bar{\varphi}'_i$ forment un système minimal de générateurs de $\text{in}_{x'}(f^{-1}(x), F^{-1}(x))$.

En effet, si on avait une relation

$$\bar{\varphi}_i^! = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{Q}_j \bar{\varphi}_j^! \quad (\bar{Q}_j \in \text{gr}_{X'} F^{-1}(x))$$

on en déduirait une relation

$$\varphi_i^! - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \varphi_j^! = \phi$$

avec $Q_j \in \text{gr}_{X'} Z'$ tel que $Q_j \text{ mod } \text{in}_{X'}(F^{-1}(x), \text{gr}_{X'} Z') = \bar{Q}_j$ et $\phi \in \text{in}_{X'}(F^{-1}(x), Z') \cap \text{in}_{X'}(X', Z')$.

Par conséquent $\phi \in \text{in}_{X'}(F^{-1}(x), Z') \cdot \text{in}_{X'}(X', Z')$. Les éléments de $\text{in}_{X'}(F^{-1}(x), Z')$ ayant au moins le degré 1, ϕ est une combinaison des $\varphi_k^!$ de degré strictement inférieur à celui de $\varphi_i^!$. Par conséquent

$$\phi = \sum_{j=1}^{i-1} R_j \varphi_j^! .$$

C'est contradictoire avec le fait que $(\varphi_1^!, \dots, \varphi_m^!)$ soit une base minimale de $\text{in}_{X'}(X', Z')$.

En particulier $\bar{\varphi}_i^! \neq 0$. Il a donc même degré que $\varphi_i^!$ et

$$v_X^*(X', Z') = v_X^*(f^{-1}(x), F^{-1}(x)) .$$

On peut aussi, comme l'a fait remarquer Giraud, utiliser les techniques de résolution minimales introduites en algèbre homologique.

Passons à b). Soit f_1, \dots, f_m une base standard normalisée de X dans Z en x ; comme Y est permis dans X , nous avons pour tout i l'égalité $v_X(f_i) = v_Y(f_i)$ (voir la démonstration de la proposition (3.1.5)) : ceci entraîne que, pour tout i , Y est permis pour l'hyper-surface X_i d'équation f_i dans Z .

En effet, il suffit de faire les observations suivantes :

1) Si $\text{in}_x f_i$ (resp. $\text{in}_Y f_i$) est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_x Z$ (resp. $\text{gr}_Y Z$) alors

$$\text{gr}_x X_i = \text{gr}_x Z / \text{in}_x f_i \quad (\text{resp. } \text{gr}_Y X_i = \text{gr}_Y Z / \text{in}_Y f_i) .$$

2) La rétraction r étant transverse à X en x , et (f_1, \dots, f_m) étant une base standard, donc adaptée à r , $\text{in}_x f_i$ est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_x Z$.

3) Si $\text{in}_x f_i$ est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_x Z$ et si $v_Y(f_i) = v_x(f_i)$ alors $\text{in}_Y f_i$ est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_Y Z$.

1) est clair ; désignant, suivant les notations du lemme (1.4.12) du chap. II, par \bar{N} l'idéal engendré par $\bigoplus_{i \geq 1} \text{gr}_x^i W$ dans $\text{gr}_x Z$, 2) vient du fait que $\text{in}_{\bar{N}}(\text{in}_x f_i) = \lambda_i(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x Z) \simeq \text{gr}_x Z$, ce qui entraîne que $\text{in}_x f_i$ lui-même est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_x Z$. De même désignant par $\bar{\mathcal{N}}$ l'idéal engendré par $\bigoplus_{i \geq 1} \text{gr}_Y^i W$ dans $\text{gr}_Y Z$, 3) vient du fait que $\text{in}_{\bar{\mathcal{N}}}(\text{in}_Y f_i) = \mu_i(Z) \in \mathcal{O}_Y[Z]$ où μ_i s'envoie sur λ_i par l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y(Z)$ sur $\mathbb{C}[Z]$. Y étant contenu dans W_0 , $\text{gr}_Y W$ est \mathcal{O}_Y -plat, donc localement libre, et $\mu_i(Z)$ est donc non diviseur de zéro dans $\text{gr}_Y Z$.

De tout ceci on déduit, puisque $v_x(f_i) = v_Y(f_i)$, que

$$\begin{array}{ccc} C_{X_i, x} & \longrightarrow & C_{X_i, Y, x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{Z, x} & \longrightarrow & C_{Z, Y, x} \end{array}$$

est cartésien, ce qui, Z étant normalement plat le long de Y en x , entraîne la même chose pour X_i .

Si l'on note X'_i le transformé strict de X_i , le théorème (5.1.3) du chapitre I nous dit que $H^1_{X'_i, x'} \leq H^1_{X_i, x}$. Pour en déduire que $v_{x'}(f'_i) \leq v_x(f_i)$, nous aurons besoin d'une dernière remarque, conséquence de la remarque 2) ci-dessus.

Pour tout n , on a l'égalité

$$H^0_{Z, x}(n+v_i) - H^0_{Z, x}(n) = H^0_{X_i, x}(n+v_i) .$$

Il est maintenant aisé de voir que $v_x(f_i) \leq v_x(f'_i)$: l'égalité de la première partie du lemme implique en effet que $m_x(X_i) = v_i \cdot m_x(Z)$, $m_x(X_i)$ désignant la multiplicité de X_i en x . On a de même $m_{x'}(X'_i) = v_{x'}(f'_i) \cdot m_{x'}(Z')$.

Or on a, par hypothèse, $H^1_{Z, x} = H^1_{Z', x'}$, ce qui implique que $m_x(Z) = m_{x'}(Z')$, et nous venons de voir que $H^1_{X_i, x} \geq H^1_{X'_i, x'}$, ce qui implique que $m_x(X_i) \geq m_{x'}(X'_i)$.

Supposons maintenant que $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$. Soit \bar{N}' l'idéal engendré par $\bigoplus_{i \geq 1} \text{gr}_{x'} W^i$ dans $\text{gr}_{x'} Z'$. On a alors $\text{in}_{\bar{N}'}(\text{in}_{x'} f'_i) = \lambda_i(Z')$; cela entraîne donc que $\text{in}_{x'} f'_i$ est non diviseur de zéro dans $\text{gr}_{x'} Z'$ (et donc que $H^0_{X_i, x} = H^0_{X'_i, x'}$, et aussi $H^1_{X_i, x} = H^1_{X'_i, x'}$: on peut donc appliquer le théorème de Tangence pour X_i , ce qui donne un isomorphisme naturel :

$$C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'} \xrightarrow{\sim} C_{X_i, x} / L_{x'}$$

d'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{X_i, x} / L_{x'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{F^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{Z, x} / L_{x'} \end{array} .$$

La première partie du lemme (3.2.3) appliquée à X_i implique que $C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'}$ est défini dans $C_{F^{-1}(x), x'}$ par une équation, à savoir la restriction de $\text{in}_{x'} f'_i$ à $F^{-1}(x)$.

A cette équation $\text{in}_{x'} f'_i$ correspond par l'isomorphisme μ une équation dans $C_{Z, x} / L_{x'}$, donc dans $C_{Z, x} = C_{Z, x} / L_{x'} \times L_{x'}$, qui n'est autre que $\text{in}_{x'} f'_i$ puisqu'elle doit définir $C_{X_i, x}$ dans $C_{Z, x}$: on voit ainsi que les $\text{in}_{x'} f'_i$ sont "indépendants" (i.e. qu'ils forment un système minimal de générateurs de l'idéal qu'ils engendrent) car toute relation entre les $\text{in}_{x'} f'_i$ donnerait une relation entre leurs restrictions à $F^{-1}(x)$ et donc une relation entre les $\text{in}_{x'} f'_i$, ce qui est exclu par hypothèse.

On voit donc que si l'on suppose $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$ pour tout i , les $\text{in}_{x'} f'_i$ font partie d'un système minimal de générateurs de $\text{in}_{x'}(X', Z')$; comme nous avons vu d'autre part que $v_x^*(X, Z) = v_{x'}^*(X', Z')$, cela implique qu'ils engendrent $\text{in}_{x'}(X', Z')$.

Montrons donc que $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$ pour $1 \leq i \leq m$:

Nous allons raisonner par récurrence et supposer que l'on a $v_x(f_j) = v_{x'}(f'_j)$ pour $0 \leq j < i$: ceci entraîne comme plus haut que f'_1, \dots, f'_{i-1} font partie d'une base standard de X' dans Z' en x' .

Si on suppose que $v_x(f'_i) < v_x(f_i)$, on en déduit une relation

$$\text{in}_{x'} f'_i = \sum_{j=0}^{i-1} Q_j \text{in}_{x'} f'_j \quad \text{avec } Q_j \in \text{gr}_{x'} Z'.$$

Par restriction à l'espace $r'^{-1}(x')$, cette relation donne une relation que l'on peut écrire :

$$\overline{\text{in}_{x'} f'_i} = \sum_{j=0}^{i-1} \overline{Q_j} \lambda'_j(Z').$$

D'autre part la base standard f_1, \dots, f_m est normalisée par hypothèse : si on écrit

$$f_i = \sum f_{iA} z^A \quad (\text{avec } f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}) ,$$

on a $f_{iA} = 0$ si $A \in \text{Exp}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})$ ($\lambda_j =$ restriction de $\text{in}_x f_i$ à $r^{-1}(x)$).
 Donc si on écrit $f'_i = \sum f'_{iA} z'^A$, on a aussi $f'_{iA} = 0$ si $A \in \text{Exp}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{i-1})$
 (car, comme on l'a déjà remarqué, on obtient $\lambda'_j(Z')$ en remplaçant Z
 par Z' dans $\lambda_j(Z)$).

La relation ci-dessus implique donc que $\overline{\text{in}_{x'} f'_i} = 0$, soit
 $\text{in}_{x'} f'_i \in \bar{N}' \cap \text{in}_{x'}(X', Z') = \bar{N}' \cdot \text{in}_{x'}(X', Z')$ grâce à la transversalité de r'
 ceci donne une relation de la forme

$$\text{in}_{x'} f'_i = \sum_{j=0}^{i-1} Q'_j \text{in}_{x'} f'_j$$

avec maintenant $Q'_j \in \bar{N}'$, où \bar{N}' représente l'idéal engendré par les
 éléments de degré positif dans $\text{gr}_{x'} W'$.

En regardant cette relation modulo \bar{N}'^2 , on en déduirait de
 même une relation analogue avec $Q_j \in \bar{N}'^2$. En continuant ainsi indéfini-
 ment, on aurait $\text{in}_{x'} f'_i = 0$ (car $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{N}'^n = 0$), ce qui est absurde.

On a donc $v_x(f_i) = v_x(f'_i)$, ce qui achève de montrer que
 f'_1, \dots, f'_m est une base standard.

Il est clair que cette base standard est normalisée, puisque,
 comme nous l'avons déjà noté, $\lambda_i(Z)$ et $\lambda'_i(Z')$ sont formellement les
 mêmes et que $f'_i = \sum f'_{iA} z'^A$, f'_{iA} étant la transformée stricte de f_{iA} .

Corollaire (3.2.6) : Les hypothèses sont les mêmes que pour le théo-
 rème (3.2.1). Soit $\mathcal{E} = ((I, b))$ l'exposant idéaliste de contact de W
 avec X en x ; alors le transformé \mathcal{E}' de \mathcal{E} (i.e. $\mathcal{E}' = ((\mathcal{Q}^{-b} I \mathcal{O}_{W'}, b))$ si
 \mathcal{Q} est l'équation du diviseur exceptionnel de la modification) est
 l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' .

On a vu en effet en (2.3.5) que l'on pouvait prendre

$$b = \prod_{i=1}^m (v_i!) \quad \text{et} \quad I = \left(\frac{b}{v_i - |A|} \right)_{f_{iA}} \quad \text{pour} \quad |A| < v_i \quad : \quad \text{on a alors } \mathcal{E}' = ((I', b))$$

avec $I' = \left(\frac{b}{v_i - |A|} \right)_{f_{iA}}$ pour $|A| < v_i$ (car, par définition,

$$f'_i = \sum f'_{iA} z^A = \mathcal{Q}^{-v_i} (\sum f_{iA} z^A \mathcal{Q}^{|A|}) \quad \text{d'où} \quad f'_{iA} = f_{iA} \mathcal{Q}^{|A| - v_i} \quad \text{et}$$

$\frac{b}{v_i - |A|} f'_{iA} = \frac{b}{v_i - |A|} f_{iA} \mathcal{Q}^{-b}$); le fait que (f'_1, \dots, f'_m) soit une base standard normalisée de W' dans Z' en x' montre bien que \mathcal{E}' est l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' .

(3.3) Nous allons maintenant montrer un théorème important, qui est en partie une conséquence du théorème (3.2.1) :

Théorème de stabilité I (3.3.1) : Soient $W \rightarrow Z$ un r -immersion d'espaces analytiques, X un sous-espace analytique de Z , x un point de $W \cap X$. On suppose qu'il existe une rétraction r (localement en x) transverse à X en x . Soient \mathcal{E} l'exposant idéaliste de contact de W avec X en x relativement à r , Y un sous-espace lisse de $W_0 \cap X_0$, où W_0 (resp. X_0) désigne la strate de Samuel de W (resp. X) passant par x .

Soit $F: Z' \rightarrow Z$ (resp. $f: X' \rightarrow X$, resp. $G: W' \rightarrow W$) la modification de centre Y dans Z (resp. X , resp. W). Alors pour un point $x' \in G^{-1}(x)$ tel que $H_{W', x'}^1 = H_{W, x}^1$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $x' \in X'$ et $H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1$

b) $x' \in \text{Sing } \mathcal{E}'$ où \mathcal{E}' est l'exposant idéaliste transformé de \mathcal{E} par G (cf. (3.1.7)).

De plus si a) ou b) est satisfaite,

1) la rétraction r' transformée de r par la modification F (cf. (3.1.8)) est transverse à X' en x'

2) \mathcal{E}' est l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' .

Remarque (3.3.2) : Si l'on se place dans le cas où W est lisse (on a alors évidemment $H_{W', x'}^1 = H_{W, x}^1$) on voit que la connaissance de l'exposant idéaliste de contact $\mathcal{E} = ((J, b))$ détermine :

1) les sous-espaces Y de $W \cap X$ qui sont des centres de modification permis (car il est équivalent de dire que X est normalement plat le long de Y en x ou que $Y \subset \text{Sing } \mathcal{E}$ (3.1.5)).

2) les points x' de $G^{-1}(x)$ qui appartiennent à X' et qui sont "aussi mauvais que x ", c'est-à-dire qui sont tels que $H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1$

(car ce sont exactement les points de $\text{Sing } \mathcal{E}' \cap G^{-1}(x)$ à cause du théorème de stabilité I).

Si l'on suppose que l'on a choisi un espace W tel que $\dim_x W \leq \dim_x X$, ce qui sera réalisé par la suite, on voit que si l'on se donne un espace X , ces deux informations sont données par $\mathcal{E} = ((J, b))$ qui est de nature dimensionnelle plus petite que X (car $\dim. \text{Supp}(J) < \dim_x W \leq \dim_x X$) : il y a là une possibilité de récurrence sur la dimension pour désingulariser X .

Il faudra pouvoir aussi choisir un espace W tel que son transformé W' contienne tous les points aussi mauvais que x : nous étudierons ce problème plus tard.

Preuve du théorème (3.3.1) : a) \Rightarrow b) résulte du corollaire (3.2.6) qui dit que sous l'hypothèse a) \mathcal{E}' est l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' . On a donc $v_{x'}(\mathcal{E}') = d_{x'}(W', X')$ (2.3.12) et $d_{x'}(W', X') \geq 1$; l'inégalité $v_{x'}(\mathcal{E}') \geq 1$ est équivalente par définition à $x' \in \text{Sing}(\mathcal{E}')$ (3.1.3).

D'autre part nous avons vu que sous l'hypothèse a), les propriétés 1) et 2) étaient vérifiées ((3.2.1) et (3.2.6)).

Il nous reste donc à montrer que b) \Rightarrow a). Nous allons d'abord voir que l'on peut se ramener au cas où W (et Z) sont lisses en x .

Soit (f_1, \dots, f_m) une base standard normalisée de X dans Z en x (par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x}, Z)$). Si l'on pose $f_i = \sum f_{iA} z^A$, nous avons vu que l'on pouvait prendre $\mathcal{E} = ((J, b))$ avec

$$b = \prod_{i=1}^m (v_i!) \text{ et } J = \left(\begin{array}{c} b \\ v_i - |A| \\ f_{iA} \end{array} \right) \text{ pour } |A| < v_i \quad (v_i = v_x(f_i)).$$

$$\text{On a alors } \mathcal{E}' = \left(\left(\begin{array}{c} b \\ v_i - |A| \\ f'_{iA} \end{array} \right) \right) \text{ (et donc } f'_{iA} = \mathcal{Q}^{|A| - v_i} \cdot f_{iA} \circ G \text{).}$$

On a alors, pour $x' \in G^{-1}(x)$, les équivalences :

$$x' \in \text{Sing } \mathcal{E}' \Leftrightarrow v_{x'}(\mathcal{E}') \geq 1 \Leftrightarrow v_{x'}(J') \geq b \Leftrightarrow v_{x'}(f'_i) \geq v_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

mais comme on sait que $v_{x'}(f'_i) \leq v_x(f_i) = v_i$, on voit que
 $\text{Sing } (\mathcal{E}') \cap G^{-1}(x) = \{x' \in G^{-1}(x) \mid v_{x'}(f'_i) = v_i \quad (1 \leq i \leq m)\}$. L'hypothèse b)

est donc équivalente à $v_{x'}(f'_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq m$: ceci entraîne que les $\text{in}_{x'}(f'_i)$ sont indépendants (comme dans la démonstration du théorème précédent), mais pas nécessairement a priori qu'ils engendrent l'idéal $\text{in}_{x'}(X', Z')$.

Plongeons localement en x W dans un espace lisse \tilde{W} et prenons \tilde{Z} tel que la diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \tilde{Z} \\ r \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \tilde{W} \end{array}$$

soit cartésien.

Nous allons montrer qu'il existe une base standard (h_i) de W dans \tilde{W} en x telle que

$$v_x(h_i) = v_Y(h_i) = v_{x'}(h'_i)$$

en utilisant le théorème (3.2.1) : nous avons pour cela besoin de l'existence d'une rétraction transverse à W en x , existence qui va résulter du lemme suivant :

Lemme (3.3.3) : Soient Z un espace analytique lisse, W un sous-espace lisse de Z , X un sous-espace de Z , x un point de $X \cap W$, supposons que $T_{W,x} \subset T_{X,x}$; il existe alors, localement en x , une rétraction de Z sur W transverse à X en x .

On a en effet localement : $Z \xrightarrow{\sim} W \times \mathbb{C}^1$; la première projection $Z \rightarrow W$ est alors une rétraction transverse à X en x puisqu'elle induit sur $C_{X,x}$ une application $p : C_{X,x} \rightarrow T_{W,x}$ qui est évidemment plate, puisque l'inclusion $T_{W,x} \subset T_{X,x}$ implique que $C_{X,x} \xrightarrow{\sim} T_{W,x} \times C_{X,x} / T_{W,x}$, p s'identifiant à la première projection.

Si on applique ce lemme avec \tilde{W} à la place de Z , W à la place de X et V un sous-espace lisse de \tilde{W} ayant $L_{x'}$ pour espace tangent en x à la place de W (on a $L_{x'} \subset T_{W,x}$ puisque par hypothèse W est normalement plat le long de Y en x : cf. chap. I, théorème (5.2.6) et $H_{W',x'}^1 = H_{W,x}^1$ chap. I, cor. (5.4.5)), on voit qu'il existe une rétraction $\tilde{W} \rightarrow V$ transverse à W en x . Soit V' la modification de V de centre Y . On a vu alors dans la démonstration du théorème (3.2.1), que l'on peut appliquer puisque l'on a $x' \in V'$ et $H_{W,x}^1 = H_{W',x'}^1$, qu'une base standard normalisée (pour cette rétraction) (h_1, \dots, h_r) satisfaisait à $v_x(h_i) = v_Y(h_i) = v_{x'}(h'_i)$ ($1 \leq i \leq r$).

Montrons maintenant que l'hypothèse $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$ nous permet de trouver des équations \tilde{f}_i sur \tilde{Z} qui relèvent f_i à un élément inversible près et qui satisfont aux égalités :

$$v_i = v_Y(\tilde{f}_i) = v_x(\tilde{f}_i) = v_{x'}(\tilde{f}'_i).$$

Nous allons faire le même raisonnement que plus haut en remplaçant W par le sous-espace X_i de Z d'équation f_i , l'hypothèse $v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$ et $H_{Z,x}^1 = H_{Z',x'}^1$ impliquant $H_{X_i,x}^1 = H_{X'_i,x'}^1$: cela nous permet de trouver une base standard (g_1, \dots, g_p) de X_i dans \tilde{Z} satisfaisant à $v_x(g_i) = v_Y(g_i) = v_{x'}(\tilde{g}'_i)$.

Comme $C_{X_i,x}$ est défini dans $C_{\tilde{Z},x}$ par $(\text{In}_x g_1, \dots, \text{In}_x g_p)$ il existe un g_j , soit g_i par exemple, tel que $\text{In}_x g_i$ relève $\text{In}_x f_i$. En effet $\text{in}_x(X_i, Z) = \text{in}_x(X_i, \tilde{Z}) + \text{in}_x(Z, \tilde{Z}) / \text{in}_x(Z, \tilde{Z})$ est un idéal principal engendré par les images des $\text{in}_x g_j$ d'une part, $\text{in}_x f_i$ d'autre part. On a donc $v_x(g_i) = v_x(f_i)$. D'autre part, la restriction \tilde{g}_i de g_i à Z

appartient à l'idéal (f_i) qui définit X_i dans Z : on a ainsi $\bar{g}_i = \lambda f_i$ où λ est inversible ; l'élément g_i est ainsi l'élément \tilde{f}_i que nous cherchons.

On a alors que les $(\text{in}_x \tilde{f}_i)$ et les $(\text{in}_x h_j)$ engendrent l'idéal $\text{in}_x(X, \tilde{Z})$ (puisque par construction l'image de $\text{in}_x \tilde{f}_i$ dans $\text{gr}_x Z$ est $\text{in}_x f_i$). On peut donc extraire de la famille $((\tilde{f}_i), (h_j))$ une base standard de l'idéal $\text{in}_x(X, \tilde{Z})$ qui vérifie $v_{x'}(\tilde{f}'_i) = v_x(\tilde{f}_i) = v_Y(\tilde{f}_i)$ et $v_{x'}(h'_j) = v_x(h_j) = v_Y(h_j)$.

La démonstration de $b) \Rightarrow a)$ est alors techniquement compliquée, bien que plus simple au point de vue théorique que ce qui précède, n'utilisant pas la notion de normalisation d'une base standard ; nous allons nous contenter d'indiquer les énoncés des deux lemmes essentiels pour cette démonstration.

Le lecteur consciencieux pourra se référer pour les démonstrations à Hironaka : Annals 64, chap. III, § 6, Th. 5 et Kyoto Journal, 70, Th. III ou bien au futur livre résolvant.

Lemme (3.3.4) : Soient X un sous-espace analytique d'un espace lisse Z , $W \rightarrow Z$ une immersion, x un point de $W \cap X$, r une rétraction : $Z \rightarrow W$ transverse à X en x , Y un sous-espace lisse de $X \cap W$ permis pour X en x , x' un point de $G^{-1}(x)$, G étant la modification de W avec pour centre Y . Alors, s'il existe, une base standard (f_1, \dots, f_m) de X dans Z en x telle que $v_Y(f_i) = v_x(f_i) = v_{x'}(f'_i)$, on a

$$v_{x'}^*(X', Z') = v_x^*(X, Z)$$

(et donc (f'_i) est une base standard de X' dans Z' en x').

Lemme (3.3.5) : Sous les conditions du lemme précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes pour un point $x' \in G^{-1}(x)$:

- a) $v_{x'}^*(X', Z') = v_x^*(X, Z)$
- b) $H_{X', x'}^1 = H_{X, x}^1$.

(Remarquons que nous avons déjà démontré que $b) \Rightarrow a)$ au cours de la démonstration du théorème (3.2.1)).

Nous allons maintenant donner quelques corollaires du théorème (3.3.1).

Soit X un espace analytique, Γ une courbe analytique irréductible dans X , x un point de Γ .

Effectuons la modification F_1 de centre (x) , et notons $\Gamma^{(1)}$ (resp. $X^{(1)}$) les transformés stricts de Γ (resp. X) : $\Gamma^{(1)}$ est encore irréductible, et il y a un seul point de $\Gamma^{(1)}$ que nous noterons $x^{(1)}$ tel que $F_1(x^{(1)}) = x$. Nous pouvons donc continuer le processus en faisant la modification de centre $x^{(1)}$ dans $X^{(1)}$, etc... On a alors :

Corollaire (3.3.6) : Soit Γ une courbe irréductible en x . Il existe un entier N tel que $X^{(n)}$ soit normalement plat le long de $\Gamma^{(n)}$ en $x^{(n)}$ pour tout $n \geq N$.

Remarquons d'abord que l'on peut supposer Γ lisse en x , puisque l'on a vu que l'on résolvait Γ avec un nombre fini de modifications ponctuelles.

Nous aurons besoin d'un théorème très important en lui-même (qui est une conséquence du théorème de Tangence).

Théorème (3.3.7) (Théorème de stabilisation) : Soit X un espace analytique. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, soit $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_{\alpha-1}$ une modification permise pour $X_{\alpha-1}$ (avec $X_0 = X$), et soit $x_\alpha \in X_\alpha$ tel que $f_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}) = x_\alpha$. Alors il existe un entier N tel que, si $n \geq N$, on ait $H_{X_n, x_n} = H_{X_N, x_N}$.

Nous admettrons ce théorème, et allons montrer que l'entier N convient pour le corollaire (3.3.6).

On a que $T_{\Gamma^{(N)}, x^{(N)}} \subset T_{X^{(N)}, x^{(N)}}$ car on a par hypothèse $H_{X^{(N)}, x^{(N)}}^1 = H_{X^{(N+1)}, x^{(N+1)}}^1$: le théorème de Tangence dit alors que $l_{x^{(N+1)}} \subset T_{X^{(N)}, x^{(N)}}$, $l_{x^{(N+1)}}$ étant la droite de $C_{X^{(N)}, x^{(N)}}$ correspondant à $x^{(N+1)}$. D'autre part on a $x^{(N+1)} \in \Gamma^{(N+1)}$, donc $l_{x^{(N+1)}} \subset C_{\Gamma^{(N)}, x^{(N)}} = T_{\Gamma^{(N)}, x^{(N)}}$. On peut donc, grâce au lemme (3.3.3), trouver une rétraction r_N de $Z^{(N)}$ sur $\Gamma^{(N)}$ transverse à $X^{(N)}$ en $x^{(N)}$.

Or, pour $n \geq N$, on est dans l'hypothèse a) du théorème de stabilité I : on en déduit que la rétraction r_n (transformée de r_{n-1}) est transverse à $X^{(n)}$ en $x^{(n)}$. On a donc, pour tout $n \geq N$, $d_{x^{(n)}}(\Gamma^{(n)}, X^{(n)}) \geq 1$. Mais nous avons

$$d_{x^{(n)}}(\Gamma^{(n)}, X^{(n)}) = d_{x^{(n-1)}}(\Gamma^{(n-1)}, X^{(n-1)}) - 1 \text{ puisque}$$

$$d_{x^{(n)}}(\Gamma^{(n)}, X^{(n)}) = v_{x^{(n)}}(\mathcal{E}^{(n)}) \text{ d'après le théorème de stabilité I et}$$

que $\mathcal{E}^{(n)}$ est un exposant idéaliste sur $\Gamma^{(n)}$ qui est de dimension 1 : on peut donc écrire $\mathcal{E}^{(n-1)} = ((t^{a_{n-1}}, b_{n-1}))$ avec $v_{x^{(n-1)}}(\mathcal{E}^{(n-1)}) = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$,

$$\text{et } \mathcal{E}^{(n)} = ((t^{a_{n-1}-b_{n-1}}, b_{n-1})), \text{ d'où } v_{x^{(n)}}(\mathcal{E}^{(n)}) = v_{x^{(n-1)}}(\mathcal{E}^{(n-1)}) - 1.$$

On en déduit alors que nécessairement $d_{x^{(n)}}(\Gamma^{(n)}, X^{(n)}) = +\infty$ pour $n \geq N$, ce qui est équivalent à dire que $X^{(n)}$ est normalement plat le long de $\Gamma^{(n)}$ en $x^{(n)}$ (lemme (1.5.1)).

Corollaire (3.3.8) : Sous l'hypothèse que $W \rightarrow Z$ est une r -immersion, et que $r : Z \rightarrow W$ est transverse à X en x , soit \mathcal{E} l'exposant idéaliste de contact de W avec W en x : il existe alors un voisinage Ω de x dans Z tel que l'on ait :

$$\text{Sing}(\mathcal{E}) \cap W_0 \cap \Omega = X_0 \cap W_0 \cap \Omega.$$

Remarquons que nous avons déjà vu que ces deux ensembles analytiques avaient les mêmes sous-espaces lisses (proposition (3.1.5)).

Pour montrer qu'ils ont même germe en x , il suffit de voir que tout germe de courbe irréductible (en x) contenue dans l'un est contenue dans l'autre (car il est facile de voir que si $X \subset Y$ sont deux germes d'espaces analytiques en 0 différents, il existe un germe de courbe irréductible dans Y tel que $\Gamma \cap X = \{0\}$).

Soit donc $\Gamma \subset \text{Sing}(\mathcal{E}) \cap W_0$ une courbe irréductible en x . Nous allons montrer comment le théorème de stabilité I nous permet de nous ramener au cas où Γ est lisse.

Soit Γ' (resp. X') (resp. W') la modification de Γ de centre x dans Γ (resp. X) (resp. W) et soit x' l'unique point de Γ' se projetant sur X . Soit \mathcal{E}' le transformé de \mathcal{E} . On remarque d'abord que Γ' est inclus dans W'_0 strate de W' des points ayant $H_{W,x}$ pour fonction de Samuel. En effet soit ξ un point quelconque de Γ , ξ' l'unique point de Γ' au-dessus de ξ . On a les égalités et inégalités suivantes :

$$H_{W',x'}^1 \leq H_{W,x}^1 = H_{W,\xi}^1 = H_{W',\xi'}^1 \leq H_{W',x}^1 .$$

(La fonction de Samuel diminue par modification permise, augmente par spécialisation).

D'autre part, en dehors de x , la modification étant un isomorphisme

$$\Gamma' - \{x'\} \subset \text{Sing} \mathcal{E}' - \{x'\} .$$

Mais $\text{Sing} \mathcal{E}'$ étant fermé, on a aussi $\Gamma' \subset \text{Sing} \mathcal{E}'$. D'après le théorème de stabilité \mathcal{E}' est donc l'exposant de contact, r' , la rétraction transformée, est transverse et $H_{X',x'}^1 = H_{X,x}^1$. Γ' vérifie donc les mêmes hypothèses que Γ . Au bout d'un nombre fini de modifications de points, on se ramène donc au cas où $\Gamma^{(n)}$ est lisse. Alors $\Gamma^{(n)}$ est contenu

dans la strate de Samuel de $X^{(n)}$ contenant $x^{(n)}$ et $H_{X^{(n)}, x^{(n)}}^1 = H_{X, x}^1$.

D'où si $\xi^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$ s'envoie sur ξ ,

$$H_{X^{(n)}, x^{(n)}}^1 = H_{X^{(n)}, \xi^{(n)}}^1 = H_{X, \xi}^1 = H_{X, x}^1 .$$

Réciproquement, si $\Gamma \subset X_0 \cap W_0$, alors, par modification, Γ' reste dans $X'_0 \cap W'_0$, et \mathcal{E}' est l'exposant de contact. D'où, de même, $\Gamma^{(n)} \subset \text{Sing } \mathcal{E}^{(n)}$, ce qui entraîne :

$$\Gamma - \{x\} \subset \text{Sing } \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \Gamma \subset \text{Sing } \mathcal{E} .$$

IV - LE CONTACT MAXIMAL

(4.1) Plaçons-nous dans les conditions habituelles, c'est-à-dire que X est un sous-espace analytique d'un espace Z , $W \rightarrow Z$ une r -immersion, r une rétraction $Z \rightarrow W$ transverse à X en $x \in W \cap X$.

Le but recherché est de faire baisser strictement la fonction de Samuel $H_{X,x}$ par une suite finie de modifications. Or nous avons vu (théorème de stabilité I) que si on faisait une modification permise pour W et pour X , et si $H_{W',x'}^1 = H_{W,x}^1$, avec $G(x') = x$, si $G: W' \rightarrow W$ est la modification, les conditions suivantes étaient équivalentes :

$$a) \quad x' \in X' \text{ et } H_{X',x'}^1 = H_{X,x}^1$$

$$b) \quad x' \in \text{Sing } \mathcal{E}'$$

où \mathcal{E}' est le transformé de l'exposant idéaliste de contact \mathcal{E} de X avec W en x .

Notons $X^{(n)}$ (resp. $W^{(n)}$, resp. $\mathcal{E}^{(n)}$) les transformés de X (resp. W , resp. \mathcal{E}) par n modifications permises successives ; on voit qu'il est alors équivalent de faire baisser strictement la fonction de Samuel $H_{X,x}$ (en tous les points de $X^{(n)}$ qui se projettent sur x) ou de "résoudre \mathcal{E} " (i.e. d'avoir $\text{sing } \mathcal{E}^{(n)} = \emptyset$), pourvu que $x^{(n)} \in X^{(n)}$ et $H_{X^{(n)},x^{(n)}}^1 = H_{X,x}^1$ entraîne que $x^{(n)} \in W^{(n)}$ et $H_{W^{(n)},x^{(n)}}^1 = H_{W,x}^1$.

Si W est tel que cette propriété soit vraie, c'est-à-dire si la strate de Samuel $W_0^{(n)}$ passe par tous les points de $X^{(n)}$ aussi mauvais que x (et ceci pour toutes les modifications permises possibles), on dira que W a le contact total avec X au point x .

On dira aussi que W passe par tous les points infiniment voisins de x .

Comme dans le cas des courbes, nous allons commencer par définir la notion de contact maximal de W avec X en x , puis montrer l'existence de sous-espaces analytiques W de Z ayant le contact maximal avec X en x , et enfin prouver que le contact maximal implique le contact total.

(4.2) Commençons donc par définir la notion de contact maximal.

Définition (4.2.1) : Soient Z un espace analytique réduit, X un sous-espace de Z , x un point de X ; on pose

$$\delta_x^\tau(X) = \text{Sup}(d_x(W, X)) ,$$

le sup étant pris sur toutes les r -immersions en x : $W \hookrightarrow Z$ telles qu'il existe une rétraction $r : Z \rightarrow W$ transverse à X en x et telles que l'on ait $T_{W, x} = T_{X, x}$.

Commentaires :

a) Si Z est lisse, la condition $T_{W, x} = T_{X, x}$ implique qu'il existe une rétraction : $Z \rightarrow W$ transverse à X en x (lemme (3.3.3)) ; d'autre part, dans ce cas, les seuls sous-espaces W intéressants du point de vue de $d_x(W, X)$ sont ceux qui sont tels que $T_{W, x} \subset T_{X, x}$, puisque nous avons vu que l'inclusion $T_{W, x} \subset T_{X, x}$ était équivalente à $d_x(W, X) > 1$.

La restriction $T_{W, x} = T_{X, x}$ vient du fait que si l'on imposait pas de condition sur W , le sup serait souvent infini, ce qui rendrait la notion inintéressante.

b) Si X est une courbe plane irréductible, $\delta_x^\tau(X)$ coïncide avec $d_x(X)$, le premier exposant caractéristique de X au point x (chap. I, (1.4.6)). Dans ce cas-là, le contact maximal de W (lisse) avec X en x était défini par l'égalité : $d_x(W, X) = d_x(X)$.

Nous allons nous inspirer de ce cas pour définir le contact maximal en dimension supérieure à 1, en nous ramenant au cas où W est une courbe lisse par l'utilisation de disques testants.

Tout d'abord une définition préliminaire :

Définition (4.2.2) : Dans la même situation qu'au début de ce paragraphe, soit $r : Z \rightarrow W$ une rétraction lisse, et soit x un point de $W \cap X$. On dit que r est perpendiculaire à X en x si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) r est transverse à X en x

2) $T_{X \cap r^{-1}(x), x} = (0)$.

Remarques (4.2.3) :

1) Dans le cas où W (et donc Z) est lisse, la condition $T_{W, x} = T_{X, x}$ et la transversalité d'une rétraction r impliquent que r est perpendiculaire à X en x .

L'égalité $T_{W, x} = T_{X, x}$ implique en effet que $T_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x} = (0)$, d'où une immersion $C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x} \hookrightarrow C_{X, x} / T_{X, x}$.

D'autre part la transversalité implique l'égalité :

$$C_{X \cap r^{-1}(x), x} = C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x}.$$

on a donc une immersion fermée :

$$C_{X \cap r^{-1}(x), x} \hookrightarrow C_{X, x} / T_{X, x}$$

qui est en fait un isomorphisme. En effet, comme Z est lisse, $T_{Z, x}$ contient $C_{X, x}$: on a donc

$$C_{X, x} \subseteq T_{W, x} + C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x} = T_{X, x} + C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x}$$

d'où :

$$C_{X \cap r^{-1}(x), x} \subseteq C_{X \cap r^{-1}(x), x}$$

$C_{X \cap r^{-1}(x), x}$ étant ainsi isomorphe à $C_{X, x} / T_{X, x}$, son espace tangent strict est réduit à (0) , ce qui montre que r est perpendiculaire.

2) Si r est perpendiculaire à X en x , on a $T_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x} = (0)$, car l'égalité

$$C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X \cap r^{-1}(x),x}$$

implique que

$$T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} \subset T_{X \cap r^{-1}(x),x}$$

qui est réduit à (0) par hypothèse.

3) Si r est transverse à X en x , on a l'inclusion $T_{X,x} \subseteq T_{Z,x}$. En effet, soit $v \in T_{X,x}$. Notons $v_1 = dr(v)$, $v_1 \in C_{W,x} \subseteq E_{W,x}$. Considérant la translation par v dans $E_{Z,x}$ et par v_1 dans $E_{W,x}$, nous obtenons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{X,x} & \xrightarrow{+v} & C_{X,x+v} \\ dr \downarrow & & \downarrow \\ C_{W,x} & \xrightarrow{+v_1} & C_{W,x+v_1} \end{array}$$

mais puisque $v \in T_{X,x}$, $C_{X,x+v} = C_{X,x}$, et le diagramme montre donc que l'image de dr est contenue dans $C_{W,x} \cap (C_{W,x} + v_1)$. Mais puisque r est transverse, dr est plat et ne saurait donc se factoriser par un sous-espace strict de $C_{W,x}$. Ainsi, on doit avoir $C_{W,x} \subseteq C_{W,x} + v_1$. La considération de la translation opposée montre que $C_{W,x} = C_{W,x} + v_1$, c'est-à-dire que $v_1 \in T_{W,x}$. Ceci montre que $v \in dr^{-1}(T_{W,x}) = T_{Z,x}$. Q. E. D.

4) Si, de plus, r est perpendiculaire, puisque d'après b) $T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = (0)$ on trouve, en écrivant l'inégalité de dimension des intersections dans $T_{Z,x}$, ce qui est licite d'après 3) que l'on doit avoir :

$$\dim T_{X,x} \leq \dim T_{W,x} .$$

Définition (4.2.4) : Soit $r : Z \rightarrow W$ une rétraction lisse. On dit que r a le contact maximal avec X en $x \in W \cap X$ (ou que W a le contact maximal avec X relativement à r) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- a) r est perpendiculaire à X en x
- b) pour tout disque testant $h : \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x , on a l'égalité

$$\delta_x^h(W^h, X^h) = \delta_x^\tau(X^h)$$

(autrement dit, W^h qui est égal au disque \mathbb{D} a le contact maximal avec X^h à l'origine x^h).

Commentaires :

Si r a le contact maximal avec X en x , il en est de même de la transformée de r par tout changement de base : $W_1 \rightarrow W$. C'est en effet évident pour la condition b), et vrai pour la perpendicularité, puisque nous avons vu que la transversalité était conservée par changement de base (2.3.8), et que l'autre condition de la définition (4.2.2) porte sur la fibre de la rétraction r .

(4.3) Passons maintenant à la démonstration de l'existence du contact maximal :

Théorème (4.3.1) : Soient X et W^f deux sous-espaces analytiques d'un espace réduit Z , x un point de $X \cap W^f$, tels que

a) $T_{W^f, x} = T_{X, x}$

b) Il existe une rétraction lisse $r_f : Z \rightarrow W^f$ perpendiculaire à X en x .

Il existe alors un sous-espace W de Z qui contient x , tel que $r_f|_W$ soit un isomorphisme de W sur W^f , ce qui définit canoniquement une rétraction $r : Z \rightarrow W$, tel que W ait le contact maximal avec X en x relativement à r .

Remarquons d'abord que si Z est lisse, il existe toujours un W^f (lisse) satisfaisant aux conditions a) et b) du théorème (4.3.1) (cf. le lemme (3.3.3) et la remarque (4.2.3), a)).

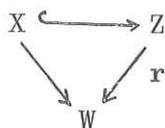
Pour montrer le théorème (4.3.1), nous pourrions supposer Z lisse : cela suffirait pour les cas que nous avons en vue car il se-
ront obtenus à partir du cas lisse par un changement de base $W_1 \rightarrow W$, chan-
gement de base qui, nous l'avons vu, conserve la notion de contact
maximal. Cependant la démonstration générale est éclairante.

La démonstration va suivre le même plan que celui du théorème
(1.4.8) du chapitre I, théorème qui montre l'existence du contact maxi-
mal dans le cas où X est une courbe plane.

On avait alors vu (lemme (1.4.9)) qu'il était équivalent que
 W n'ait pas le contact maximal avec X en x , ou que le cône $C_{X,x}^{W, d_x(W,X)}$
ait la forme binomiale, i.e. soit défini par une équation
 $\left(Z + \lambda W^x \right)^v$ avec $\lambda \neq 0$.

La proposition qui suit est l'analogue de ce lemme en dimen-
sion supérieure :

Proposition (4.3.2) : Dans la situation habituelle :



(r rétraction lisse), supposons que $T_{W,x} = T_{X,x}$ (grâce à la rétraction r)
 $\text{gr}_x Z$ et $\text{gr}_x(\text{gr}_W Z)$ à l'anneau $\text{gr}_x^W[Z_1, \dots, Z_r]$. Les conditions suivantes
sont alors équivalentes :

- 1) $d_x(W, X) < \delta_x^\tau(X)$
- 2) Il existe un unique gr_x^W -automorphisme σ de $\text{gr}_x^W[Z_1, \dots, Z_r]$

tel que

$$a) \quad \sigma(Z_i) - Z_i \in \text{gr}_X W \quad (1 \leq i \leq r)$$

$$b) \quad \sigma(\text{in}_X(X, Z)_{W, \delta}) = \text{in}_X(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) \cdot \text{gr}_X W[Z_1, \dots, Z_r]$$

avec $\delta = d_X(W, X)$.

3) Si (f_1, \dots, f_m) est une base standard de X dans Z en x , normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{W, x}; Z_1, \dots, Z_r)$, il existe un $\text{gr}_X W$ -automorphisme σ de $\text{gr}_X W[Z_1, \dots, Z_r]$ tel que

$$\alpha) \quad \sigma(Z_i) - Z_i \text{ soit homogène de degré } \delta = d_X(W, X) \text{ dans } \text{gr}_X W$$

$$\beta) \quad \sigma(\text{in}_X f_i)_{W, \delta} = \lambda_i(Z) \quad (1 \leq i \leq m)$$

où $\text{in}_X f_i \equiv \lambda_i(Z) \pmod{\bar{N}}$, $\text{gr}_X Z$ (cf. déf. (1.4.18).4)).

Commentaires :

a) On sait que $d_X(W, X)$ est le plus petit nombre rationnel d tel que $C_{X, x}^{W, d} \neq C_{X, x}$.

Mais si $d_X(W, X) = \delta_X^v(X)$, on voit que l'on a en plus qu'il n'existe pas de $\text{gr}_X W$ -automorphisme de $\text{gr}_X W[Z_1, \dots, Z_r]$ transformant l'un en l'autre.

Traitons maintenant un exemple "éclairant" : le cas d'une hypersurface.

Supposons que l'hypersurface soit d'équation :

$$f = Z^v + a_{v-2}(W)Z^{v-2} + \dots + a_0(W) = 0$$

(avec $W = (W_1, \dots, W_s)$).

(On a choisi un espace W de façon à ce qu'il n'y ait pas de terme en Z^{v-1}).

Montrons alors qu'il n'existe pas d'automorphisme σ comme dans l'énoncé.

Comme f est une base standard normalisée de l'idéal qu'il engendre, on a que $d_x(W, X)$ est l'opposé de l'inverse de la pente du premier côté du polygone de f , soit

$$d_x(W, X) = \inf_{(i=0, \dots, v-2)} \binom{v - (a_i)}{v-i}.$$

Posons $\delta = d_x(W, X)$: $C_{X, X}^{W, \delta}$ est défini par l'équation

$$\text{in}_x(f)_{W, d} = \sum_{a + \frac{|B|}{\delta} = v} C_{a, B} Z^a W^B = Z^v + (\sum C_{v-2, B} W^B) Z^{v-2} + \dots$$

Si il y avait un automorphisme σ comme dans la proposition, σ ne pourrait être différent de l'identité puisque sinon on aurait $\sigma(Z) = Z + S(W)$, où $S(W)$ est homogène de degré δ , ce qui impliquerait qu'il y aurait un terme en Z^{v-1} dans l'équation $\text{in}_x f$, ce qui est exclu. D'autre part, σ ne peut être égal à l'identité, puisque par définition $C_{X, X}^{W, \delta} \neq C_{X, X}$.

Nous ne démontrerons pas la proposition (4.3.2), mais nous verrons comment elle implique l'existence du contact maximal ; nous aurons pour cela besoin d'une propriété du contact maximal, plus précise que l'inégalité $\dim T_{X,x} \leq \dim T_{W,x}$ valable sous l'hypothèse que la rétraction r est perpendiculaire à X en x (remarque (4.2.3)). Dans la suite, nous verrons que cette proposition est essentielle ; une définition du contact maximal qui ne l'entraverait pas serait mauvaise et devrait être changée.

Proposition (4.3.3) : Si r a le contact maximal avec X en $x \in W \cap X$, on a l'inclusion $T_{X,x} \subseteq T_{W,x}$.

Démonstration : 1) Soit v un vecteur de $T_{X,x}$ qui n'est pas dans $T_{W,x}$; posons $v_1 = dr(v)$: comme $T_{X,x} \subset T_{Z,x}$ (remarque (4.2.3), 3)), et que r est lisse, $v_1 \in T_{W,x}$. D'autre part $v_1 \neq 0$ car, si v_1 était nul, on aurait $v \in T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x)}$, qui est nul à cause de la perpendicularité de r .

Commençons par construire un sous-espace Y_1 de W contenant x , et tel que $T_{Y_1,x} = (v_1)$: on plonge pour cela (localement) W dans un espace lisse \tilde{W} , et on considère une rétraction lisse R de \tilde{W} sur un \tilde{W}_1 lisse tel que $T_{\tilde{W}_1,x} = T_{W,x}$:

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & \tilde{W} \\ & & \downarrow R \\ & & \tilde{W}_1 \end{array}$$

et soit Γ une courbe lisse contenue dans \tilde{W}_1 telle que $T_{\Gamma,x} = (v_1)$: on définit Y_1 comme l'image réciproque de Γ par $R|_W$:

$$Y_1 = R^{-1}(\Gamma) \cap W .$$

Remarquons que R est transverse à W en x (le morphisme dR de $C_{W,x}$ sur $T_{W,x}$ est une projection usuelle) et même perpendiculaire (remarque (4.2.3), 1)).

La transversalité de T implique que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{Y_1, x} & \longrightarrow & C_{W, x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{\Gamma, x} & \longrightarrow & T_{W, x} \end{array}$$

est cartésien (cf. le corollaire (2.3.8)), et donc que

$$C_{Y_1, x} = C_{W, x} \cap (dR)^{-1}(T_{\Gamma, x}).$$

Cela donne une inclusion :

$$T_{Y_1, x} \supseteq T_{W, x} \cap (dR)^{-1}(T_{\Gamma, x})$$

d'où $v_1 \in T_{Y_1, x}$.

Mais comme R est perpendiculaire à W en x , sa restriction au-dessus de Γ est aussi perpendiculaire à Y_1 en x , et on a

$$\dim T_{Y_1, x} \leq \dim T_{\Gamma, x} = 1,$$

ce qui implique bien que $T_{Y_1, x} = (v_1)$.

2) Construisons maintenant un sous-espace $Y \subset Z$ contenant x tel que

- a) $T_{Y, x} = (v)$
- b) $r(Y) = Y_1$, et $r|_Y : Y \rightarrow Y_1$ soit un isomorphisme (localement en x).

Pour cela plongeons localement en $x \in W$ dans un espace lisse \tilde{W} , avec des coordonnées (w_1, \dots, w_s) , et Z dans un espace lisse \tilde{Z} avec des coordonnées $(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_r)$, de façon à ce que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & \tilde{Z} \\ \downarrow r & & \downarrow \tilde{r} \\ W & \hookrightarrow & \tilde{W} \end{array}$$

soit cartésien (\tilde{r} étant la rétraction définie par le choix des coordonnées sur \tilde{Z}).

Soient W_i (resp. Z_i) les formes initiales de w_i (resp. z_i) dans $\text{gr}_x \tilde{Z} \cong \mathbb{C}[W_1, \dots, W_s, Z_1, \dots, Z_r]$. Nous supposons de plus que le choix des coordonnées (w_i) a été fait de telle façon que le vecteur v_1 ait pour composantes $W_1 = 1, W_2 = 0, \dots, W_s = 0$. Le vecteur v a alors pour composantes

$$\begin{cases} W_1 = 1 \\ W_2 = \dots = W_s = 0 \\ Z_i = C_i \end{cases} \quad (C_i \in \mathbb{C})$$

les C_i étant tous non nuls puisque, par hypothèse, $v_1 \neq v$.

Soit H le sous-espace de \tilde{Z} défini par les équations $z_i - C_i w_1 = 0$ ($1 \leq i \leq r$). Posons $Y = H \cap \tilde{r}^{-1}(Y_1)$, et montrons que Y satisfait aux conditions demandées : il est d'abord bien clair que la restriction de \tilde{r} à Y est un isomorphisme local de Y sur Y_1 , car si I est l'idéal définissant le germe de Y_1 dans $\mathbb{C}\{\underline{w}\}$ ($\underline{w} = (w_1, \dots, w_s)$), \tilde{r} restreint au germe de Y correspond à l'homomorphisme d'anneaux :

$$\mathbb{C}\{\underline{w}\}/I \rightarrow \mathbb{C}\{\underline{w}; \underline{z}\}/(I, \{z_i - C_i w_1\})$$

qui est évidemment un isomorphisme.

D'autre part $T_{Y,x}$ est de dimension 1 puisque Y est isomorphe à Y_1 , et $T_{Y,x} \subset T_{H,x} \cap (T\tilde{r})^{-1}(v_1)$: on a donc bien $T_{Y,x} = (v)$.

3) Faisons le changement de base $Y_1 \rightarrow W$: posons $X_1 = X \cap r^{-1}(Y_1)$ et $Z_1 = Z \cap r^{-1}(Y_1)$. La rétraction $r|_{Z_1} : Z_1 \rightarrow Y_1$, composée avec l'isomorphisme $Y_1 \cong Y$, donne une rétraction $r' : Z_1 \rightarrow Y$ qui est aussi perpendiculaire à X_1 en x . D'autre part, on a $\dim T_{X_1,x} \leq \dim T_{Y_1,x} = 1$ (car $r|_{Z_1}$ est perpendiculaire à X_1 en x) ; si l'on montre que $v \in T_{X_1,x}$, on aura alors $T_{X_1,x} = \mathbb{C} \cdot v$, donc $v_1 \notin T_{X_1,x}$, et on en déduira une contradiction.

Montrons donc que $v \in T_{X_1,x}$: le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{X_1,x} & \longrightarrow & C_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow dr \\ C_{Y_1,x} & \longrightarrow & C_{W,x} \end{array}$$

est cartésien car r est transverse à X en x (corollaire (2.3.8)), ce qui implique que $C_{X_1,x} = C_{X,x} \cap (dr^{-1})(C_{Y_1,x})$, d'où $T_{X,x} \cap (dr^{-1})(T_{Y_1,x}) \subseteq T_{X_1,x}$ et $v \in T_{X_1,x}$ puisque par définition $v \in T_{X,x}$ et $dr(v) = v_1 = T_{Y_1,x}$.

4) Soit maintenant $h_1 : \mathbb{D} \rightarrow Y_1$ un disque testant dont le cône tangent réduit à l'image soit $\mathbb{C} \cdot v_1$. Pour se convaincre de l'existence d'un tel disque, il suffit de considérer la modification de centre x dans Y_1 . L'image par ce morphisme de toute courbe Γ'_1 irréductible réduite non contenue dans le diviseur exceptionnel et passant par le point $x' = \text{Proj } v_1$ a une normalisation qui fait l'affaire.

Si l'on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0} = \mathbb{C}\{t\}$, on obtient une application $\mathcal{O}_{Y_1,x} \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$, et un entier e tel que $M_{Y_1,x} \mathbb{C}\{t\} = t^e$ ($M_{Y_1,x}$ est l'idéal

maximal de $\mathcal{O}_{Y_1, x}$; cet entier e est en fait la multiplicité de $h_1(\mathbb{D})$ en x .

Soit (f_1, \dots, f_m) une base standard de l'idéal de X_1 dans Z_1 en x , normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{Y_1, x}, z_1, \dots, z_r)$. On a alors, si on écrit $f_i = \sum f_{i,A} z^A$ avec $f_{i,A} \in \mathcal{O}_{Y_1, x}$,

$$\delta_x^{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) = \inf_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < v_i}} \left\{ \frac{v_0(f_{i,A} \circ h_1)}{v_i - |A|} \right\} \quad (\text{théorème (1.4.2), 1}).$$

Comme $v_x(f_{i,A}) \geq v_i - |A|$, on a $v_0(f_{i,A} \circ h_1) \geq e(v_i - |A|)$ et donc $\delta_x^{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) \geq e$.

Nous allons voir que l'inégalité $\delta_x^{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) > e$ est équivalente

à $T_{Y_1, x} \subseteq T_{X_1, x}$.

$$\text{Ecrivons } \text{in}_x(f_i) = \lambda_i(Z) + \sum_{v_x(f_{i,A}) = v_i - |A|} \text{in}_x(f_{i,A}) z^A$$

(λ_i : polynôme de degré v_i à coefficients dans \mathbb{C}).

Nous allons montrer les équivalences suivantes :

a) $T_{Y_1, x} \subseteq T_{X_1, x} \Leftrightarrow C_{X_1, x} \cap T_{Z_1, x} = C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1, x}$.

b) $C_{X_1, x} \cap T_{Z_1, x} = C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1, x} \Leftrightarrow \text{in}_x(f_{i,A})$ appartient à l'idéal définissant $T_{Y_1, x}$ dans $\text{gr}_x Y_1$ (ceci pour les $f_{i,A}$ vérifiant $v_x(f_{i,A}) = v_i - |A|$).

c) $\text{in}_x(f_{i,A})$ appartient à l'idéal définissant $T_{Y_1,x}$ dans $\text{gr}_x Y_1 \cong v_0(f_{i,A} \circ h_1) > e(v_i - |A|)$.

d) $v_0(f_{i,A} \circ h_1) > e(v_i - |A|)$ pour les $f_{i,A}$ tels que $v_x(f_{i,A}) = v_i - |A| \Leftrightarrow \delta_x^{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) > e$.

Démonstration de a) : Montrons d'abord que $T_{X_1,x}$ est égal à l'espace $T^{(C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x})}$: $T_{X_1,x}$ est en effet contenu dans $T_{Z_1,x}$ car la rétraction r est transverse, donc dans l'espace tangent strict à $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$. Mais ce dernier est de dimension ≤ 1 , car il existe une rétraction perpendiculaire de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$ sur $T_{Y_1,x}$, obtenue à partir de la rétraction $dr: C_{X_1,x} \rightarrow C_{Y_1,x}$ par le changement de base : $T_{Y_1,x} \rightarrow C_{Y_1,x}$. On a donc nécessairement l'égalité.

Maintenant, si $T_{Y_1,x} \subseteq T_{X_1,x}$, on a $T_{Y_1,x} = T_{X_1,x}$ (car $\dim T_{X_1,x} = 1$), et la rétraction dr donne une rétraction du cône $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$ sur son espace tangent strict $T_{Y_1,x}$: ce cône est alors isomorphe au produit de $T_{Y_1,x}$ par la fibre $C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x}$.

Réciproquement, l'égalité $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x} = C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1,x}$ implique que l'espace tangent strict à $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$ est $T_{Y_1,x}$ (puisque la perpendicularité de r implique $T_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} = (0)$), d'où l'égalité $T_{X_1,x} = T_{Y_1,x}$.

Démonstration de b) : Le cône $C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1,x}$ est défini dans $T_{Z_1,x} = T_{r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1,x}$ par les équations $\lambda_i(Z)$; dire que $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x} = C_{X_1 \cap r^{-1}(x), x} \times T_{Y_1,x}$, c'est dire que $\text{in}_x(f_i) \equiv \lambda_i(Z)$

modulo l'idéal de $T_{Z_1, x}$, i.e. que $\text{in}_x(f_{i,A})$ appartient à l'idéal définissant $T_{Y_1, x}$ dans $\text{gr}_x Y_1$: cela résulte du fait que la base (f_1, \dots, f_m) est normalisée.

Démonstration de c) : Il y a deux manières de faire :

1) le morphisme $\mathcal{O}_{Y_1, x} \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$ correspondant au disque testant h_1 envoie $M_{Y_1, x}$ sur l'idéal (t^e) . On en déduit un morphisme gradué non nul de degré e : $\text{gr}_{Y_1, x} \rightarrow \mathbb{C}[T]$ dont le noyau est l'idéal de $T_{Y_1, x}$: c) est alors évident.

2) on plonge Y_1 dans un espace lisse \tilde{Y}_1 , et on choisit les coordonnées y_1, \dots, y_s sur \tilde{Y}_1 de manière que $T_{Y_1, x}$ soit défini dans $\text{gr}_x(\tilde{Y}_1) \cong \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_s]$ par l'idéal (Y_2, \dots, Y_s) . On peut supposer que le disque testant : $\tilde{h}_1 : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{Y}_1$ composé de h_1 et de l'inclusion $Y_1 \hookrightarrow \tilde{Y}_1$ est donné par

$$\begin{cases} y_1 = t^e \\ y_i = \varphi_i(t) \quad (2 \leq i \leq s) \end{cases},$$

l'ordre de $\varphi_i(t)$ étant $> e$. c) est alors clair si on considère des relèvements \tilde{f}_i de f_i dans $\tilde{Z}_1 = \tilde{Y}_1 \times r^{-1}(x)$ qui vérifient $v_x(f_i) = v_x(\tilde{f}_i)$.

Démonstration de d) : évident.

Il résulte maintenant de ce qui précède que, comme $v \in T_{X_1, x}$ qui est de dimension 1 (car $r|_{Z_1}$ est perpendiculaire à X_1), on a $v_1 \notin T_{X_1, x}$, soit $T_{Y_1, x} \not\subset T_{X_1, x}$ et donc $\delta_{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) = e$. Si

Si $\mathbb{D} \xrightarrow{h_2} Y$ est le composé de h_1 avec l'isomorphisme : $Y_1 \xrightarrow{\sim} Y$, le même raisonnement prouve cette fois que $\delta_{h_2}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) > e$, d'où la contradiction

cherchée, puisque par hypothèse Y_1 a le contact maximal avec X_1 en x

et donc $\delta_{x, h_1}^{h_1}(\mathbb{D}, X_1^{h_1}) = \delta_{x, h_1}^{\tau} (X_1^{h_1})$, et que évidemment $X_1^{h_1} = X_1^{h_2}$. cqfd

Pour prouver l'existence du contact maximal, nous aurons besoin de la notion de donnée distinguée, qui est un raffinement de celle de base standard normalisée.

Fixons d'abord quelques notations : nous nous plaçons dans le cas où W et Z sont lisses, les coordonnées sur Z étant $(z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s)$ (ce qui détermine une rétraction $r : Z \rightarrow W$), x étant l'origine des coordonnées.

a) Soit W_p le sous-espace lisse de Z défini par les équations : $z_1 = \dots = z_r = 0$ ($0 \leq p \leq r$). On a donc $W_0 = Z$ et $W_r = W$, et la suite des W_i est décroissante.

b) Soit X un sous-espace de Z , dont l'idéal I en $x \in X \cap W$ est engendré par (f_1, \dots, f_m) . On notera X_i le sous-espace de Z défini par les équations $f_1 = \dots = f_i = 0$ ($0 \leq i \leq m$). On a donc $X_0 = Z$, $X_m = X$, et la suite des X_i est aussi décroissante.

Définition (4.3.4) : Soit X un sous-espace d'un sous-espace lisse X , x un point de X . On appelle donnée distinguée pour X dans Z en x le couple formé par - un système de générateurs (f_1, \dots, f_m) de l'idéal I de X en x

- un système de coordonnées de Z centré en x :
 $(z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s)$

tel que les conditions suivantes soient réalisées (avec les notations fixées plus haut) :

- 1) $T_{W, x} = T_{X, x}$
- 2) (f_1, \dots, f_m) soit une base standard adaptée à la rétraction $r : Z \rightarrow W$ définie par le choix des coordonnées sur Z (à cause de la condition 1), cela est équivalent à dire que pour $1 \leq i \leq m$, $\text{in}_x f_i$ ne dépend que des variables $Z_j = \text{in}_x(z_j)$.

3) pour i donné ($0 \leq i \leq m$), soit $p(i)$ le plus petit entier p tel que : Z_1, \dots, Z_p suffisent pour écrire $\text{in}_x f_1, \dots, \text{in}_x f_i$, i.e. $\text{in}_x f_k \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p]$ pour tout $0 \leq k \leq i$.

Alors f_i est normalisée pour $(\text{in}_x f_1, \dots, \text{in}_x f_{i-1})$ par rapport au système :

$$(\mathbb{C}\{z_{p(i)+1}, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s\} ; Z_1, \dots, Z_{p(i)}).$$

4) pour p donné ($0 \leq p \leq r$), soit $i(p)$ le plus grand entier i tel que

$$\text{in}_x f_k \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_p] \quad 0 \leq k \leq i.$$

Pour chaque i , écrivons $f_i = \sum f_{i,p,A} z(p)^A$ où $z(p) = (z_1, \dots, z_p)$ (et donc où $f_{i,p,A} \in \mathbb{C}\{z_{p+1}, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s\}$). Alors la condition 4) s'énonce ainsi : pour $0 \leq p \leq r$, il existe un exposant $A \in \mathbb{Z}_0^{p(i)}$ tel que l'on ait

$$f_{i(p)+1,p,A} = U(z_{p+1}^e + h_2 z_{p+1}^{e-2} + \dots + h_e)$$

où $e = v_{i(p)+1} - |A| > 0$, où U est inversible dans $\mathbb{C}\{z_{p+1}, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s\}$, et $h_i \in \mathbb{C}\{z_{p+2}, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s\}$.

(Noter l'absence de terme en z^{e-1}).

Théorème (4.3.5) : Soient Z un espace analytique lisse, X un sous-espace analytique de Z et x un point de X . Il existe une donnée distinguée pour X dans Z en x .

Démonstration : Commençons par choisir les coordonnées

$(z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s)$ pour que la condition 1) de la définition (4.3.4) soit satisfaite ; cela donne une rétraction r de Z sur W (définie par $w_i \circ r = w_i$ pour $1 \leq i \leq s$) qui est transverse à X en x à cause de l'égalité $T_{W,x} = T_{X,x}$ (cf. lemme (3.3.3)).

On a alors, grâce à la rétraction dr , une décomposition en produit : $C_{X,x} \simeq C_{X,x} / T_{W,x} \times T_{W,x}$, ce qui permet de choisir une base standard (f_1, \dots, f_m) de l'idéal I de X dans Z en x telle que, pour $1 \leq i \leq m$, on ait $\text{in}_x f_i \in \mathbb{C}[\underline{Z}]$.

Nous allons maintenant modifier les coordonnées locales et les générateurs de I de façon à ce que les conditions 3) et 4) de la définition (4.3.4) soient satisfaites.

Nous montrerons ensuite que les conditions 1) et 2) ont été conservées à chaque opération.

a) Considérons d'abord l'élément f_1 : la condition 3) est vide pour cet élément ; nous allons donc réaliser la condition 4) en modifiant les coordonnées ; quitte à faire un changement linéaire de coordonnées sur les z_i , on peut supposer que l'on a

$$f_1(z_1, 0, \dots, 0) = z_1^{v_1} U(z_1) \quad \text{où } U(z_1) \text{ est inversible, et où } v_1 = v(f_1) > 0.$$

Le théorème de préparation de Weierstrass permet alors d'écrire :

$$f_1(\underline{z}, \underline{w}) = U(\underline{z}, \underline{w}) (z_1^{v_1} + h_1 z_2^{v_1-1} + \dots + h_{v_1})$$

où $U(\underline{z}, \underline{w})$ est inversible (avec $\underline{z} = (z_1, \dots, z_r)$ et $\underline{w} = (w_1, \dots, w_s)$) et où $h_i \in \mathbb{C}\{z_2, \dots, z_r, \underline{w}\}$.

Posons $z_1 = z_1' - \frac{1}{v_1} h_1$: cela donne

$$f_1 = U(\underline{z}, \underline{w}) (z_1'^{v_1} + h_2' z_1'^{v_1-2} + \dots + h_{v_1}') .$$

On voit alors que la condition 4) est vérifiée pour $p=0$ (et donc pour $i(0) = 0$).

b) Il y a maintenant deux possibilités : ou bien $\text{in}_x f_1$ ne dépend que de la variable Z_1 (i.e. 0 est le seul entier p tel que $i(p) = 0$), auquel cas le travail est fini pour f_1 et on va préparer f_2 , ou bien $\text{in}_x f_1$ dépend d'une autre variable que Z_1 ; cela signifie que si l'on écrit $f_1 = \sum f_{1,1,a} z_1^a$, il y a un exposant $a_0 > v_1$ tel que $\text{in}_x (f_{1,1,a_0})$ soit de degré $v_1 - a_0$ et dépende d'une autre variable que Z_1 .

On peut alors supposer (quitte à faire un changement linéaire de coordonnées ne portant que sur (z_2, \dots, z_r)) que

$$f_{1,1,a_0}(z_2, 0, \dots, 0) = z_2^e U(z_2)$$

avec U inversible ($e = v_1 - a_0$).

On a alors $f_{1,1,a_0} = U(z_2, \dots, z_r, \underline{w})(z_2^e + H_1 z_2^{e-1} + \dots + h_e)$ avec $h_j \in \mathbb{C}\{z_3, \dots, z_r, \underline{w}\}$, d'après le théorème de préparation.

Le même raisonnement que plus haut permet maintenant de "tuer" le terme en z_2^{e-1} , et donc de vérifier la condition 4) pour $p = 1$ (et $i(1) = 0$).

c) Il y a à nouveau deux possibilités : ou bien $\text{in}_x f_1$ ne dépend que des variables Z_1 et Z_2 , et il faudra passer à f_2 , ou bien ce n'est pas le cas, et on refait la même opération avec une nouvelle variable que l'on appelle z_3 : au bout d'un nombre fini de pas, on obtient des coordonnées telles que la condition 4) soit vérifiée pour tous les entiers p tels que $i(p) = 0$.

d) Nous allons maintenant passer à f_2 : il faut d'abord normaliser f_2 pour $\text{in}_x f_1$ par rapport au système

$(\mathbb{C}\{z_{p(2)+1}, \dots, z_r, \underline{w}\}, Z_1, \dots, Z_{p(2)})$ (cela veut dire que si on écrit

$$f_2 = \sum f_{i,p(2),A} z^{(p(2))A},$$

A est nul si $A \in \exp(\text{in}_x f_1)$: cf. (1.4.18)).

Nous avons vu que cela est possible (1.4.20) à condition que la rétraction de Z sur l'espace défini par $z_{p(2)+1} = \dots = z_r = \underline{w} = 0$ soit transverse à l'espace défini par $(f_1 = f_2 = 0)$, ce qui est réalisé car $\text{in}_x f_1$ et $\text{in}_x f_2$ ne dépendent que des variables $Z_1, \dots, Z_{p(2)}$ par hypothèse.

On modifie maintenant les coordonnées pour que la condition 4) soit vérifiée pour tous les entiers p tels que $i(p) \leq 1$ en procédant de la même manière que pour f_1 .

e) On pourra continuer ainsi jusqu'à ce que les conditions 3) et 4) soient vérifiées pour tout i ($1 \leq i \leq m$) et pour tout p ($1 \leq p \leq r$) à condition qu'à chaque pas les conditions 1) et 2) soient conservées.

Pour la condition 1) (à savoir $T_{W,x} = T_{X,x}$), les seuls changements de coordonnées susceptibles de la modifier soient de la forme

$$z_{p+1} = z'_{p+1} - \frac{1}{v} h_1, \text{ avec}$$

$$f_{i(p)+1, p, A_0} = U(z_{p+1}^e + h_1 z_{p+1}^{e-1} + \dots + h_e)$$

et $e = v_{i(p)+1} - |A_0|$; l'hypothèse, supposée conservée jusqu'à ce pas, que les $\text{in}_x f_i$ ne dépendent que des variables Z_i , implique que la classe de h_1 modulo $(M_x)^2$ ne dépend que de Z_1, \dots, Z_r , et donc que $T_{W,x}$ ne va pas être modifié par un tel changement de coordonnées.

Pour la condition 2), il suffit de se reporter à la démonstration du théorème (1.4.20) pour voir que la modification des générateurs de I ne change pas les $\lambda_i(Z) = \text{in}_x(f_i)$.

Remarques (4.3.6) :

1) Si $(\underline{z}, \underline{w}) ; (f_1, \dots, f_m)$ est une donnée distinguée pour X dans Z en x , (f_1, \dots, f_m) est une base standard de l'idéal I normalisée par

rapport au système $(\mathbb{C}\{w\}, Z_1, \dots, Z_r)$.

C'est une conséquence directe de la condition 3) qui dit que, pour $1 \leq i \leq m$, f_i est normalisée pour $(\text{in}_x f_1, \dots, \text{in}_x f_{i-1})$ par rapport au système $(\mathbb{C}\{z_{p(i)+1}, \dots, z_r, w\}, Z_1, \dots, Z_{p(i)})$. Cela entraîne que f_i est normalisée par rapport au système $(\mathbb{C}\{w\}, Z)$ puisque $\text{in}_x f_i$ ne dépend que des variables $Z_1, \dots, Z_{p(i)}$.

2) La notion de donnée distinguée est stable par changement de base lisse : cela signifie que si $g: W' \rightarrow W$ est un morphisme d'espaces analytiques lisses, et si t_1, \dots, t_s est un système de coordonnées locales pour W' en un point $x' \in g^{-1}(x)$, alors le système $(z_1^g, \dots, z_r^g, t_1, \dots, t_s; f_1^g, \dots, f_m^g)$ est une donnée distinguée pour X^g dans Z^g en x' .

Pour montrer cela, on remarque d'abord que les conditions 2), 3) et 4) portent sur les fibres de la rétraction r et qu'elles sont donc invariantes par changement de base.

Pour la condition 1), on remarque d'abord qu'elle implique que la rétraction r est perpendiculaire à X en x (Remarque (4.2.3)). r^g est donc perpendiculaire à X^g en x' , ce qui implique

$\dim T_{X^g, x'} \leq \dim T_{W', x'}$ (Remarque (4.2.3), 4)). Mais l'égalité $T_{W, x} = T_{X, x}$ entraîne l'inclusion $T_{W', x'} \subseteq T_{X^g, x'}$, d'où l'égalité

$$T_{W', x'} = T_{X^g, x'}.$$

Nous allons maintenant achever la démonstration du théorème (4.3.1) affirmant l'existence d'une rétraction lisse ayant le contact maximal avec X en x .

La démonstration va utiliser l'existence d'une donnée distinguée pour X dans Z en x , et la proposition (4.3.2). Elle sera analogue à celle faite pour les courbes (Chap. I, (1.4.8)) : on avait vu

alors que si le cône $C_{X,x}^{W,d}$ (avec $d = d_x(W,X)$) n'avait pas la forme binomiale, W avait le contact maximal avec X en x .

Nous allons voir de même que si on a une donnée distinguée pour X dans Z en x , l'espace W a le contact maximal avec X en x , grâce à la condition 4). (Cf. aussi l'exemple "éclairant" qui suit l'énoncé de la proposition (4.3.2)).

Soit donc $((\underline{z}, \underline{w}) ; f_1, \dots, f_m)$ une donnée distinguée pour X dans Z en x ; supposons par l'absurde que $r : Z \rightarrow W$ n'ait pas le contact maximal avec X en x ; il existe alors par définition un disque testant h centré en x : $\mathbb{D} \rightarrow W$ tel que $\delta_{x^h}(\mathbb{D}, X^h) < \delta_{x^h}^\tau(X^h)$. Comme nous avons vu plus haut que $T_{\mathbb{D}, x^h} = T_{X^h, x^h}$, il existe d'après la proposition (4.3.2) un $\text{gr}_{x^h} \mathbb{D}$ -automorphisme σ de $\text{gr}_{x^h} \mathbb{D}[Z_1, \dots, Z_r]$ tel que

$\alpha)$ $S_i(T) = \sigma(Z_i) - Z_i$ soit homogène de degré $\delta = \delta_{x^h}(\mathbb{D}, X^h)$ dans $\text{gr}_{x^h} \mathbb{D} \simeq \mathbb{C}[T]$.

$\beta)$ $\sigma(\text{in}_x f_i^h)_{\mathbb{D}, \delta} = \text{in}_x f_i^h = \lambda_i(\underline{z})$ ($1 \leq i \leq m$) (en notant (\underline{z}, t) les coordonnées sur Z^h). Comme par définition on a $C_{X^h, x^h}^{\mathbb{D}, \delta} \neq C_{X^h, x^h}^{\mathbb{D}, \delta}$, σ est certainement différent de l'identité, et donc il existe un i tel que $S_i(T) \neq 0$. Soit p le plus petit entier tel que $s_{p+1}(T) \neq 0$; posons $k = i(p) + 1$ et

$$f_k^h = \sum_{A \in \mathbb{N}^p} f_{k,p,A} z^{(p)A}$$

avec $f_{k,p,A}^h \in \mathbb{C}\{z_{p+1}, \dots, z_r, t\}$. Comme le système $(\underline{z}, t ; f_1^h, \dots, f_m^h)$ est une donnée distinguée pour X^h dans Z^h en x^h , il existe un indice A_0 tel que $|A_0| < v(f_k^h) = v_k$ et que

$$f_{k,p,A_0}^h = U(z_{p+1}, \dots, z_r, t) [z_{p+1}^{e_1} + h_2 z_{p+1}^{e_2} + \dots + h_e]$$

($e = v_k - |A_0| > 0$) avec U inversible ; on a alors par hypothèse que

$$\sigma(\text{in}_x f_k)_{\mathbb{D}, \delta} = \text{in}_x f_k ,$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\text{in}_x f_k^h)_{W, \delta} = \sigma^{-1}(\text{in}_x f_k) \\ & = \text{in}_x f_k^h(Z_1, \dots, Z_p, Z_{p+1} + S_{p+1}(T), \dots, Z_r + S_r(T)) \\ & = \sum_{A \in \mathbb{N}^p} \text{in}_x f_{k, p, A_0}^h(Z_{p+1} + S_{p+1}(T), \dots, Z_r + S_r(T)) Z(p)^A \\ & \quad v_o(f_{k, p, A_0}) + |A| = v_k \\ & \quad A \neq A_0 \\ & + U(0) [Z_{p+1} + S_{p+1}(T)]^{e_1} (Z_{p+1} + S_{p+1})^{e-2} H_2 + \dots + H_e] Z(p)^{A_0} . \end{aligned}$$

On voit ainsi que le monôme

$$e U(0) Z(p)^{A_0} S_{p+1}(T) Z_{p+1}^{e-1}$$

apparaît dans le développement de $(\text{in}_x f_k^h)_{\mathbb{D}, \delta}$. Mais comme

$$f_k^h = \sum_{A \in \mathbb{N}^p} f_{k, p, A} z(p)^A ,$$

on a

$$(\text{in}_x f_k^h)_{\mathbb{D}, \delta} = \sum_{A \in \mathbb{N}^p} \varphi_{k, p, A} Z(p)^A ,$$

$\varphi_{k, p, A}$ étant la classe de $f_{k, p, A}$ modulo l'idéal

$\sum_{|a| + \frac{b}{\delta} > v_k - |A|} (z_{p+1}, \dots, z_r)^a t^b$. On a en particulier :

$$\varphi_{k, p, A} = U(0, \dots, 0) [Z_{p+1}^e + H_2 Z_{p+1}^{e-2} + \dots + H_e]$$

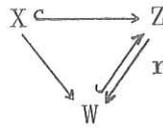
où H_e, \dots, H_e ont signification évidente : on voit ainsi qu'il n'y a aucun monôme en $Z(p)^{A_0} Z_{p+1}^{e-1}$ dans le développement de $(\text{in}_x f_k^h)_{W, \delta}$,

d'où la contradiction avec ce qui précède. cqfd

(4.4) On se propose d'étudier l'effet de modifications permises (i.e. de centre lisse contenu dans $X_0 \cap W_0$, intersection des strates de Samuel dans X et W du point $x \in W \cap X$ auquel on s'intéresse) sur une rétraction possédant le contact maximal.

Il faut d'abord déblayer le terrain :

Lemme (4.4.1) : Soit



où r est une rétraction lisse. Soit $x \in W \cap X$. On a toujours l'inégalité :

$$H_{X,x}^1 \leq H_{H,w}^0 * H_{C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x}}^1$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $H_{X,x}^1 = H_{W,x}^0 * H_{C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x}}^1$

b) $dr : C_{X,x} \rightarrow C_{W,x}$ est plat (i.e. r est transverse à X en x). De plus, dans ce cas on a : $H_{X,x} = H_{W,x} * H_{X \cap r^{-1}(x),x}$ (puisque l'on a dé-

montré que, dans l'hypothèse de transversalité,

$$C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X \cap r^{-1}(x),x}.$$

Démonstration : Considérons le morphisme $gr_x W \rightarrow gr_x X$ associé à dr .

On sait bien que l'on a une surjection d'algèbres graduées :

$$(1) \quad gr_N^-(gr_x W) \otimes_{\mathbb{C}} gr_x X / \bar{N}. gr_x X \rightarrow gr_N^-(gr_x X) \rightarrow (0)$$

et que l'injectivité de ce morphisme équivaut à la platitude du morphisme $gr_x W \rightarrow gr_x X$.

Or, d'une part, on a un isomorphisme gradué canonique ($\text{gr}_x W$ étant engendré par ses éléments de degré 1)

$$\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x W) \simeq \text{gr}_x W .$$

D'autre part, on peut considérer les suites exactes de définition des idéaux initiaux :

$$0 \rightarrow \text{in}_x(X, Z) \rightarrow \text{gr}_x Z \rightarrow \text{gr}_x X \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{in}_{\bar{N}}(\text{in}_x(X, Z)) \rightarrow \text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x Z) \rightarrow \text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x X) \rightarrow 0 .$$

La première nous dit que :

$$H_{X, x}^1(\nu) = H_{Z, x}^1(\nu) - \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{in}_x^j(X, Z) .$$

Mais si nous remarquons que pour un élément $h \in \text{gr}_x^j Z$, $\nu_{\bar{N}}(h) \leq j$, nous nous apercevons que la seconde suite exacte nous fournit des suites exactes d'espaces vectoriels :

$$\textcircled{2} \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{\nu} \text{in}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{in}_x^j(X, Z) \right) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{\nu} \text{gr}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_x^j Z \right) \rightarrow \bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_x^j X \right) \rightarrow 0$$

où il faut entendre pour $\text{in}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{in}_x^j(X, Z) \right)$ l'espace vectoriel des éléments de \bar{N} -degré k de $\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x Z)$ qui sont forme initiale relativement à la \bar{N} -filtration d'un élément de $\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{in}_x^j(X, Z)$.

Il est facile de voir, en utilisant l'identification de $\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x Z)$ avec $\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x W)[Z]$ et celle de $\text{gr}_{\bar{N}}(\text{gr}_x W)$ avec $\text{gr}_x W$, que

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{k=0}^{\nu} \text{gr}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_x^j Z \right) = H_{Z, x}(\nu) .$$

Nous allons maintenant comparer

$$E = \bigoplus_{k=0}^v \text{in}_{\bar{N}}^k \left(\bigoplus_{j=0}^v \text{in}_X^j(X, Z) \right) \quad \text{et} \quad F = \bigoplus_{j=0}^v \text{in}_X^j(X, Z)$$

et montrer qu'ils ont même dimension. Or l'application qui a un élément de $\bigoplus_{j=0}^v \text{in}_X^j(X, Z)$ associe sa \bar{N} -forme initiale est une surjection linéaire par construction, donc $\dim F \geq \dim E$. Mais nous allons montrer que l'on peut trouver une base de E formée d'éléments dont les \bar{N} -formes initiales sont linéairement indépendantes dans F . Soit G_1, \dots, G_m une base de E . On suppose que $\deg(G_1) \geq \deg(G_2) \geq \dots \geq \deg(G_m)$.

Supposons que $\text{in}_{\bar{N}}(G_1), \dots, \text{in}_{\bar{N}}(G_e)$ soient linéairement indépendantes. Si l'on a une relation

$$\text{in}_{\bar{N}}(G_{e+1}) = \sum_{k=1}^e \mu_k \text{in}_{\bar{N}}(G_k),$$

cela signifie que

$$v_{\bar{N}}(G_{e+1} - \sum \mu_k G_k) > v_{\bar{N}}(G_{e+1}).$$

Mais

$$\deg(G_{e+1} - \sum \mu_k G_k) = \deg G_{e+1}$$

puisque $\deg G_k \leq \deg G_{e+1}$ et qu'il ne peut y avoir de relation entre les G_i . On pose

$$G_{e+1}^1 = G_{e+1} - \sum \mu_k G_k.$$

Si $\text{in}_{\bar{N}}(G_{e+1}^1)$ est encore dépendant, on répète la manœuvre, mais on ne peut le faire indéfiniment : on construit donc au bout d'un nombre fini de pas un élément G_{e+1}' dont la \bar{N} -forme initiale est indépendante de $\text{in}_{\bar{N}}(G_1), \dots, \text{in}_{\bar{N}}(G_e)$. Mais $G_1, \dots, G_e, G_{e+1}', G_{e+2}, \dots, G_m$ forment encore une base de E . On épuise $\{1, \dots, m\}$ ainsi en un nombre fini de pas.

Donc $\dim E = \dim F$.

(On aurait aussi pu dire que la longueur d'un anneau (de longueur finie) est égale à la longueur de son gradué associé par rapport à n'importe quelle filtration).

Mais (2) nous dit que

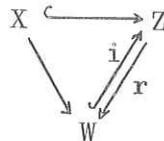
$$\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{k=0}^{\nu} \text{gr}_N^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_X^j X \right) = H_{Z,x}^1(\nu) - \dim F.$$

D'autre part, (1) nous dit que

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{k=0}^{\nu} \text{gr}_N^k \left(\bigoplus_{j=0}^{\nu} \text{gr}_X^j(X) \right) \leq \sum_{p+q=\nu} H_W^0(p) \cdot H_{\mathbb{C}_{X,x}^1 \cap T_{r^{-1}(x),x}}^1(q) \quad (q)$$

avec égalité si et seulement si (1) est un isomorphisme. Puisque $\dim E = \dim F$, $H_{Z,x}^1(\nu) - \dim F = H_{X,x}^1(\nu)$ et le lemme (4.4.1) est démontré.

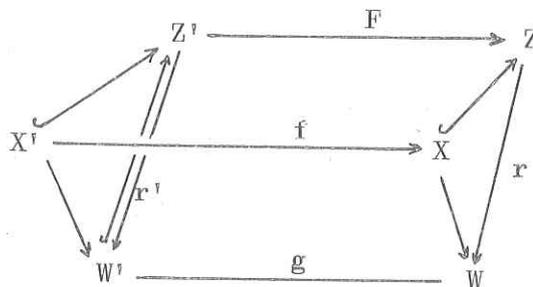
Proposition (4.4.2) : Soit



où r est une rétraction de i , lisse et transverse en X à x .

Soit Y un sous-espace analytique lisse de $W_0 \cap X_0$ où W_0 (resp. X_0) est la strate de Samuel de x dans W (resp. X).

Soit F (resp. f , resp. g) la modification de Z (resp. X , resp. W) de centre Y



Soit $x' \in f^{-1}(x)$ tel que

$$1) \quad H_{X', x'} = H_{X, x}$$

2) $L_{x'} \subset T_{W, x}$ où $L_{x'}$ est le sous-espace vectoriel de $C_{X, x}$ associé au point x' . (Puisque Y est permis pour X , $C_{X, Y, x} \cong C_{X, x} / T_{Y, x}$, et puisque $H_{X', x'} = H_{X, x}$, la direction $l_{x'} \subset C_{X, Y, x}$ correspondant à x' est en fait dans $T_{X, x} / T_{Y, x}$. $L_{x'}$ est l'image réciproque de $l_{x'}$ par la surjection : $T_{X, x} \rightarrow T_{X, x} / T_{Y, x}$ (voir chap. I (5.4.5)).
Alors $x' \in W'$ et $H_{W', x'} = H_{W, x}$.

Démonstration : Tout d'abord, puisque Y est permis pour W , $C_{W, Y, x} \cong C_{W, x} / T_{Y, x}$, et donc $l_{x'} \in C_{W, Y, x}$, donc $x' \in W'$.

Plongeons localement r dans une rétraction d'espaces lisses :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & \tilde{Z} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\quad} & \tilde{W} \end{array}$$

et notons $\tilde{F} : \tilde{Z}' \rightarrow \tilde{Z}$ la modification de \tilde{F} de centre Y .

D'après le théorème de tangence, puisque $H_{X', x'} = H_{X, x}$

$$C_{\tilde{F}^{-1}(x) \cap X', x'} = C_{f^{-1}(x), x'} = C_{X', x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'}$$

Or

$$f^{-1}(x) = F^{-1}(x) \cap X' \quad \text{et} \quad F^{-1}(x) = \tilde{F}^{-1}(x) \cap Z'$$

et on a donc les immersions fermées :

$$C_{f^{-1}(x), x'} \hookrightarrow C_{F^{-1}(x), x'} \cap C_{X', x'} \hookrightarrow T_{\tilde{F}^{-1}(x), x'} \cap C_{X', x'}$$

De l'égalité des extrémités, on déduit :

$$C_{f^{-1}(x), x'} = C_{F^{-1}(x), x'} \cap C_{X', x'}$$

c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 C_{f^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{X', x'} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 C_{F^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{Z', x'}
 \end{array}$$

est cartésien.

Mais le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 C_{F^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{Z', x'} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 C_{g^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{W', x'}
 \end{array}$$

est toujours cartésien. Donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{f^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{Z', x'} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 C_{g^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad} & C_{W', x'}
 \end{array}$$

est cartésien.

Or, puisque $L_{x'} \subset T_{X, x}$ et $L_{x'} \subset T_{W, x}$ on a, par la naturalité de l'isomorphisme () du théorème de tangence :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{f^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & C_{X, x} / L_{x'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{g^{-1}(x), x'} & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & C_{W, x} / L_{x'}
 \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned} C_{X', x'} \cap T_{r'^{-1}(x'), x'} &= \text{fibre de } C_{f^{-1}(x), x'} \xrightarrow{g} C_{g^{-1}(x), x'} \\ &= \text{fibre de } C_{X, x} / L_{x'} \rightarrow C_{W, x} / L_{x'} = C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x}. \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$C_{X', x'} \cap T_{r'^{-1}(x'), x'} \cong C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x}$$

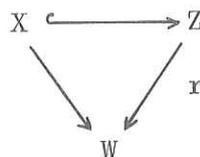
Mais, r étant transverse à X en x , on a, d'après le lemme (4.4.1) :

$$H_{X, x}^1 = H_{W, x}^0 * H_{C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x}}^1$$

d'après le théorème de tangence, on a $H_{W', x'}^0 \leq H_{W, x}^0$ (au moins lexicographiquement), donc, si $H_{W', x}^0 < H_{W, x}^0$, d'après l'égalité plus haut, on aurait $H_{X', x'}^1 \leq H_{X, x}^1$ contradiction.

Donc $H_{W', x'}^1 = H_{W, x}^1$, Q. E. D.

Lemme (4.4.3) : Soit



où r rest une rétraction lisse transverse à X en $x \in W \cap X$. Soient $h, h' \in \mathbb{D}_x$ (disques testants de centre x). On définit un écart entre h et h' , ainsi : pour un système de générateurs w_1, \dots, w_s de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{W, x}$, on pose

$$i(h, h') = \min_{1 \leq i \leq s} v_0(w_i \circ h - w_i \circ h'),$$

cette quantité est clairement indépendante du système de générateurs choisi. En fait,

$$i(h, h') = \inf_{w \in \mathfrak{M}_{W, x}} \{v_o(w \circ h - w \circ h')\}.$$

Soit maintenant (f_1, \dots, f_m) une base standard pour l'idéal de X dans Z en x , normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W, x}; Z_1, \dots, Z_r)$. Posons $v_i = v_x(f_i)$, $1 \leq i \leq m$, et fixons un disque testant $h: \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x , tel que

$$\delta_x^h(W^h, X^h) = \delta < \infty.$$

Alors, pour tout disque testant h' de centre x tel que $i(h, h') > \delta$. $\sup_{1 \leq i \leq m} v_i$

a) $\delta_x^{h'}(W^{h'}, X^{h'}) = \delta_x^h(W^h, X^h) (= \delta)$

b) Il y a un isomorphisme canonique :

$$C_{X^{h'}, x}^{W^{h'}, \delta} \cong C_{X^h, x}^{W^h, \delta}.$$

Démonstration : Remarquons que l'on a un $T_{\mathbb{D}, 0}$ -isomorphisme canonique

entre $T_{Z^h, x}^h$ et $T_{Z^{h'}, x}^{h'}$ (celui qui envoie Z_i^h sur $Z_i^{h'}$). Nous allons

montrer qu'il induit un isomorphisme $C_{X^h, x}^h \cong C_{X^{h'}, x}^{h'}$. En effet, il

suffit pour cela de montrer que $\text{in}_o(f_i^h)$ s'envoie sur $\text{in}_o(f_i^{h'})$. Mais

puisque $v_o(f_{i,A} \circ h - f_{i,A} \circ h') \geq i(h, h')$ et que les seuls $f_{i,A} \circ h$ qui

vont compter dans la forme initiale sont ceux qui vérifient

$v_o(f_{i,A} \circ h) = v_i - |A|$ (puisque la rétraction est transverse, on a $v_o(f_i^h) = v_o(f_i^{h'}) = v_i$), on voit que si $v_o(f_{i,A} \circ h) = v_i - |A|$, puisque $i(h, h') > v_i - |A|$ certainement,

$$\text{cl} \left(f_{i,A} \circ h \bmod \mathfrak{M}_{\mathbb{D}, 0}^{v_i - |A| + 1} \right) = \text{cl} \left(f_{i,A} \circ h' \bmod \mathfrak{M}_{\mathbb{D}, 0}^{v_i - |A| + 1} \right) = \varphi_{i,A} \text{ disons,}$$

et donc, puisque

$$\text{in}_{x^h}(f_i^h) = \sum \varphi_{i,A} Z_i^{h^A}, \quad \text{in}_{x^{h'}}(f_i^{h'}) = \sum \varphi_{i,A} Z_i^{h'^A},$$

ce qu'il fallait démontrer.

$$\text{Montrons maintenant que } \delta_{x^h}(W^h, X^h) = \delta_{x^{h'}}(W^{h'}, X^{h'}),$$

(f_1^h, \dots, f_m^h) et $(f_1^{h'}, \dots, f_m^{h'})$ étant des bases standard normalisées, on a, d'après [(1.4.21)],

$$\delta_{x^h}(W^h, X^h) = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i^h, \quad \delta_{x^{h'}}(W^{h'}, X^{h'}) = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i^{h'}$$

où

$$\delta_i^h = \min_{|A| < v_i} \frac{v_o(f_{i,A} \circ h)}{v_i - |A|}, \quad \delta_i^{h'} = \min_{|A| < v_i} \frac{v_o(f_{i,A} \circ h')}{v_i - |A|}.$$

Mais l'inégalité $v_o(f_{i,A} \circ h - f_{i,A} \circ h') > \delta \cdot \text{Sup}_{1 \leq i \leq m} v_i$ nous donne

$$v_o(f_{i,A} \circ h') = v_o(f_{i,A} \circ h)$$

ou bien

$$> \delta \cdot \text{Sup}(v_i).$$

Dans les deux cas $\frac{v_o(f_{i,A} \circ h')}{v_i - |A|} \geq \delta$ et donc $\delta_{x^{h'}}(W^{h'}, X^{h'}) \leq \delta$. Mais il

existe un (i_o, A_o) tel que $\frac{v_o(f_{i_o, A_o} \circ h)}{v_{i_o} - |A_o|} = \delta$ i.e.

$v_o(f_{i_o, A_o} \circ h) = \delta(v_{i_o} - |A_o|) \leq \delta \text{ Sup } v_i$ pour cet indice (i_o, A_o) , nécessairement

$v_o(f_{i_o, A_o} \circ h) = v_o(f_{i_o, A_o} \circ h')$ et donc $\frac{v_o(f_{i_o, A_o} \circ h')}{v_{i_o} - |A_o|} = \delta$, ce qui montre que

l'on a égalité, et donc que :

$$\delta_{x^h}(W^h, X^h) = \delta_{x^{h'}}(W^{h'}, X^{h'}).$$

Montrons maintenant b). Il suffit de vérifier que

$$\text{in}_x^h(f_i^h)_{W^h, \delta} \text{ s'envoie sur } \text{in}_x^{h'}(f_i^{h'})_{W^{h'}, \delta}$$

par l'isomorphisme $\text{gr}_x^h(\text{gr}_{W^h}^{Z^h})$ sur $\text{gr}_x^{h'}(\text{gr}_{W^{h'}}^{Z^{h'}})$ défini par $Z_i^h \rightsquigarrow Z_i^{h'}$.

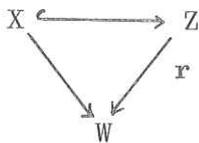
Mais ceci est clair si l'on écrit :

$$\text{in}_x^h(f_i^h)_{W^h, \delta} = \frac{\text{cl}\left(f_{i,A} \circ \text{mod } \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{v_i - |A| + 1}\right)_{Z^h}}{|A| + \frac{v_o(f_{i,A} \circ h)}{v_i - |A|} = \delta}$$

puisque la condition implique $v_o(f_{i,A} \circ h) = \delta(v_i - |A|)$
 (resp. $v_o(f_{i,A} \circ h') = v_i - |A|$) et l'on vient de voir que
 $v_o(f_{i,A} \circ h') = v_i - |A|$,

$$\text{cl}\left(f_{i,A} \circ h' \text{ mod } \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{v_i - |A| + 1}\right) = \text{cl}\left(f_{i,A} \circ h \text{ mod } \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{v_i - |A| + 1}\right).$$

Proposition (4.4.4) : Soit



où r est perpendiculaire à X en $x \in W \cap X$.

Soit H un sous-espace analytique strict de W contenant x . Pour que r ait le contact maximal en x , il faut et il suffit que pour tout disque testant $h : \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - H$, on ait

$$\delta_x^h(W^h, X^h) = \delta_x^r(X^h).$$

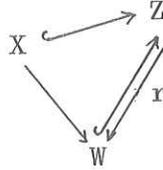
Démonstration : Si h' est un disque testant tel que $h(\mathbb{D}) \subset H$, il faut montrer que l'on peut trouver h tel que $i(h, h') > \delta(v_i - |A|)$ et $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - H$.

On peut se permettre de remplacer h' par la composition $h' \circ e$ de h avec le morphisme $e : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ donné par $t' = t^e$. Si l'on considère la modification $g^{(1)} : W^{(1)} \rightarrow W$ de centre x , il y a un seul point $x^{(1)} \in W^{(1)}$ tel que h' se factorise en un disque testant de centre $x^{(1)}$. (On suppose bien sûr que $h'(\mathbb{D}) \neq \{x\}$, cas qui ne présente aucun intérêt) ($x^{(1)}$ est l'unique point au-dessus de x dans la transformée stricte de l'image de h'). On considère $g^{(r)} : W^{(r)} \rightarrow W^{(1)}$ modification de $W^{(1)}$ de centre $x^{(1)}$, et l'on continue ainsi. Soit $G^{(r)} : W^{(r)} \rightarrow W$
 $G^{(r)} = g^{(1)} \circ \dots \circ g^{(r-1)} \circ g^{(r)}$.

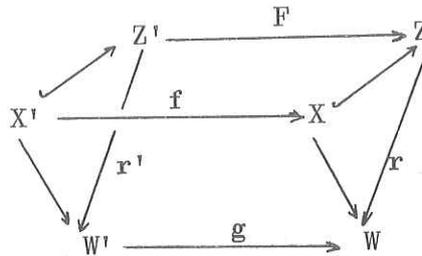
Si nous considérons un germe de courbe irréductible passant par $x^{(r)}$ mais non contenue dans $G^{(r)-1}(H)$, sa normalisation fournira par composition avec $G^{(r)}$ un disque testant h tel que $i(h, h' \circ e)$ soit aussi grand que l'on veut (pour r assez grand et un e convenable) et qui vérifie $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - H$. (La démonstration détaillée est bien instructive et est laissée aux soins du lecteur).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de stabilité du contact maximal par modification permise :

Théorème (4.4.5) : Soit



où r est une rétraction lisse ayant le contact maximal avec X en $x \in W \cap X$. Soit X_0 (resp. W_0) la strate de Samuel de x dans X (resp. W). Soit $Y \subset W_0 \cap X_0$ sous-espace analytique lisse contenant x . Considérons les modifications de centre Y :



En tout point $x' \in f^{-1}(x)$ tel que $H_{X', x'} = H_{X, x}$,

- a) $x' \in W'$
- b) $H_{W', x'} = H_{W, x}$
- c) la rétraction transformée r' (3.1.8) a le contact maximal avec X' en x' .

Démonstration : Les points a) et b) résultent immédiatement de la proposition (4.4.2) : nous avons en effet démontré, (4.3.3), que puisque r a le contact maximal, $T_{X, x} \subseteq T_{W, x}$.

Pour démontrer c), remarquons tout d'abord que puisque r est transverse, il en est de même de r' (grâce au théorème (3.2.1)). On a donc

$$C_{X, x} \cap T_{r^{-1}(x), x} = C_{X \cap r^{-1}(x), x}$$

$$C_{X', x'} \cap T_{r'^{-1}(x'), x'} = C_{X' \cap r'^{-1}(x'), x'}$$

Mais nous avons vu en (4.4.2) que les cônes de gauche sont isomorphes. Ceux de droite le sont donc aussi, et puisque $T_{X \cap r^{-1}(x), x} = 0$, il en est de même de $T_{X' \cap r'^{-1}(x'), x'}$, ce qui montre que r' est perpendiculaire à X' en x' . Le théorème sera donc démontré, grâce à la proposition (4.4.4) si nous montrons que : pour tout disque testant $h: \mathbb{D} \rightarrow W'$ de centre x' , tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W' - g^{-1}(Y)$ on a l'égalité $\delta_{x', h}(W'^h, X'^h) = \delta_{x', h}^\tau(X'^h)$.

Fixons d'abord quelques notations :

Soit (f_1, \dots, f_m) une base standard pour X dans Z en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W, x}; Z_1, \dots, Z_r)$. Le théorème (3.2.1) nous dit que si f'_i

désigne la transformée de f_i (i.e. $f'_i = \frac{f_i \circ F}{v_i}$ où $v_i = v_x(f_i)$ et v est

un générateur local en x' pour l'idéal du diviseur $g^{-1}(Y)$ dans W' , (f'_1, \dots, f'_m) est une base standard pour X' dans Z' en x' , normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W', x'}; Z'_1, \dots, Z'_r)$.

Choisissons un disque testant $h: \mathbb{D} \rightarrow W'$, de centre x' , tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W' - g^{-1}(Y)$. Nous noterons $h_1 = g \circ h: \mathbb{D} \rightarrow W$ qui est un disque testant de centre x (tel que $h_1(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - Y$).

Ecrivons $f_i = \sum_A f_{i,A} Z^A$. Si nous posons $f'_{i,A} = \frac{f_{i,A} \circ g}{v_i^{-|A|}}$, nous avons :

$$f'_i = \sum_A f'_{i,A} Z'^A$$

Si $\delta_{x', h}(W'^h, X'^h)$ est infini, il n'y a rien à démontrer. Nous supposons donc $\delta_{x', h}(W'^h, X'^h) = d' < \infty$. Puisque une base standard normalisée le reste par changement de base, nous pouvons écrire, en posant

$d = \delta_{x^1}^{h_1}(W^1, X^1)$, et $k = v_0(v \circ h)$ (k n'est pas infini, car l'hypothèse $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W^1 - g(Y)$ implique que la fonction $v \circ h$ n'est pas nulle) :

$$\begin{aligned} d &= \min_{1 \leq i \leq m} \left(\min_{|A| < v_i} \frac{v_0(f_{i,A} \circ h_1)}{v_i - |A|} \right) \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \min_{|A| < v_i} \left(\frac{v_0((f'_{i,A} \circ v^{v_i - |A|}) \circ h)}{v_i - |A|} \right) \\ &= k + \min_{1 \leq i \leq m} \min_{|A| < v_i} \left(\frac{v_0(f'_{i,A} \circ h)}{v_i - |A|} \right) \\ &= k + \delta_{x^1}^{h_1}(W^1, X^1) = k + d^1. \end{aligned}$$

Ecrivons avec les notations de (1.4.3) :

$$\begin{aligned} f_i^* &= i_d \left(\text{in}_o(f_i^{h_1})_{W^1, d} \right) = \frac{\text{in}_o(f_{i,A} \circ h_1)(Z^1)^A}{d|A| + v_0(f_{i,A} \circ h_1) = d \cdot v_i} \\ f_i^{1*} &= i_{d^1} \left(\text{in}_o(f_i^{h_1})_{W^1, d^1} \right) = \frac{\text{in}_o(f'_{i,A} \circ h)(Z^1)^A}{d^1|A| + v_0(f'_{i,A} \circ h) = d^1 \cdot v_i} \end{aligned}$$

$(Z^1)^{h_1}$ représente le r -uplet : $(\text{in}_o^{Z^1}, \dots, \text{in}_o^{Z^r})$. La modification $F: Z^1 \rightarrow Z$ et la construction de h_1 nous donnent un isomorphisme canonique $j: Z^1 \rightarrow Z^1$ (tous deux isomorphes à $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^r$), et si nous choisissons une coordonnée locale t sur $W^1 (\cong \mathbb{D})$, de centre x^1 , $t \circ j$ que nous noterons t^1 , est une coordonnée locale sur W^1 , de centre x^1 . Si nous notons T (resp. T^1) la forme initiale de t (resp. t^1), après les identifications habituelles des cônes tangents anisotropes à Z^1 avec $T_{x^1} Z^1$ (resp. Z^1 avec $T_{x^1} Z^1$), on a :

$$\begin{aligned} f_i^* &\in \mathbb{C}[T, Z^1] \\ f_i^{1*} &\in \mathbb{C}[T^1, Z^1] . \end{aligned}$$

Remarque : En fait, t et t' sont "la même" coordonnée locale sur le disque \mathbb{D} , vue à travers les isomorphismes $\mathbb{D} \simeq W'^h$, $\mathbb{D} \simeq W^{h_1}$. D'autre part, on remarque que puisque $f_{i,A} \circ h_1 = (v_i^{-|A|} f'_{i,A}) \circ h$ et puisque $v \circ h = t'^k$ (à une unité près) on a :

$$\text{in}_0(f_{i,A} \circ h) = T^{k(v_i^{-|A|})} \text{in}_0(f'_{i,A} \circ h)$$

d'où

$$f_i^* = \sum T^{k(v_i^{-|A|})} \text{in}_0(f'_{i,A} \circ h) (Z^{h_1})^A.$$

Pour pouvoir comparer f_i^* et $f_i'^*$, substituons formellement T' à T et Z'^h va Z^{h_1} dans l'expression de f_i^* : on obtient

$$f_i^*(T', Z'^h) = \sum_{d|A| + v_0(f_{i,A} \circ h_1) = d \cdot v_i} T'^{k(v_i^{-|A|})} \text{in}_0(f'_{i,A} \circ h) (Z'^h)^A.$$

Mais $v_0(f_{i,A} \circ h_1) = k(v_i^{-|A|}) + v_0(f'_{i,A} \circ h)$, et donc l'égalité

$d|A| + v_0(f_{i,A} \circ h_1) = d \cdot v_i$ est équivalente à l'égalité

$d'|A| + v_0(f'_{i,A} \circ h) = d' \cdot v_i$, puisque $d = k + d'$. On obtient donc l'identité formelle :

(*)

$$f_i^*(T', T'^k Z'^h) \equiv T'^{kv_i} f_i'(T', Z'^h).$$

Nous allons utiliser ces égalités pour démontrer qu'il est impossible d'avoir $\delta_{x',h}(W'^h, X'^h) < \delta_{x',h}^T(X'^h)$. Puisque $d = k + d'$, on a certainement $d > 1$, ce qui entraîne que $T_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h \supseteq T_{W^{h_1}, x^{h_1}}^h$. Mais puisque r a le contact maximal, et est donc perpendiculaire, il en est de même de r^{h_1} , et (4.3.3) nous montre que : $T_{W^{h_1}, x^{h_1}}^h = T_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h$.

D'autre part, les égalités : $f_i = (f'_i \cdot v^i)$ impliquent que $f_i^{h_1} = (f'_i \cdot v^i)^{h_1}$, ce qui montre qu'au voisinage de x^{h_1} , X^{h_1} coïncide avec la transformée stricte de X^{h_1} dans une suite de k modifications de centres ponctuels (cette suite de modifications induisant un isomorphisme : $W^h \simeq W^{h_1}$). Comme une base standard normalisée le reste par changement de base, $(f_1^{h_1}, \dots, f_m^{h_1})$ est une base standard normalisée, ce qui implique que $v^*(X^{h_1}, Z^{h_1}) = v^*(X^{h_1}, Z^{h_1})$, (3.2.5), et donc $H_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h = H_{X^{h_1}, x^{h_1}}^{h_1}$ (3.2.5, addendum[♦]).

De plus, si $T_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h = (0)$, $\delta_{x^{h_1}}^\tau(X^{h_1}) = 1$ (voir (1.5), addendum[♦]),

et il n'y a rien à démontrer. Nous suppo-

serons donc $\dim T_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h = 1$. D'après (chap. I (5.4.6)), il y a alors

un isomorphisme (non canonique) entre $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h$ et $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^{h_1}$.

Or, si $d' = \delta_{x^{h_1}}(W^{h_1}, X^{h_1}) < \delta_{x^{h_1}}^\tau(X^{h_1})$, il existe un $T_{W^{h_1}, x^{h_1}}^h$ -automorphisme

de $C_{Z^{h_1}, x^{h_1}}^h$ qui envoie $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^{W^{h_1}, d'}$ sur $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h$.

Ceci signifie d'après (4.3.2) qu'il existe des polynômes homogènes $S_i(T')$ de degré d' tels que

$$f_i^{h_1} * (T', Z_1^{h_1} + S_1'(T'), \dots, Z_r^{h_1} + S_r'(T')) = \text{in}_{x^{h_1}} f_i^{h_1} = \lambda_i(Z^{h_1}).$$

Utilisant l'équivalence de 2) et 3) dans (4.3.2), ainsi que l'isomorphisme de $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^h$ avec $C_{X^{h_1}, x^{h_1}}^{h_1}$ mentionné plus haut, les formules (*)

nous montrent que l'on devrait avoir :

$$f_i^{h_1} * (T, Z_1^{h_1} + S_1'(T) \cdot T^k, \dots, Z_r^{h_1} + S_r'(T) \cdot T^k) = \text{in}_{x^{h_1}} f_i^{h_1}$$

♦ à venir.

ce qui, toujours d'après (4.3.2), contredirait l'hypothèse que r a le contact maximal avec X en x , puisque cela entraînerait

$$\delta_{x, h_1}^{h_1}(W^1, X^1) < \delta_{x, h_1}^{\tau}(X^1). \quad \text{Q. E. D.}$$

Remarque : En fait, comme d'habitude, nous nous sommes ramenés à démontrer le théorème dans le cas où $W = \mathbb{D}$, mais pour tenir compte de la ramification, nous avons dû considérer k modifications de centre ponctuel successives.

Corollaire (4.4.6) : Si $r: \mathbb{Z} \rightarrow W$ a le contact maximal avec $x \in \mathbb{Z}$ en $x \in W \cap X$, on a au voisinage de x l'inclusion des strates de Samuel :

$$\boxed{X_0 \subset W_0} .$$

Démonstration : Nous allons d'abord montrer que $X_0 \subset \mathbb{Z}_0 = r^{-1}(W_0)$.

Soit en effet Γ un germe de courbe irréductible contenu dans X_0 . Si nous considérons la modification de centre x , et si Γ' est la transformée stricte de Γ , x' l'unique point de Γ' au-dessus de x , si X'_0 (resp. \mathbb{Z}'_0) désigne l'ensemble des points de X' tels que $H_{X', x'} = H_{X, x}$, (resp. $H_{\mathbb{Z}', x'} = H_{\mathbb{Z}, x}$), on a les équivalences suivantes :

$$\Gamma \subset X_0 \Leftrightarrow \Gamma - x \subset X_0 \Leftrightarrow \Gamma' - x' \subset X'_0 \Leftrightarrow \Gamma' \subset X_0$$

(resp.)

$$\Gamma \subset \mathbb{Z}_0 \Leftrightarrow \Gamma - x \subset \mathbb{Z}_0 \Leftrightarrow \Gamma' - x' \subset \mathbb{Z}'_0 \Leftrightarrow \Gamma' \subset \mathbb{Z}'_0$$

(ceci grâce au fait que les strates de Samuel sont localement fermées).

Il est donc équivalent de montrer $\Gamma \subset \mathbb{Z}_0$ ou $\Gamma' \subset \mathbb{Z}'_0$. Mais puisque $\Gamma \subset X_0$, $\Gamma' \subset X'_0$ i.e. $x' \in X'_0$. Grâce aux points a) et b) de (4.4.5), $x' \in X'_0$ implique que $H_{W', x'} = H_{W, x}$, soit $H_{\mathbb{Z}', x'} = H_{\mathbb{Z}, x}$ et donc $x' \in \mathbb{Z}'_0$. Mais grâce à (4.4.5), les hypothèses de (4.4.6) sont conservées après la modification de centre x . Or, au bout d'un nombre fini de telles

modifications, on rendra $\mathbb{Z}^{(r)}$ normalement plat le long de la transformée $\Gamma^{(r)}$ de Γ (3.3.6).

On aura donc $\Gamma^{(r)} \in \mathbb{Z}_0^{(r)}$, d'où $\Gamma \subset \mathbb{Z}_0$, Q. E. D.

Ceci nous montre en tous cas que $X_0 \cap W \subset W_0$. Mais si nous supposons que $\Gamma \not\subset W$, au bout d'un nombre fini de modifications, nous séparerons Γ de W (en effet, on rendra $\Gamma \cup W$ normalement plat le long de la transformée $\Gamma^{(r)}$ de Γ , ce qui est clairement absurde si $\Gamma^{(r)} \not\subset W^{(r)}$ ou $\Gamma^{(r)} \cap W^{(r)} \neq \emptyset$). Mais l'hypothèse de la proposition est encore conservée à chaque pas grâce à (4.4.5), et séparer $\Gamma^{(r)}$ de $W^{(r)}$ contredit l'assertion a) de (4.4.6). Q. E. D.

(4.5) Avant de passer au chapitre suivant qui sera consacré à l'étude de la continuité des objets que nous avons défini (i.e. de la permanence de ces objets dans un voisinage du point où ils sont définis), nous allons résumer ce qui a été fait jusqu'ici en montrant le parallèle entre le cas des courbes et le cas général.

(4.5.1) Soit C une courbe plane passant par le point x : nous avons commencé par définir la multiplicité $m_x(C)$ de C en x , qui est un caractère numérique qui permet de reconnaître si C est lisse (en fait on a toujours $m_x(C) \geq 1$ et $m_x(C) = 1 \Leftrightarrow C$ est lisse en x). De plus ce caractère diminue par modification de centre ponctuel : si $f: C' \rightarrow C$ est la modification de centre x , et si $x' \in f^{-1}(x)$, on a $m_{x'}(C') \leq m_x(C)$.

Le caractère numérique qui rend les mêmes services dans le cas général est la fonction de Samuel $H_{X,x}$ qui est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . On a montré en effet que si X est de dimension d ,
 $H_{X,x}^0(n) \geq \binom{n+d-1}{d-1}$ et $H_{X,x}^0(n) = \binom{n+d-1}{d-1}$ pour tout $n \Leftrightarrow X$ est lisse en x .

Nous avons vu ensuite, ce qui ne se posait pas pour les courbes, que la fonction H^1 définissait une stratification localement finie de X par des sous-espaces analytiques (I, (4.3.1)).

Enfin nous avons vu que si $f: X' \rightarrow X$ est une modification permise, et si $x' \in f^{-1}(x)$, alors $H_{X',x'}^1 \leq H_{X,x}^1$ pour l'ordre total (I, (5.1.3)) (une modification permise est une modification de centre Y lisse, tel que X soit normalement plat le long de Y , ce qui est équivalent à dire que $H_{X,y}$ est constante sur chaque composante connexe de Y).

(4.5.2) Passons maintenant aux théorèmes de tangence qui indiquent ce qui se passe lorsque la fonction de Samuel ne diminue pas par éclatement permis.

Pour les courbes, nous avons vu que si $m_{x'}(C') = m_x(C)$, le cône tangent $C_{C,x}$ est une droite comptée $m_x(C)$ -fois (ce qui entraîne que l'espace tangent strict $T_{C,x}$ est une droite) ; ceci implique que

$f^{-1}(x)$ est réduit au point x' qui s'identifie alors à $\text{proj}(T_{C,x})$.

De plus si $\dim T_{C',x'} = 1$, les cônes $C_{C,x}$ et $C_{C',x}$ sont isomorphes. Les théorèmes analogues dans le cas général sont les théorèmes de tangence (I, (5.4.5) et (5.4.6)) :

soit Y un centre d'éclatement permis contenant x , et $C_{X,Y,x}$ le cône normal à X le long de Y en x : on a $C_{X,Y,x} \xrightarrow{\sim} C_{X,x}/T_{Y,x}$ par normale platitude ; soit x' un point de $f^{-1}(x)$ tel que $H_{X',x'} = H_{X,x}$; x' est alors égal à $\text{proj} l_{x'}$, où $l_{x'}$ est une droite de $C_{X,Y,x}$. Si l'on désigne par $L_{x'}$ l'image inverse de $l_{x'}$ dans $C_{X,x}$, le théorème dit que l'on a l'inclusion $L_{x'} \subset T_{X,x}$, que $\dim T_{X',x'} \leq \dim T_{X,x}$, et que si $\dim T_{X',x'} = \dim T_{X,x}$, il y a un isomorphisme (non canonique) entre $C_{X,x}$ et $C_{X',x'}$.

(4.5.3) Il s'agissait alors de trouver un caractère numérique qui diminue par modification permise lorsque la fonction de Samuel reste constante : c'est la théorie du contact de X avec un espace W passant par x qui va le fournir.

Pour les courbes nous avons défini l'exposant de contact $d_x(W,C)$ d'une courbe lisse W passant par x avec C : c'est un nombre rationnel tel que si W' est la transformée stricte de W par la modification de centre x , si $x' \in W'$ et si $m_{x'}(C') = m_x(C)$, alors

$$d_{x'}(W',C') = d_x(W,C) - 1.$$

Dans le cas général, nous allons supposer W lisse (bien que dans le texte le cas où W est singulier ait été abordé).

On suppose donc que (localement en x) X est plongé dans un espace lisse Z , muni d'une rétraction r lisse sur un sous-espace lisse W contenant x .

Si la rétraction r est transverse à X en x (ce qui veut dire que le morphisme $dr : C_{X,x} \rightarrow C_{W,x}$ est plat) nous avons défini

l'exposant de contact $d_x(W, X)$ de W avec X en x . Si on fait une modification permise de la situation (i.e. le centre Y de modification est lisse, contenu dans $X \cap W$, et X est normalement plat le long de Y en x), et si on prend un point $x' \in W' \cap X'$, on peut encore définir localement en x' une rétraction lisse $r' : Z' \rightarrow W'$. Si de plus on suppose que $H_{X', x'} = H_{X, x}$ et que r est transverse à X en x , r' est transverse à X' en x' (II, (3.2.1)) ; malheureusement, contrairement au cas des courbes, on ne peut pas comparer (en général) $d_x(W, X)$ et $d_{x'}(W', X')$.

Il a donc fallu introduire une notion plus fine, qui est celle d'exposant idéaliste de contact \mathcal{E} de W avec X en x . Un représentant de \mathcal{E} est le couple formé par un idéal cohérent \mathfrak{J} sur W et un entier b tels que pour tout "disque testant" $h : \mathbb{D} \rightarrow W$ avec $h(0) = x$, on ait $\frac{v_0(\mathfrak{J}^h)}{b} = d_0(W^h, X^h)$.

Grâce à la technique de la base standard normalisée, nous avons pu prouver qu'un tel exposant idéaliste de contact existait (II, (2.3.5)) et étudier le comportement de \mathcal{E} par modification permise : nous avons défini le transformé \mathcal{E}' de \mathcal{E} (II, (3.1.7)) et montré le théorème de stabilité I (II, (3.3.1)) : si $x' \in W' \cap X'$ est tel que $H_{X', x'} = H_{X, x}$, alors \mathcal{E}' est l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' .

De plus nous avons défini l'ensemble $\text{sing}(\mathcal{E})$ pour un exposant idéaliste (si $\mathcal{E} = ((\mathfrak{J}, b))$, c'est l'ensemble des $x \in W$ tels que $v_x(\mathfrak{J}) \geq b$; $\text{sing}(\mathcal{E})$ est un sous-espace analytique de W). Le théorème de stabilité I dit aussi que les points de $\text{sing} \mathcal{E}' \cap W'$ sont exactement les points x' de X' aussi mauvais que x , i.e. tels que $H_{X', x'} = H_{X, x}$.

On voit que sous cette forme, le théorème de stabilité I est une généralisation de l'égalité $d_{x'}(W', C') = d_x(W, C) - 1$ démontrée pour les courbes : si en effet l'exposant idéaliste de contact de W avec C en x est $\mathcal{E} = ((w^p, q))$, on a $d_x(W, X) = p/q$ et $\mathcal{E}' = ((w^{p-q}, q))$.

(4.5.4) Le théorème de stabilité I montre que si l'on suppose que l'on sait résoudre \mathcal{E} , i.e. trouver une suite de n modifications permises telle que l'on ait $\text{sing } \mathcal{E}^{(n)} = \emptyset$, il n'y aura plus de points aussi mauvais que x dans $W^{(n)} \cap f^{-1}(x)$, si $f: X^{(n)} \rightarrow X$ est la suite de modifications envisagée ; nous avons donc été amené à définir la notion de contact total : un espace W a le contact total avec X en x si pour toute suite de p modifications permises, le transformé $W^{(p)}$ passe par tous les points de $X^{(p)}$ aussi mauvais que x qui se projettent sur x .

Pour montrer l'existence d'un W ayant le contact total, nous avons défini la notion de contact maximal de W avec X en x , notion qui dépend de la rétraction r choisie et qui est plus forte que le contact total.

Pour les courbes, le contact maximal a été défini à l'aide de l'exposant maximal avec C en x , si $d_x(W, C) = \text{Sup}(d_x(W_1, C))$, le Sup étant pris sur toutes les courbes lisses W_1 passant par x .

Pour montrer l'existence d'un tel W , nous avons introduit la notion de cône tangent d'indice i dans la direction de W noté $C_{C,x}^{W,i}$ et montré que W avait le contact maximal si et seulement si $C_{C,x}^{W,d_x(W,C)}$ n'avait pas la forme binomiale (i.e. n'était pas défini par une équation de la forme $(Z + \lambda W^d)^v$).

L'idée pour trouver W , était alors de faire un changement de variable pour que dans l'équation f de C il n'y ait plus de termes en z^{v+1} ("transformation de Tschirnhaus"). Dans le cas général, on dit qu'une restriction $r: Z \rightarrow W$ a le contact maximal avec X en x si

1) elle est perpendiculaire (condition technique plus forte que la transversalité)

2) pour tout disque testant $h: \mathbb{D} \rightarrow W$ de centre x ,

$$d_{x^h}(W^h, W^h) = d_{x^h}(X^h) = \text{Sup}(d_{x^h}(\Gamma, X^h)),$$

le Sup étant pris sur toutes les courbes lisses Γ passant par x^h et contenues dans Z^h (II, (4.2.4)).

L'existence du contact maximal a été prouvée à l'aide des données distinguées (II, (4.3.4)), et la technique de démonstration généralise directement le cas des courbes.

Nous avons enfin prouvé le théorème de stabilité II, (II, (4.4.5)) qui montre la stabilité de la notion de contact maximal par modification permise (pour tous les points aussi mauvais que x), et qui permet de montrer que le contact maximal implique le contact total (II, (4.4.6)).

(4.5.5) Nous avons ainsi terminé une partie du travail : les techniques que nous avons introduites permettent en effet de montrer que l'on peut résoudre les singularités d'une variété algébrique compacte réduite X définie sur \mathbb{C} .

Esquissons la démonstration : soit S la strate de Samuel des points pires de X ; c'est une sous-variété algébrique fermée de X .

Nous allons commencer par nous ramener au cas où S est réduit à un nombre fini de points : si tel n'est pas le cas, on prend un point générique x de S , et on résout le localisé X_x de X en ce point, grâce à l'hypothèse de récurrence sur la dimension. On a donc un morphisme birationnel : $X' \xrightarrow{f} X_x$ tel que $H_{X', x'} < H_{X, x}$ pour tous les points x' de X' tels que $f(x') = x$.

Pour étendre f à X tout entier, on prolonge à X (par adhérence) les centres de modifications qui définissent f : comme ces prolongements ne sont pas nécessairement lisses, on commence par les résoudre (toujours grâce à l'hypothèse de récurrence) ; remarquons que comme tout se passe dans la strate de Samuel S , les modifications effectuées sont nécessairement permises pour X .

On peut ainsi supposer que S est réduite à un point x ; on applique alors la théorie du contact, en montrant que l'hypothèse de récurrence permet de résoudre les exposants idéalistes dont le support est de dimension plus petite que celle de X en x . Si W a le contact maximal avec X en x , soit \mathcal{E} l'exposant idéaliste de contact correspondant ; on suppose donc qu'au bout de p modifications permises, on a $\text{Sing } \mathcal{E}^{(p)} = \emptyset$: il n'y a ainsi plus dans $X^{(p)}$ de points au-dessus de x ayant la même fonction de Samuel que x , à cause du théorème de stabilité I ; comme par hypothèse $S = \{x\}$ et la fonction de Samuel diminue par modification permise, il n'y a donc plus dans $X^{(p)}$ de point aussi mauvais que X .

Comme il n'apparaît dans X qu'un nombre fini de fonctions de Samuel différentes, on voit que l'on peut ainsi résoudre les singularités de X par un nombre fini d'opérations comme celles qui viennent d'être décrites.