CLÔTURE INTÉGRALE DES IDÉAUX ET ÉQUISINGULARITÉ

by Monique LEJEUNE-JALABERT, Bernard TEISSIER

Introduction

La motivation originelle des résultats du chapitre I venait d'une démonstration du théorème de "continuité du contact" de Hironaka, point important de sa démonstration de la résolution des singularités des espaces analytiques complexes.

Il s'est avéré que ces résultats étaient aussi fort utiles dans l'étude des problèmes d'équisingularité, et c'est cela qui a été exposé dans la seconde partie du séminaire qui sera rédigée ultérieurement. Une des idées essentielles de ces applications se trouve d'ailleurs déjà au chapitre I, dans le lien entre $\bar{\nu}$ et l'exposant de Łojasiewicz, le lien qui permet d'algébriser des conditions de nature transcendante dans certains cas, et en particulier d'appliquer à l'étude de "conditions d'incidences" du type conditions de Whitney la puissance de l'algèbre. (Voir en particulier Astérisque n° 7–8, 1973).

Signalons pour terminer qu'à l'époque du séminaire nous ignorions l'existence des travaux de Samuel (Some asymptotic properties of powers of ideals, Annals of Math., Series 2, t. 56) et de Nagata (Note on a paper of Samuel, Mem. Call. of Sciences Univ. of Kyoto, t. 30, 1956–1957) où la rationalité de $\bar{\nu}$ en géométrie algébrique est démontrée par une méthode qui est essentiellement celle donnée ici au § 4. Ces articles nous ont été signalés par L. Szpiro ; nous l'en remercions. Après réflexion, il nous a semblé que notre travail d'étude systématique de la filtration par le $\bar{\nu}$ et de ses propriétés de finitude en géométrie analytique complexe, précisait suffisamment les résultats de Samuel et Nagata, et en montrait des applications assez nouvelles, pour présenter un certain intérêt par lui-même.

0. Fonction d'ordre, gradué associé. Définition de $\bar{\nu}$

Tous les anneaux considérés ici sont unitaires et commutatifs et les homomorphismes d'anneaux transforment l'élément unité en l'élément unité.

$\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{N}$ les entiers non négatifs, $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{R}_0$ les réels non négatifs, $\mathbb{R}_+$ les réels positifs et $\overline{\mathbb{R}}_0 = \mathbb{R}_0 \cup \infty$.

0.1. Quelques rappels.

0.1.1. Définition. — *Soit A un anneau. Soit $\mu : A \to \overline{\mathbb{R}}_0$ une application. On dit que c'est une fonction d'ordre, si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\mu(x+y) \geq \inf\big(\mu(x), \mu(y)\big)$

ii) $\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) + \mu(y)$

iii) $\mu(0) = \infty \quad \mu(1) = 0.$

(Pour donner un sens précis à ces conditions, on utilise les conventions habituelles sur le symbole ∞, à savoir : ∞ est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}_0$ à être supérieur à tout $d \in \mathbb{R}_0$, $\infty + d = d + \infty = \infty$ pour tout $d \in \overline{\mathbb{R}}_0$).

0.1.2. Définition. — *Soit A un anneau. On appelle filtration (décroissante) sur A, une suite décroissante $(A_d)_{d \in \mathbb{R}_0}$ de sous-groupes de A vérifiant :*

i) $A_d \cdot A_e \subset A_{d+e}$ *pour* $d \in \mathbb{R}_0, e \in \mathbb{R}_0$

ii) $A_0 = A$

iii) Il existe $d \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $A_d \neq A$.

A est alors dit filtré.

0.1.3. Remarques. — Si μ est une fonction d'ordre, on a toujours $\mu(x) = \mu(-x)$, et si $\mu(x) < \mu(y), \mu(x+y) = \mu(x)$.

Si A est un anneau filtré, A_d est un idéal de A pour tout $d \in \mathbb{R}_0$ et pour tout $d \in \mathbb{R}_+, A_d \neq A$.

0.1.4. Remarque. — Il y a équivalence entre les notions de fonction d'ordre et d'anneau filtré.

La fonction d'ordre étant donnée, on définit

$$A_d = \{x \in A : \mu(x) \geq d\} \quad d \in \mathbb{R}_0 \ .$$

Réciproquement, la filtration étant donnée, on pose :

$$\mu(x) = \{\sup d : x \in A_d\} \ .$$

0.1.5. — Dans ces conditions, on pose

$$d(x,y) = e^{-\mu(x-y)} \quad \text{pour} \quad x,y \quad \text{dans} \quad A \ .$$

On vérifie que :

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq \sup d(x,y) d(y,z)$

d est donc un écart ultramétrique sur A, invariant par les translations et $A_d = \{x, d(0,x) \leq e^{-d}\}$. La topologie définie par d est compatible avec la structure d'anneau de A. C'est celle pour laquelle les A_d constituent un système fondamental de voisinages de 0 dans A. On obtiendrait d'ailleurs la même topologie en choisissant comme système fondamental de voisinages de 0 les A_d où d parcourt $\mathbb{N}$. A admet alors un séparé complété $\widehat{A}$ qui a lui-même une structure d'anneau topologique filtré et on sait que le morphisme canonique $i : A \to \widehat{A}$ est une injection si et seulement si A est séparé. Ceci a lieu si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\mu(x) = \infty \Rightarrow x = 0$
- $\bigcap\limits_{d \in \mathbb{R}_0} A_d = \{0\}$.

0.1.6. Définition. — *Soient A un anneau et G une A-algèbre. On dit que G est une A-algèbre graduée si l'on s'est donné une décomposition :*

$$G = \bigoplus_{d \in \mathbb{R}_0} G_d$$

où

1) G_d est un A-module pour $d \in \mathbb{R}_0$

2) $G_0 = A$

3) $G_{d_1} \cdot G_{d_2} \subset G_{d_1+d_2}$ pour d_1, d_2 dans $\mathbb{R}_0$.

On appelle G_d la composante homogène de degré d de G.

0.1.7. — Soient A un anneau et μ une fonction d'ordre. On pose

$$A_d(\text{resp. } A_d^+) = \{x \in A \quad \mu(x) \geq d(\text{resp.} >)\} \quad d \in \mathbb{R}_0$$
$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{d \in \mathbb{R}_0} A_d/A_d^+$$

est une A/A_0^+-algèbre graduée.

0.1.8. — Les constructions de 1.5 et 1.7 sont évidemment fonctorielles.

0.1.9. Un exemple fondamental. — Soient A un anneau, I un idéal de A ne contenant pas 1, et considérons la suite décroissante d'idéaux de A, $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par convention $I^\circ = A$. C'est la *filtration I-adique* de A. Pour être cohérent avec 0.1.2, nous poserons naturellement pour d réel non négatif quelconque

$$I^d = I^{n(d)}$$

où $n(d)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à d.

Dans ce cas particulier, nous noterons la fonction d'ordre ν_I. Ainsi :

$$\nu_I(x) = \sup\{n : n \in \mathbb{N}, x \in I^n\}$$

et elle est en fait à valeur entière. Quant au gradué associé, nous le noterons $\operatorname{gr}_I A$. Soit x un élément de A tel que $\nu_I(x) \in \mathbb{R}_0$. On note $\operatorname{in}_I(x)$ l'image canonique de x dans la composante homogène de degré $\nu_I(x)$ de $\operatorname{gr}_I A$. Si A est un anneau nœthérien et si I est contenu dans le radical de A, la topologie I-adique sur A est séparée [1]. De plus $\widehat{A}$ est un A-module fidèlement plat [1].

Par exemple si $A = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_s\}$ est l'anneau de séries convergentes à $r+s$ variables et si $I = (y_1, \ldots, y_s)$, $\widehat{A}$ s'identifie à $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ $[[y_1, \ldots, y_0]]$ anneau de séries formelles à s variables sur $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ et $\operatorname{gr}_I A$ s'identifie à $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ $[y_1, \ldots, y_s]$ anneau de polynômes à s variables sur $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

0.1.10. — De même si J est un idéal de A, on pose :

$$\nu_I(J) = \{\sup n : n \in \mathbb{N}, J \subset I^n\} \ .$$

On a évidemment

$$\nu_I(J) = \inf_{x \in J} \nu_I(x)$$

et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de générateurs de J

$$\nu_I(J) = \inf_{i=1\cdots n} \nu_I(x_i) \ .$$

0.2. Une autre fonction d'ordre $\bar{\nu}$. Quelques propriétés générales.

Revenons à l'exemple 0.1.9. A étant un anneau et I un idéal de A, $\mathrm{gr}_I A$ a en général des éléments nilpotents. Ceci vient du fait qu'on peut très bien avoir $\nu_I(x^k) > k\nu_I(x)$ avec k entier positif. Par exemple si $A = \mathbb{C}\{x,y\}/x^2 - y^3$ et si $I = (x,y)$, on a

$$\mathrm{gr}_I A = \mathbb{C}[X,Y]/X^2$$

et

$$\nu_I(x^2) = 3 > 2\nu_I(x) = 2 \ .$$

0.2.1. Lemme. — *Soient A un anneau, I un idéal de A ne contenant pas 1. Soit J un idéal de A. La suite*

$$u_k = \frac{\nu_I(J^k)}{k} \quad k \in \mathbb{N}$$

est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_0$.

Proof. — Soit $\bar{u}$(resp. $\underline{u}$) la limite supérieure (resp. inférieure) de la suite u_k. Il s'agit de montrer que $\underline{u} = \bar{u}$. Si $\underline{u} = \infty$ ou $\bar{u} = 0$, c'est clair. Nous supposerons donc $\underline{u}$ fini et $\bar{u} > 0$. Par définition,

$$\begin{array}{cllllll}
* & \forall\varepsilon > 0, & \forall i \in \mathbb{N}, & \exists j \geq i & : & u_j \leq \underline{u} + \varepsilon & \\
** & \forall\varepsilon > 0, & \forall i \in \mathbb{N}, & \exists j \geq i & : & u_j \geq \bar{u} - \varepsilon & (\text{si } \bar{u} < \infty) \\
*** & \forall N \in \mathbb{N}, & \forall i \in \mathbb{N}, & \exists j \geq i & : & u_j \leq N & (\text{si } \bar{u} = \infty)\ .
\end{array}$$

Fixons un $\varepsilon > 0$ (et si $\bar{u} = \infty$ un N) et choisissons un indice i assez grand pour que $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{\bar{u}-\varepsilon}$(resp. $\frac{\varepsilon}{N}$). D'après ** (resp. ***) il existe $j \geq i$ tel que $u_j > \bar{u} - \varepsilon$(resp. N) et d'après *, il existe $k \geq ji$ tel que $u_k < \underline{u} + \varepsilon$.

Divisons k par j, $k = j\ell + q$ où $q < j$. On a alors

$$\underline{u} + \varepsilon > \frac{\nu_I(J^{j\ell+q})}{j\ell+q} \geq \frac{\ell\nu_I(J^j)}{\ell j + q} = \frac{\nu_I(J^j)}{j}(1 - \frac{q}{k}) \geq (\bar{u} - \varepsilon)(1 - \frac{1}{i}) \geq \bar{u} - 2\varepsilon$$

$\big(\text{resp. } N(1 - \frac{1}{i}) \geq N - \varepsilon\big)$.

Nous avons ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, $\underline{u} + \varepsilon \geq \bar{u} - 2\varepsilon$ (resp. pour tout $\varepsilon > 0$ et tout N, $\underline{u} + \varepsilon \geq N - \varepsilon$) et donc $\underline{u} = \bar{u}$.

0.2.2. Remarque. — La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante en général. Néanmoins si on fixe i la sous-suite $(u_in)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ceci montre que :

$$\lim_{k\to\infty}(u_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}} u_k \ .$$

0.2.3. DÉFINITION. — *Soient A un anneau et I un idéal de A ne contenant pas 1. Soient x un élément de A et J un idéal de A. On pose*

$$\bar{\nu}_I(x) = \lim_{k\to\infty} \nu_I(x^k)/k$$

$$\bar{\nu}_I(J) = \lim_{k\to\infty} \nu_I(J^k)/k \ .$$

0.2.4. Un exemple. — Limite de rationnels, $\bar{\nu}_I(x)$ n'est pas en général un rationnel comme le montre l'exemple suivant :

Soit A l'algèbre du monoïde additif $\mathbb{R}_0$, c'est-à-dire l'anneau de polynôme à une variable X à cœfficients dans $\mathbb{Z}$ dont les exposants prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_0$. Soit I l'idéal engendré par X

$$\bar{\nu}_I(X^\lambda) = \lambda \quad \text{alors que} \quad \nu_I(X^\lambda) = [\lambda]$$

où [] désigne la partie entière.

0.2.5. PROPOSITION. — *Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est un système de générateurs de J*

$$\bar{\nu}_I(J) = \inf_{1\leq i\leq m} \bar{\nu}_I(x_i) \ .$$

Proof. — Tout d'abord, il est clair que $\bar{\nu}_I(J) \leq \inf \bar{\nu}_I(x_i)$. En effet $x_i^k \in J^k$, $k \in \mathbb{N}$, donc $\nu_I(J^k) \leq \nu_I(x_i^k)$.

Réciproquement J^k étant engendré par les $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ tels que $a_1+\cdots+a_m = k$,

$$\nu_I(J^k) = \inf_{\Sigma a_i = k} \nu_I(x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}) \ .$$

Fixons un $\varepsilon > 0$ et soit k'_0 le plus petit entier tel que pour tout $k > k'_0$ on ait, pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\bar{\nu}_I(x_i) - \varepsilon \leq \frac{\nu_I(x_i^k)}{k} \ .$$

Soit $k_0 = mk'_0$ et posons $N = \sup_{1\leq i\leq m, a\leq k'_0} [a\bar{\nu}_I(x_i) - \nu_I(x_i^a)]$. On a :

$$\nu_I(x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}) \geq \sum_{1\leq i\leq m} \nu_I(x_i^{a_i}) = \sum_{a_i > k'_0} \nu_I(x_i^{a_i}) + \sum_{a_i \leq k'_0} \nu_I(x_i^{a_i}) \ .$$

(Si $a_1+\cdots+a_m = k > k_0$, la 1ère sommation n'est certainement pas vide). Donc :

$$\nu_I(x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}) \geq \sum_{a_i > k'_0} \big(a_i\bar{\nu}_I(x_i) - a_i\varepsilon\big) + \sum_{a_i \leq k'_0} \big(a_i\bar{\nu}_I(x_i) - N\big) \ .$$

Or puisque $a_1 + \cdots + a_m = k$, $\sum\limits_{a_i > k'_0} a_i \leq k$. Ainsi

$$\nu_I(x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}) \geq \sum_{1 \leq i \leq m} a_i \bar{\nu}_I(x_i) - \varepsilon k - mN \geq k \inf_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_I(x_i) - \varepsilon k - mN \ .$$

Finalement $\nu_I(J^k) \geq k\big[\inf\limits_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_I(x_i) - \varepsilon - \frac{mN}{k}\big]$. Faisant tendre k vers l'infini, N ne dépendant que de ε, il vient

$$\bar{\nu}_I(J) \geq \inf_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_I(x_i) - \varepsilon$$

et ceci étant vrai pour tout ε, $\bar{\nu}_I(J) \geq \inf\limits_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_I(x_i)$.

0.2.6. Corollaire. — *$\bar{\nu}_I$ est une fonction d'ordre.*

Proof. — Soient x, y dans A et soit J l'idéal engendré par x et y. Alors $\bar{\nu}_I(J) = \inf\big(\bar{\nu}_I(x), \bar{\nu}_I(y)\big)$. Mais $x + y \in J$. Donc $\bar{\nu}_I(x+y) \geq \bar{\nu}_I(J)$. C'est i). D'autre part $\nu_I(x^k \cdot y^k) \geq \nu_I(x^k) + \nu_I(y^k)$. Ceci donne ii). Finalement puisque $\nu_I(0) = \infty$, a fortiori $\bar{\nu}_I(0) = \infty$. De plus, puisque $1 \notin I$, $\nu_I(1) = 0$. Mais $1^k = 1$. Donc $\bar{\nu}_I(1) = 0$.

0.2.7. Remarque. — Si x est un élément nilpotent de A, $\bar{\nu}_I(x) = \infty$. On a en fait le résultat plus précis suivant :

0.2.8. Proposition. — *Soient A un anneau, N son nilradical. Soient I un idéal de A ne contenant pas 1, J un idéal de A. Soient $A_1 = A/N$, I_1, J_1 les images respectives de I, J. Si J est de type fini,*

$$\bar{\nu}_I(J) = \bar{\nu}_{I_1}(J_1) \ .$$

Proof. — Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ un système de générateurs de J. D'après 2.5, $\bar{\nu}_I(J) = \inf\limits_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_I(x_i)$ et $\bar{\nu}_{I_1}(J_1) = \inf\limits_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_{I_1}$ (cl $x_i \bmod N$). Il suffit donc de montrer que si y est un élément de A, y_1 son image dans A_1, $\bar{\nu}_I(y) = \bar{\nu}_{I_1}(y_1)$. Il est clair que $\bar{\nu}_I(y) \leq \bar{\nu}_{I_1}(y_1)$. D'autre part si $\nu_{I_1}(y_1^k) = \nu(k)$, alors $y^k \in I^{\nu(k)} + N$ ou encore $y^k = z_k + u_k$ où $\nu_I(z_k) \geq \nu(k)$ et $u_k \in N$.

Soit i le plus petit entier tel que $u_k^{i+1} = 0$.

Soit n entier quelconque

$$y^{kn} = z_k^n + \binom{n}{1} z_k^{n-1} u_k + \cdots \binom{n-i}{i} z_k^{n-i} u_k^i \nu_I(y^{kn}) \geq (n-i)\nu(k) \ .$$

Faisons tendre n vers l'infini en laissant k fixe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_I(y^{kn})}{n} = \bar{\nu}_I(y^k) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n-i}{n} \cdot \nu(k) = \nu(k).$$

Or

$$\bar{\nu}_I(y^k) = k\bar{\nu}_I(y) \quad \text{et} \quad \bar{\nu}_I(y) \geq \frac{\nu(k)}{k}.$$

Faisant maintenant tendre k vers l'infini, on obtient $\bar{\nu}_I(y) \geq \bar{\nu}_{I_1}(y_1)$.

0.2.9. Proposition. — *On a :*

$$\bar{\nu}_I(J^k) = k\bar{\nu}_I(J) \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\bar{\nu}_{I^k}(J) = \frac{1}{k}\bar{\nu}_I(J) \quad k \in \mathbb{N}.$$

Proof. — La première assertion est une conséquence immédiate de 0.2.3. D'autre part $k \cdot \nu_{I^k}(J^n) \leq \nu_I(J^n)$ et donc $\bar{\nu}_{I^k}(J) \leq \frac{1}{k}\bar{\nu}_I(J)$. Soit $\nu(n) = \nu_I(J^n)$. Divisant $\nu(n)$ par k, on obtient $\nu(n) = qk + r$ où $0 \leq r < k$ et $\nu_{I^k}(J^n) \geq q = \frac{\nu(n)-r}{k} \geq \frac{\nu(n)-k+1}{k}$. Faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\bar{\nu}_{I^k}(J) \geq \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} = \frac{1}{k} \cdot \bar{\nu}_I(J) \ .$$

0.2.10. Proposition. — *Soit A un anneau nœthérien réduit et soit $\overline{A}$ le normalisé de A. Soit I un idéal de A ne contenant pas 1, J un idéal. On pose $J' = J\overline{A}$, $I' = I\overline{A}$.*

Si $\overline{A}$ est un A-module de type fini (par exemple si A est un anneau local excellent), $\bar{\nu}_I(J) = \bar{\nu}_{I'}(J')$.

Proof. — Comme ci-dessus, $\bar{\nu}_I(J) \leq \bar{\nu}_{I'}(J')$ est immédiat. D'après Artin-Rees, A étant nœthérien et $\overline{A}$ fini sur A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$

$$I'^n \cap A = I^{n-n_0} \cdot (I'^{n_0} \cap A).$$

Soit $\nu(n) = \nu_{I'}(J'^n)$

$$J^n \subset J'^n \cap A \subset I'^{\nu(n)} \cap A \subset I^{\nu(n)-n_0}$$
$$\frac{\nu_I(J^n)}{n} \geq \frac{\nu(n)-n_0}{n} \quad \text{et} \quad \bar{\nu}_I(J) \geq \bar{\nu}'_I(J') \ .$$

0.2.11. Notations. — Soient A un anneau, I un idéal ne contenant pas 1. $\bar{\nu}_I$ la fonction d'ordre correspondante. On note $\overline{\mathrm{gr}}_I A$ l'anneau gradué obtenu par la construction de 0.1.7.

Soit x un élément de A tel que $\bar{\nu}_I(x) \in \mathbb{R}_0$. On note $\overline{\mathrm{in}}_I x$ (ou $\overline{\mathrm{in}} x$ lorsqu'aucune confusion n'est possible) l'image canonique de x dans la composante homogène de degré $\bar{\nu}_I(x)$ de $\overline{\mathrm{gr}}_I A$. C'est un élément non nul.

Soit J un idéal de A non inclus dans $A_\infty = \{x \in A \ \bar{\nu}_I(x) = \infty\}$. On note $\overline{\mathrm{in}}_I(J, A)$ l'idéal de $\overline{\mathrm{gr}}_I A$ engendré par les $\overline{\mathrm{in}}_I x$ pour x parcourant I tels que $\bar{\nu}_I(x) \in \mathbb{R}_0$.

0.2.12. Remarques. — $\overline{\mathrm{gr}}_I A$ est un anneau réduit. Il existe un homomorphisme canonique (d'algèbres graduées)

$$\tau : \mathrm{gr}_I A \longrightarrow \overline{\mathrm{gr}}_I A$$

dont le noyau est le nilradical de $\mathrm{gr}_I A$. C'est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{gr}_I A$ est un anneau réduit.

Il suffit de remarquer que tout élément homogène non nul de $\overline{\mathrm{gr}}_I A$ est de la forme $\overline{\mathrm{in}}_I X$ et que $(\overline{\mathrm{in}}_I x)^k = \overline{\mathrm{in}}_I \cdot x^k \neq 0$ car $\bar{\nu}_I(x^k) = k\bar{\nu}_I(x)$. De même tout élément homogène non nul de $\mathrm{gr}_I A$ est de la forme $\mathrm{in}_I x$ et $\tau(\mathrm{in}_I x) = \overline{\mathrm{in}}_I x$ ou 0 selon que $\bar{\nu}_I(x) = \nu_I(x)$ ou $\bar{\nu}_I(x) > \nu_I(x)$. Cette dernière condition signifie qu'il existe k tel que $\nu_I(x^k) > k\bar{\nu}_I(x)$ ou encore $(\mathrm{in}_I x)^k = 0$. Si maintenant $\mathrm{gr}_I A$ est réduit, on a toujours $\bar{\nu}_I(x) = \nu_I(x)$.

0.2.13. — Soient A un anneau, I, J des idéaux tels que $1 \notin I + J$. La suite

Z

$$0 \longrightarrow \sqrt{\overline{\mathrm{in}}_I(J, A)} \longrightarrow \overline{\mathrm{gr}}_I A \xrightarrow{\alpha} \overline{\mathrm{gr}}_{I/J} A/J$$

est exacte. (On prendra garde à ne pas ajouter un 0 à droite).

Proof. — Soit $H = \overline{\mathrm{in}}_I x$ un élément homogène non nul de degré $\bar{\nu}$ de $\overline{\mathrm{gr}}_I A$. $H \in \ker \alpha$ si et seulement si $\bar{\nu}_{I/J}(x \bmod J) > \bar{\nu}$. Ceci se produit encore si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\nu_{I/J}(x^k \bmod J) > k\bar{\nu}$$

ou encore $x^k = y + z$ où $\nu_I(y) > k\bar{\nu}$ et $z \in J$. Or,

$$\bar{\nu}_I(x^k) = k\bar{\nu}, \bar{\nu}_I(y) > k\bar{\nu}; \bar{\nu}_I(z) = k\bar{\nu}$$

et

$$\overline{\mathrm{in}}_I x^k = (\overline{\mathrm{in}}_I x)^k = \overline{\mathrm{in}}_I z \in \overline{\mathrm{in}}_I(J, A) \ .$$

Références

[1] Bourbaki n. — *Algèbre commutative, chapitres 3 et 4*, Hermann.

1. La notion de clôture intégrale d'un idéal

Dans tout ce paragraphe, A est un anneau commutatif et unitaire et I un idéal propre.

1.1. Définition. — *On dit qu'un élément $f \in A$ est entier sur I (ou satisfait une relation de dépendance intégrale) s'il existe une relation : $f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ où $a_i \in A$ et $\nu_I(a_i) \geq i$ $i = 1 \cdots k$, i.e. $a_i \in I^i$.*

1.2. Notation. — Soit $A[T]$ l'anneau de polynôme à une indéterminée T sur A. On note $\mathcal{P}(I)$ le sous-anneau $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n T^n$ de $A[T]$.

Le lemme suivant relie la notion de dépendance intégrale sur un idéal, avec la notion classique de dépendance intégrale sur un anneau.

1.3. Lemme. — *L'élément f est entier sur I si et seulement si fT est entier sur l'anneau $\mathcal{P}(I)$ au sens usuel ([4] chap. V).*

Proof. — Soit $f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0$, $a_i \in I^i$, une relation de dépendance intégrale de f sur I. Alors :

$$(fT)^k + (a_1 T)(fT)^{k-1} + \cdots + (a_k T^k) = 0$$

est une relation de dépendance intégrale de fT sur $\mathcal{P}(I)$.

Réciproquement, soit

$$(fT)^k + b_1 (fT)^{k-1} + \cdots + b_k = 0, \quad b_i \in \mathcal{P}(I)$$

une relation de dépendance intégrale de fT sur $\mathcal{P}(I)$.

On en déduit, en annulant les termes de degré k dans $A[T]$, la relation de dépendance intégrale de f sur I cherchée.

1.4. Corollaire-Définition. — *L'ensemble des éléments de f de A entiers sur I est un idéal qu'on appelle la clôture intégrale de I dans A et qu'on note $\overline{I}$. On dit que I est intégralement clos si $I = \overline{I}$.*

Proof. — Il suffit de voir que si f et g sont entiers sur I, $f + g$ l'est aussi. Or la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $A[T]$ est un sous-anneau de $A[T]$.

1.5. Lemme. — *Si I et J sont des idéaux de A, tels que $I \subset J$, alors $\overline{I} \subset \overline{J}$. C'est évident d'après 1.1*

1.6. Lemme. — *$I \subset \overline{I} \subset \sqrt{I}$. En particulier si I est un idéal égal à sa racine, I est intégralement clos. (On se gardera de croire que les puissances de I sont alors également des idéaux intégralement clos.)*

Proof. — 1.1. montre que si f est entier sur I, $f^k \in I$.

1.7. Lemme. — *La fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $A[T]$ est $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^n T^n$.*

Proof. — Tout d'abord [1] p. 30, la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $A[T]$ est un sous-anneau gradué de $A[T]$. Il suffit donc d'en déterminer les composantes homogènes. Comme en 1.3, si fT^n est entier sur $\mathcal{P}(I)$, la relation de dépendance intégrale :

$$(fT^n)^k + \Sigma b_i (fT^n)^{k-i} = 0, \quad b_i \in \mathcal{P}(I)$$

fournit, en annulant les termes de degré nk dans $A[T]$, la relation de dépendance intégrale de f sur I^n cherchée.

1.8. Corollaire.

i) $(\overline{I})^n \subset \overline{I}^n$

ii) $I \cdot \overline{I}^n \subset \overline{I^{n+1}}$

iii) $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$.

Proof.

i) La fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $A[T]$ est une sous-algèbre de $A[T]$ contenant $\overline{I}T$. Elle contient donc $\oplus(\overline{I})^n T^n$.

ii) La fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $A[T]$ est une sous-algèbre de $A[T]$ contenant $I \cdot T$ et $\overline{I}^n T^n$. Elle contient donc $I \cdot \overline{I}^n T^{n+1}$.

iii) Soit maintenant f entier sur $\overline{I}$. Alors d'après 1.3. fT est entier sur $p(\overline{I})$ qui est une sous-algèbre de $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^n T^n$ et est de ce fait entière sur $\mathcal{P}(I)$.

1.9. Proposition. — *f est entier sur I, si et seulement s'il existe un A-module de type fini M tel que :*

i) $fM \subset I \cdot M$

ii) Si $aM = 0$, il existe $k \geq 0$ tel que $af^k = 0$.

Proof. — Supposons f entier sur I et considérons une relation de dépendance intégrale (1.1.1) satisfaite par f. Soit I_0 un idéal de type fini de A inclus dans I tel que $\nu_{I_0}(a_i) \geq i$, $i = 1, \dots, k$. Alors $f^k \in I_0 \cdot (I_0 + fA)^{k-1}$ et donc $(I_0 + fA)^k \subset I_0 \cdot (I_0 + fA)^{k-1}$. Ainsi, nous pouvons choisir $M = (I_0 + fA)^{k-1}$. M possède la propriété i). D'autre part, si $a(I_0 + fA)^{k-1} = 0$, $af^k \in aI_0 \cdot (I_0 + fA)^{k-1} = 0$.

Réciproquement, soient $m_1, \dots, m_s$ des générateurs de M. i) nous fournit un système linéaire :

$$fm_i = \sum_{j=1,\dots,s} b_{ij} m_j, \quad i = 1, \dots, s \quad \text{où} \quad b_{ij} \in I, \quad i, j = 1, \dots, s$$

et pour tout $i = 1, \dots, s$, on a :

$$\begin{vmatrix} b_{11} - f & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & \cdots & b_{ss} - f \end{vmatrix} m_i = 0 \ .$$

Le déterminant annule donc M. ii) nous permet d'obtenir la relation de dépendance intégrale cherchée.

1.10. Remarque. — Si I est de type fini et contient un élément non diviseur de 0 la condition ii) de 1.8 peut être remplacée par :

ii') M est un A-module fidèle ($aM = 0 \Leftrightarrow a = 0$).

En effet d'une part ii') entraîne ii). D'autre part, si f est entier sur I, on peut choisir pour M $(I + fA)^{k-1}$ qui est un A-module fidèle, puisqu'il contient l'élément non diviseur de 0 de I.

1.11. Corollaire. — *Soient I et J des idéaux de A. Alors :*

$$\overline{I} \cdot \overline{J} \subset \overline{I \cdot J} \ .$$

Proof. — Il suffit de montrer que si $f \in \overline{I}$ et $g \in \overline{J}$ alors $fg \in \overline{I \cdot J}$. Comme dans le début de la démonstration de 1.8, choisissons pour modules vérifiant les conditions i) et ii) de 1.8 relativement à f et g des idéaux M et N de type fini de A. Et, soit $R = MN$. R est un idéal de type fini de A. De plus :

i) $fgR = fgMN = fM \cdot gN \subset IJMN = IJR$

ii) Si $aR = 0$, désignant par $m_1, \dots, m_s$ un système de générateurs de M on obtient que $am_iN = 0$, $i = 1, \dots, s$. Il existe donc k_i, $i = 1, \dots, s$, tels que

$am_ig^ki = 0$ et si $k = \sup k_i$, $ag^kM = 0$. Il existe alors ℓ, tel que $ag^kf^\ell = 0$ et $a(fg)^{\sup k,\ell} = 0$.

1.12. LEMME. — *Soient A un anneau normal (*) et f un élément non diviseur de zéro dans A ; alors fA est un idéal intégralement clos.*

Proof. — Soit g entier sur fA. Une relation 1.1.1 s'écrit :

$$g^k + b_1fg^{k-1} + \cdots + b_kf^k = 0 \ .$$

L'élément g/f de $\operatorname{Tot} A$ est donc entier sur A. Ainsi, il appartient en fait à A et g appartient à fA.

1.13. LEMME. — *Soit A un anneau nœthérien. Pour un idéal I de A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^n T^n$[resp. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} (\overline{I})^n T^n$] *est un* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} I^nT^n$*-module de type fini.*

ii) Il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $I{\cdot}\overline{I}^n = \overline{I^{n+1}}$ [resp. $I{\cdot}(\overline{I})^n = (\overline{I})^{n+1}$].

Proof. — i) $\Rightarrow$ ii). Soit $E_1, \ldots, E_s$ un système de générateurs de $\oplus\overline{I}^nT^n$. On peut supposer les E_i homogènes. Posons $n_i = \deg E_i$, $i = 1, \ldots, s$; et $N = \sup n_i$. Soit $n \geq N$ et soit $f \in \overline{I^{n+1}}$. Alors :

$$fT^{n+1} = \sum_{i=1}^{s} A_iE_i \quad A_i \in \oplus I^kT^k$$

et on peut supposer que A_i est homogène de degré $n+1-n_i$. Ceci entraîne que :

$$f \in \sum_{i=1}^{s} I^{n+1-n_i}\overline{I^{n_i}} \subset I\sum_{i=1}^{s} I^{n-n_i} \cdot \overline{I^n}$$

en utilisant (1.7).

ii) $\Rightarrow$ i). Ceci permet d'écrire que :

$$\oplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{I}^nT^n = \oplus_{n\leq N}\overline{I}^nT^n + \overline{I^N}\mathcal{P}(I)$$

A étant un anneau nœthérien, $\overline{I}^n$ est donc un A-module de type fini et a fortiori un $\mathcal{P}(I)$-module de type fini. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^nT^n$ est donc lui-même $\mathcal{P}(I)$-module de type fini.

(*) un anneau est dit normal s'il est réduit et intégralement clos dans son anneau total de fractions.

1.14. Proposition. — *Soient A un anneau excellent réduit (*) et I un idéal contenant un élément non diviseur de zéro dans A. Alors il existe un entier N tel que si $n \geq N$*

1) $I \cdot \overline{I}^n = \overline{I^{n+1}}$

2) $I \cdot (\overline{I})^n = (\overline{I})^{n+1}$.

Proof. — A étant un anneau nœthérien, les assertions 1) et 2) sont respectivement équivalentes à 1') $p(\overline{I})$ est un $\mathcal{P}(I)$-module de type fini et 2') $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^n T^n$ est un $\mathcal{P}(I)$-module de type fini (1.13). De plus, $\mathcal{P}(I)$ étant alors lui-même un anneau nœthérien, d'après 1.8 i), 2') entraîne 1'). On remarque aussi que $\mathcal{P}(I)$ a même anneau total de fractions que $A[T]$. En effet, si $H \in A[T]$ et si g est l'élément de I non diviseur de zéro dans A, $g^{\deg H} \cdot H \in \mathcal{P}(I)$. Par suite si $\frac{F(T)}{G(T)} \in \operatorname{Tot} A[T]$, $\frac{F(T)}{G(T)} = \frac{g^m F(T)}{g^m G(T)} \in \operatorname{Tot} \mathcal{P}(I)$ si $m \geq \sup \deg F, \deg G$. Utilisant maintenant que A est excellent, la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$, (qui est une A-algèbre de type fini) dans son anneau total de fractions est un $\mathcal{P}(I)$-module de type fini [2] 2e partie 7.8. Ce n'est donc rien d'autre que la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans l'anneau total de fractions de $A[T]$. D'après 1.7, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{I}^n T^n$ en est un sous $\mathcal{P}(I)$-module, il est donc lui-même de type fini.

1.15. Proposition. — *Soit f un élément entier sur I. Alors $\bar{\nu}_I(f) \geq 1$.*

Proof. — Soit $f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0$, $\nu_I(a_i) \geq i$ $i = 1, \ldots, k$ une relation de dépendance intégrale de f sur I. $\bar{\nu}_I$ étant une fonction d'ordre :

$$\bar{\nu}_I(f^k) = k\bar{\nu}_I(f) \geq \inf_{i=1\cdots k} \bar{\nu}_I(a_i) + \bar{\nu}_I(f^{k-i}) = \inf_{i=1\cdots s} \bar{\nu}_I(a_i) + (k-i)\bar{\nu}_I(f) \ .$$

Or $\bar{\nu}_I(a_i) \geq \nu_I(a_i) \geq i$. On en déduit que :

$$k\bar{\nu}_I(f) \geq \inf_{i=1\cdots k} i + (k-i)\bar{\nu}_I(f) \ .$$

Soit i_0 l'indice réalisant cet inf

$$k\bar{\nu}_I(f) \geq i_0 + (k-i_0)\bar{\nu}_I(f) \ .$$

Ceci montre que $\bar{\nu}_I(f) \geq 1$.

1.16. Corollaire. — *Si J est un idéal de type fini et si $J \subset \overline{I}$, $\bar{\nu}_I(J) \geq 1$.*

(*) Voir [2] pour la notion d'anneau excellent. Un anneau local complet est un anneau excellent, de même que les anneaux locaux de la géométrie analytique.

Proof. — En effet si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de générateurs de J, on sait que $\bar{\nu}_I(J) = \inf_{1 \leq i \leq n} \bar{\nu}_I(x_i)$.

1.17. Remarque. — Nous montrerons la réciproque de 1.15 si A est une algèbre analytique locale ou un anneau local complet ou le localisé d'une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini.

1.18. PROPOSITION. — *Soit A un anneau local nœthérien. Si I_1 et I_2 sont deux idéaux primaires pour l'idéal maximal de A ayant même clôture intégrale, ils ont même multiplicité.*

Proof. — Supposons d'abord $I_2 \subset \overline{I_1}$. Alors d'après 1.16, $\bar{\nu}_{I_1}(I_2) \geq 1$. Choisissons $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que si $n \geq N$

$$\nu_{I_1}(I_2^n) \geq n(1-\varepsilon) \ .$$

Soit m le plus petit entier supérieur ou égal à $n(1-\varepsilon)$

$$\nu_{I_1}(I_2^n) \geq m \quad \text{et} \quad I_2^n \subset I_1^m \ .$$

De la définition de la multiplicité d'un idéal primaire, on déduit immédiatement que, désignant par $e(I_2)$ $\big($resp. $e(I_1)\big)$ la multiplicité de I_2 (resp. I_1) et d la dimension de A

$$e(I_2^n) = n^d e(I_2) \geq m^d e(I_1) = e(I_1^m)$$

et que

$$\frac{e(I_2)}{e(I_1)} \geq \left(\frac{m}{n}\right)^d \ .$$

Or $n(1-\varepsilon) \leq m$. Par suite :

$$\frac{e(I_2)}{e(I_1)} \geq (1-\varepsilon)^d \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $e(I_2) \geq e(I_1)$. On obtient l'inégalité opposée en utilisant $I_1 \subset \overline{I}_2$.

1.19. Remarque. — Si A est une algèbre analytique locale équidimensionnelle, D. Rees [3] a montré que réciproquement si I_1 et I_2 sont des idéaux primaires pour l'idéal maximal ayant même multiplicité et tels que $I_1 \subset I_2$, alors I_1 et I_2 ont même clôture intégrale.

Références

[1] Bourbaki n. — *Algèbre commutative. Chapitres 5 et 6*, Hermann.

[2] Grothendieck a. — *Éléments de géométrie algébrique*, **IV**, Publications de l'IHES, PUF.

[3] Rees d. — *a-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals*, Proceedings Camb. Philos., **57, 1**, 8–17.

[4] Zariski o. et Samuel p. — *Commutative algebra*, Appendice 4.

2. Les avatars de la clôture intégrale d'un idéal en géométrie analytique complexe

Les anneaux qui vont nous intéresser maintenant sont les $\mathbb{C}$-algèbres analytiques locales *i.e.* celles obtenues comme quotient d'un anneau de séries convergentes $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$. Nous nous préparons à décrire la filtration associée à la fonction d'ordre $\bar{\nu}_I$. Nous emploierons systématiquement le langage géométrique.

2.1. Théorème. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, Y un sous-espace analytique fermé rare de X, x un point de Y. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant Y. Soit $\mathcal{J}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent. Soit I(resp. J) le germe de $\mathcal{I}$(resp. $\mathcal{J}$) en x. Soit $\overline{I}$ la clôture intégrale de I dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $J \subset \overline{I}$.

ii) $\bar{\nu}_I(J) \geq 1$.

iii) Soit $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe ($\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} | t| < 1\}$). Pour tout germe de morphisme $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$

$$h^*J \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0} \subset h^*I \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0} \ .$$

iv) Pour tout morphisme $\pi : X' \to X$ tel que 1) π soit propre et surjectif, 2) X' soit un espace analytique normal, 3) $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ soit un $\mathcal{O}_{X'}$-module inversible, il existe un ouvert U de X contenant x tel que :

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{X'|\pi^{-1}(U)} \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'|\pi^{-1}(U)} \ .$$

v) Il existe un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent $\mathcal{K}$ dont le support est rare dans X tel que si $\pi : \widetilde{X} \to X$ est l'éclatement de $\mathcal{K}$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que :

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}|\pi^{-1}(U)} \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}|\pi^{-1}(U)} \ .$$

vi) Soit V un voisinage de x sur lequel $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$ sont engendrés par leurs sections globales. Pour tout système de générateurs $g_1, \ldots, g_m$ de $\Gamma(V, \mathcal{I})$ et tout élément f de $\Gamma(V, \mathcal{J})$, on peut trouver un voisinage V' de x et une constante C tels que :

$$|f(y)| \leq C \sup_{i=1,\ldots,m} |g_i(y)|, \quad y \in V' \ .$$

Avant de donner la démonstration de ce théorème, nous allons énoncer et démontrer quelques lemmes que nous aurons à utiliser.

2.1.1. LEMME. — *Soit A un anneau local nœthérien, $I = (g_1, \dots, g_p)$ un idéal $\neq 0$ de A qui est principal. Alors I est engendré par l'un des g_i.*

Proof. — Soit g un générateur de I. Il existe $a_1, \dots, a_p$ et $b_1, \dots, b_p$ dans A tels que :

$$g_i = a_i g, i = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1,\dots,p} b_i g_i \ .$$

Alors :

$$g\bigl(1 - \sum_{i=1,\dots,p} a_i b_i\bigr) = 0 \ .$$

Il s'agit de voir que l'un des a_i au moins est une unité dans A. S'il n'en était pas ainsi $1 - \sum_{i=1,\dots,p} a_i b_i$ serait une unité et g serait nul.

2.1.2. LEMME. — *Soient A un anneau nœthérien de caractéristique 0, I un idéal contenant au moins un élément non diviseur de zéro. Alors I admet un système de générateurs formés d'éléments non diviseurs de zéro.*

Proof. — Soit h_1 l'élément de I non diviseur de zéro et soit $(h_1, \dots, h_n)$ un système de générateurs de I. Supposons que $h_1, \dots, h_k$ soient non diviseurs de zéro. Nous allons montrer que nous pouvons modifier h_{k+1}.

Considérons :

$$g_s = h_{k+1} + s h_k, \quad s \in \mathbb{N} \ .$$

On sait qu'un anneau nœthérien possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux et qu'un élément est diviseur de zéro si et seulement s'il appartient à l'un d'entre eux. A étant de caractéristique 0, si tous les g_s, $s \in \mathbb{N}$, étaient diviseurs de zéro, d'après le principe des tiroirs, on pourrait déterminer 2 entiers s_1 et s_2 et un idéal premier minimal P tels que g_{s_1} et g_{s_2} appartiennent à P. On en déduirait que $(s_1 - s_2)h_k$ et donc h_k lui-même est dans P, ce qui est impossible puisque h_k est non diviseur de zéro. Il existe donc $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g_{s_0} = h_{k+1} + s_0 h_k$ est non diviseur de zéro. On remplace h_{k+1} par g_{s_0} et l'on construit ainsi par récurrence le système de générateurs désiré.

2.1.3. LEMME. — *Soit X un espace analytique réduit, x un point de X. On suppose que X est normal au voisinage de x. Soit f un germe de fonction* *méromorphe, non holomorphe, au voisinage de x. Alors il existe un germe de morphisme $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$ où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité du plan complexe tel que $f \circ h$ soit un germe de fonction méromorphe, non holomorphe, à l'origine de $\mathbb{D}$.*

Proof. — Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X. $f \circ \pi$ est un germe de fonction méromorphe au voisinage de $\pi^{-1}(x)$ et il existe un point $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ tel que $f \circ \pi$ ne soit pas holomorphe au voisinage de $\tilde{x}$. En effet s'il n'en était pas ainsi $f \circ \pi$ serait bornée sur un voisinage de $\pi^{-1}(x)$ et π étant propre, f elle-même serait bornée au voisinage de x. X étant normal en x, f méromorphe et bornée serait holomorphe. Nous sommes donc ramenés à montrer 2.1.3 en supposant en plus que X est non singulier au voisinage de x. L'anneau local de X en x est alors factoriel et le germe de fonction méromorphe f considéré à un représentant $\frac{p}{q}$ où p et q sont holomorphes au voisinage de x sans facteurs irréductibles en commun, l'ensemble des zéros de q contenant une hypersurface H au voisinage de x non contenue entièrement dans l'ensemble des zéros de p. On peut alors trouver un germe de courbe irréductible (en général singulier en x) Γ tel que Γ soit contenu dans H et non dans les zéros de p. La normalisation de Γ nous fournit un germe de morphisme $\tilde{h} : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$ tel que, identifiant $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ à $\mathbb{C}\{t\}$ anneau des séries convergentes à une variable et désignant par v la valuation naturelle sur $\mathbb{C}\{t\}$,

$$v(p \circ \tilde{h}) = \alpha \quad \text{et} \quad v(q \circ \tilde{h}) = \infty\ .$$

Nous allons montrer que modifiant $\tilde{h}$ par des termes en t d'ordre assez grand on peut trouver $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$ tel que :

$$v(p \circ \tilde{h}) = \alpha \quad \text{et} \quad v(q \circ \tilde{h}) = \beta, \quad \beta > \alpha\ .$$

En effet soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées sur X au voisinage de x et posons $\tilde{h}_i(t) = x_i \circ \tilde{h}$

$$* \quad p\big(\tilde{h}_1(t) + t^N, \tilde{h}_2(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big) - p\big(\tilde{h}_1(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big) = t^N R(t) \text{ où } R \in \mathbb{C}\{t\}$$
$$** \quad q\big(\tilde{h}_1(t) + t^N, \tilde{h}_2(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big) - q\big(\tilde{h}_1(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big) = t^N S(t) \text{ où } S \in \mathbb{C}\{t\}.$$

Si donc $N > \alpha$, on déduit de $*$ que $v\Big(p\big(\tilde{h}_1(t) + t^N, \tilde{h}_2(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big)\Big) = \alpha$ et de $**$ que $v\Big(q\big(\tilde{h}_1(t) + t^N, \tilde{h}_2(t), \dots, \tilde{h}_n(t)\big)\Big) \geq N > \alpha$. on peut donc choisir $h_1(t) = \tilde{h}_1(t) + t^{\alpha+1}$, $h_i(t) = \tilde{h}_i(t)$ $i \geq 2$.

Démonstration du théorème 2.1. — Il suffit de montrer 2.1 si J est principal. Notons f son générateur.

i) $\Rightarrow$ ii) Voir proposition 1.15.

ii) $\Rightarrow$ iii) Soit $\varphi : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}\{t\}$ le morphisme associé à h et soit v la valuation naturelle sur $\mathbb{C}\{t\}$. Il s'agit de voir que $\varphi(f) \in I \cdot \mathbb{C}\{t\}$. Or, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $I \cdot \mathbb{C}\{t\} = t^m \cdot \mathbb{C}\{t\}$ et il suffit en fait que :

$$v\big(\varphi(f)\big) \geq m \ .$$

Mais $\bar{\nu}_{I\cdot\mathbb{C}\{t\}}\big(\varphi(f)\big) \geq \bar{\nu}_I(f) \geq 1$ d'après la définition de $\bar{\nu}$ et on a vu que :

$$\bar{\nu}_{I\cdot\mathbb{C}\{t\}}\big(\varphi(f)\big) = \bar{\nu}_{t^m\cdot\mathbb{C}\{t\}}\big(\varphi(f)\big) = \frac{1}{m}\bar{\nu}_{t\cdot\mathbb{C}\{t\}}\big(\varphi(f)\big) = \frac{1}{m}v\big(\varphi(f)\big) \ .$$

iii) $\Rightarrow$ iv) Nous utilisons ici le lemme 2.1.3. π étant propre, il s'agit en fait de montrer que pour tout $x' \in \pi^{-1}(x)$

$$f \cdot \mathcal{O}_{X',x'} \in I \cdot \mathcal{O}_{X',x'} \ .$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi en x'. Soit g un générateur de $I \cdot \mathcal{O}_{X',x'}$. D'après l'hypothèse 3) g est non diviseur de zéro et $\frac{f}{g}$ est un élément de $\operatorname{Tot}\mathcal{O}_{X',x'}$ qui n'est pas dans $\mathcal{O}_{X',x'}$.

Il existe alors un germe de morphisme $h' : (\mathbb{D}, 0) \to (X', x')$ tel que, v désignant la valuation naturelle sur $\mathbb{C}\{t\}$, si $\varphi' : \mathcal{O}_{X',x'} \to \mathbb{C}\{t\}$ est le morphisme associé à h', $v\big(\varphi'(f)\big) < v\big(\varphi'(g)\big) < \infty$.

Nous obtenons la contradiction cherchée avec le morphisme $h = \pi \circ h'$: $(\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$.

iv) $\Rightarrow$ v) Soit $\pi : \overline{X}' \to X$ l'éclatement normalisé de Y. Y étant rare dans X, π satisfait les conditions 1), 2) et 3) de iv). Or, étant donné un espace analytique $\mathcal{X}$ réduit, il existe un idéal cohérent sur cet espace dont l'éclatement est la normalisation de $\mathcal{X}$. De plus, le composé de 2 éclatements est un éclatement (non canoniquement).

v) $\Rightarrow$ i) $\mathcal{K}$ ayant un support rare, en tout point son germe contient un élément non diviseur de zéro. Utilisant le lemme 2.1.2 et la cohérence de $\mathcal{K}$ on peut supposer que U est assez petit pour que $\mathcal{K}|U$ soit engendré par un nombre fini de sections globales sur U, $g_1, \ldots, g_m$ non diviseur de zéro. On peut supposer également que U est assez petit pour que $\mathcal{I}|U$ soit engendré par ses sections globales. Alors $\pi^{-1}(U)$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts V_i tels que :

$$\widetilde{X}|V_i \simeq \operatorname{Specan}\mathcal{O}_{X|U}\big[\frac{g_1}{g_i}, \ldots, \frac{\hat{g}_i}{g_i}, \ldots, \frac{g_m}{g_i}\big] \ .$$

(On utilise ici la convention habituelle, l'élément sous le $\wedge$ est omis). Sur chaque ouvert V_i, f s'exprime donc polynomialement en fonction des g_k/g_i, $k \neq i$. K désignant le germe en x de $\mathcal{K}$, on détermine un entier $n_i \geq 1$ tel que :

$$f \cdot g_i^{n_i} \in I \cdot K^{n_i} \ .$$

Posons $n = \sum_{i=1,\dots,m} n_i$ et soit $fg_1^{\alpha_1}\cdots g_n^{\alpha_n}$. Si $\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geq n$, il existe certainement i_0 tel que $\alpha_{i_0} \geq n_{i_0}$. On peut alors écrire que :

$$fg_1^{\alpha_1}\cdots g_n^{\alpha_n} = fg_{i_0}^{n_{i_0}} \cdot g_{i_0}^{\alpha_{i_0}-n_{i_0}} \prod_{j\neq i_0} g_j^{\alpha_j} \in I\cdot K^{n_{i_0}}K^{n-n_{i_0}} = IK^n \ .$$

Ceci montre que :

$$f\cdot K^n \subset I\cdot K^n \ .$$

K contenant un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ non diviseur de zéro, K^n est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini fidèle. D'après 1.10, ceci suffit à assurer que $f\in\overline{I}$.

iv) $\leftrightarrow$ vi) Soit $g_1,\dots,g_m$ un système de générateurs de I formé d'éléments non diviseurs de zéro. (2.1.2) π étant propre, on peut recouvrir $\pi^{-1}(x)$ par un nombre fini d'ouverts V_α relativement compacts sur chacun desquels un des g_i engendre $\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{X'}$ (lemme 2.1.1). π étant surjectif, la condition vi) est satisfaite si et seulement si sur chaque V_α, $\frac{|f\circ\pi|}{\sup|g_i\circ\pi|}$ est borné. Or si g_1 est le générateur de $\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{X'}$ sur V_α, cette dernière fonction est bornée, si et seulement si $\frac{|f\circ\pi|}{|g_1\circ\pi|}$ l'est. Mais en tout point y de V_α, le germe de g_1 est non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_{X',y}\cdot\frac{f\circ\pi}{g_1\circ\pi}$ induit un élément de $\operatorname{Tot}\mathcal{O}_{X',y}$ et X' étant un espace normal, on sait que ceci équivaut encore à $\frac{f\circ\pi}{g_1\circ\pi}$ appartient à $\mathcal{O}_{X',y}$ pour tout y de V_α, *i.e.* $f\cdot\mathcal{O}_{X'|V_\alpha}\in\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{X'|V_\alpha}$.

2.2. Corollaire. — *Mêmes hypothèses qu'au théorème 2.1. Soit k un entier ≥ 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $J\subset\overline{I}^k$.

ii) $\bar\nu_I(J)\geq k$.

Proof. — C'est immédiat puisque $\bar\nu_{I^k}(J) = \frac{1}{k}\bar\nu_I(J)$.

2.3. Corollaire. — *Mêmes hypothèses qu'au théorème 2.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\bar\nu_I(f)=\infty$.

ii) $f=0$.

Proof. — Il suffit de montrer que i) $\Rightarrow$ ii). Or, dire que $\bar\nu_I(f)=\infty$ signifie que $\bar\nu_I(f)\geq k$ pour tout entier k. D'après 2.2, ceci entraîne que :

$$f\in\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{I}^k \ .$$

De plus, d'après 1.14, puisque une algèbre analytique locale est un anneau excellent il existe N tel que si $k \geq N$, $\overline{I}^k = I^{k-N} \cdot \overline{I}^N$. Ceci entraîne que :

$$f \in \cap_{k \geq N} I^{k-N} = 0 \ .$$

2.4. Corollaire. — *Mêmes hypothèses qu'au théorème 2.1. La topologie de $\mathcal{O}_{X,x}$ associée à la fonction d'ordre $\bar{\nu}_I$ est la topologie I-adique.*

Proof. — D'après 2.2, la topologie de $\mathcal{O}_{X,x}$ associée à la fonction d'ordre $\bar{\nu}_I$ est la topologie associée à la filtration de $\mathcal{O}_{X,x}$ par les idéaux $\overline{I}^k$. Cette filtration est I-bonne d'après 1.14. Elle définit donc la topologie I-adique [1] § 3.

2.5. Corollaire. — *Mêmes hypothèses qu'au théorème 2.1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq k$, il existe un voisinage U de x dans X tel que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_y}(f) \geq k$ pour tout $y \in U$.*

Proof. — D'après 2.2, f vérifie une relation de dépendance intégrale :

$$f^k + \Sigma a_i \cdot f^{k-i} = 0, \nu_{\mathcal{I}_x}(a_i) \geq ik \ .$$

Il existe un voisinage U de x dans X tel que $\nu_{\mathcal{I}_y}(a_i) \geq ik$, si $y \in U$. Ceci montre que $f_y \in \overline{\mathcal{I}_y^k}$ et donc, toujours d'après 2.2 que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_y}(f) \geq k$, si $y \in U$.

2.6. Théorème. — *Soit X un espace analytique complexe réduit, Y un sous-espace analytique fermé rare de X, $\mathcal{I}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant Y. Il existe un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent noté $\overline{\mathcal{I}}$ tel que pour tout point y de X :*

$$(\overline{\mathcal{I}})_y = \overline{\mathcal{I}_y} = \{f \in \mathcal{O}_{X,y}, \bar{\nu}_{\mathcal{I}_y}(f) \geq 1\} \ .$$

On l'appelle la clôture intégrale de $\mathcal{I}$.

Proof. — Soit $\overline{\mathcal{I}}$ l'idéal de $\mathcal{O}_X$ dont les sections sur un ouvert quelconque U de X sont données par :

$$\Gamma(U, \overline{\mathcal{I}}) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) : \bar{\nu}_{\mathcal{I}_y}(f) \geq 1, \quad \forall y \in U\} \ .$$

Il est immédiat que $\overline{\mathcal{I}}$ ainsi défini est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ et que, d'après 2.5, son germe en y est $\overline{\mathcal{I}_y}$. Montrons que c'est un idéal cohérent. Soit $\pi : \overline{X}' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$. On a le diagramme (dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \pi_*(\pi^*\mathcal{I}) & \longrightarrow & \pi_*(\mathcal{I}\mathcal{O}_{\overline{X}'}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X & & \longrightarrow & & \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{X}'}) \end{array}$$

Les flèches disposées aux 4 côtés du carré sont des injections. En effet, X est réduit et π surjectif et π_* est exact à gauche. L'équivalence de i), iv) et v) dans 2.1 montre que :

$$\overline{\mathcal{I}} = \pi_*(\mathcal{I}\mathcal{O}_{\overline{X}'}) \cap \mathcal{O}_X \ .$$

Mais d'après le théorème de Grauert, l'image directe d'un module cohérent en est un et l'intersection de 2 sous-modules cohérents d'un module cohérent est lui-même un module cohérent.

2.7. Corollaire. — *Les hypothèses sont celles du théorème 2.6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent noté $\overline{\mathcal{I}^k}$ tel que pour tout $y \in X$*

$$(\overline{\mathcal{I}^k})_y = \overline{\mathcal{I}^k_y} = \{f \in \mathcal{O}_{X,y}, \bar{\nu}_{\mathcal{I}_y}(f) \geq k\} \ .$$

Proof. — C'est la clôture intégrale de $\mathcal{I}^k$.

2.8. Proposition. — *Les hypothèses sont celles du théorème 2.6. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{\mathcal{I}^n}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de présentation finie. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{\mathcal{I}^n}$ est un $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \mathcal{I}^n$-module de type fini.*

Nous allons d'abord montrer le lemme suivant dont nous aurons besoin dans la démonstration et dans la suite :

2.8.1. Lemme. — *Soit K un polycylindre. Il existe un entier N (dépendant uniquement de K et de $\mathcal{I}$) tel que si $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) = \Gamma(K, \mathcal{I})^{n-N} \cdot \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^N}) \ .$$

Proof. — 2.5 entraîne immédiatement que pour tout polycylindre K,

$$\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) = \{f \in \Gamma(K, \mathcal{O}_X); \bar{\nu}_{\mathcal{O}_y}(f) \geq n, \forall y \in K\} \ .$$

Soit $\mathcal{K}$ le $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent dont le support est rare dans X et dont l'éclatement est $\mathcal{O}_X$-isomorphe à l'éclatement normalisé de y dans X. Soit x un point de K et soit $f_1, \ldots, f_s$ un système de générateurs de $\overline{\mathcal{I}^n_x}$. Puisque $\bar{\nu}^n_{\mathcal{I}_x}(f_i) \geq 1$, d'après 2.1 (voir la partie de la démonstration v) $\Rightarrow$ i), il existe $p_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f_i \mathcal{K}^{p_i}_x \subset \mathcal{I}^n_x \cdot \mathcal{K}^{p_i}_x \ .$$

Soit $p_x = \sup p_i$

$$\overline{\mathcal{I}^n_x} \cdot \mathcal{K}^{p_x}_x \subset \mathcal{I}^n_x \mathcal{K}^{p_x}_x \ .$$

$\overline{\mathcal{I}^n}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}^n$ étant cohérents, il existe U_x un voisinage de x tel que :

$$\overline{\mathcal{I}^n_y} \cdot \mathcal{K}_y^{p_x} \subset \mathcal{I}^n_y \mathcal{K}_y^{p_x} \quad \forall y \in U_x \ .$$

K étant compact est recouvert par un nombre fini d'ouverts. Désignons les $U_{x_1}, \ldots, U_{x_t}$ et soit $p = \sup\limits_{i=1,\ldots,t} p_{x_i}$ et $U = \bigcup\limits_{i=1,\ldots,t} U_{x_i}$. U est un voisinage de K.

$$\overline{\mathcal{I}^n_y} \mathcal{K}_y^p \subset \mathcal{I}^n_y \mathcal{K}_y^p, \quad \forall y \in U$$

autrement dit

$$\overline{\mathcal{I}^n} | U \mathcal{K} | U^p \subset \mathcal{I} | U^n \mathcal{K} | U^p$$

K étant un polycylindre, d'après [2] lemme 1.12 (c'est une conséquence immédiate du théorème B)

$$\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) \cdot \Gamma(K, \mathcal{K})^p \subset \Gamma(K, \mathcal{I})^n \Gamma(K, \mathcal{K})^p \ .$$

De plus, $\Gamma(K, \mathcal{K})^p$ est un module fidèle. En effet si $a \in \Gamma(K, \mathcal{K})$ est tel que $a\Gamma(K, \mathcal{K}) = 0$, ceci entraîne que pour tout x de K, $a_x \mathcal{K}_x = 0$. Le support de $\mathcal{K}$ étant rare, $\mathcal{K}_x$ contient certainement un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_{X,x}$. Ainsi $a_x = 0$ pour tout x de K et $a = 0$.

d'après 1.9, $\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n})$ est donc contenu dans la clôture intégrale de $\Gamma(K, \mathcal{I})^n$. Réciproquement, il est facile de voir que si $g \in \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ est entier sur $\Gamma(K, \mathcal{I})^n$, $g \in \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n})$ puisque la relation de dépendance intégrale dans $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$

$$g^k + \Sigma a_i g^{k-i}, \quad a_i \in \Gamma(K, \mathcal{I})^{ni}$$

induit pour tout x de K, une relation de dépendance intégrale de g_x sur $\mathcal{I}^n_x$ donc que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq n$. Nous avons donc montré finalement que $\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n})$ est la clôture intégrale de $\Gamma(K, \mathcal{I})^n$ dans $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$. Appliquant maintenant le lemme 1.7, nous obtenons que $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) T^n$ est la fermeture intégrale de $p\big(\Gamma(K, \mathcal{I})\big)$ dans $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)[T]$. $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ étant un anneau excellent, $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n})$ est donc un $p\big(\Gamma(K, \mathcal{I})\big)$-module de type fini et d'après 1.13, il existe un entier N tel que si $n \geq N$

$$\Gamma(K, \mathcal{I}) \cdot \overline{\Gamma(K, \mathcal{I})^n} = \overline{\Gamma(K, \mathcal{I})^{n+1}}$$

ou encore

$$\Gamma(K, \mathcal{I}) \cdot \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) = \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^{n+1}}) \ .$$

Démonstration de 2.8. — Puisque $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) \big($resp. $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(K, \mathcal{I}^n)\big)$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^n}) T^n$ $\big($resp. $p(\Gamma(K, \mathcal{I}))\big)$, le lemme précédent à montré que $\oplus\Gamma(K,\overline{\mathcal{I}^n})$ est un $\underset{n}{\oplus}\Gamma(K,\mathcal{I}^n)$-module de type fini. Ceci signifie qu'il existe un entier s et un morphisme surjectif, $\underset{n}{\oplus}\Gamma(K,\mathcal{I}^n)$ linéaire de :

$$(*) \qquad \big[\oplus\,\Gamma(K,\mathcal{I}^n)\big]^s \longrightarrow \oplus_n\Gamma(K,\overline{\mathcal{I}^n})\ .$$

Ceci permet de construire un morphisme de $\oplus\mathcal{I}^n|K$-modules

$$(\oplus_n\mathcal{I}^n|K)^s \longrightarrow \oplus_n\overline{\mathcal{I}^n}|K$$

dont il s'agit de voir qu'il est surjectif. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour tout $x\in K$

$$(\oplus_n\mathcal{I}^n_x)^s \longrightarrow \oplus_n\overline{\mathcal{I}^n_x}$$

le soit.

Or, tensorisons $(*)$ au-dessus de $\Gamma(K,\mathcal{O}_X)$ par $\mathcal{O}_{X,x}$.

$$\oplus\big(\Gamma(K,\mathcal{I}^n)\bigotimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_X)}\mathcal{O}_{X,x}\big)^s \longrightarrow \underset{n}{\oplus}\big(\Gamma(K,\overline{\mathcal{I}^n})\big)\bigotimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_X)}\mathcal{O}_{X,x}$$

est aussi surjectif. Mais $\mathcal{I}^n$ et $\overline{\mathcal{I}^n}$ étant des $\mathcal{O}_X$-idéaux cohérents et K étant un polycylindre le théorème A nous dit justement que $\Gamma(K,\mathcal{I}^n)\underset{\Gamma(K,\mathcal{O}_X)}{\otimes}\mathcal{O}_{X,x}=\mathcal{I}^n_x$ et que $\Gamma(K,\overline{\mathcal{I}^n})\underset{\Gamma(K,\mathcal{O}_X)}{\otimes}\mathcal{O}_{X,x}=\overline{\mathcal{I}^n_x}$.

$\underset{n}{\oplus}\overline{\mathcal{I}^n}$ est donc un $\oplus\mathcal{I}^n$-module de type fini. $\oplus\mathcal{I}^n$ étant une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini (en tant qu'algèbre), ceci entraîne à son tour que $\oplus\overline{ic^n}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini. $\overline{\mathcal{I}^n}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, $\oplus\overline{\mathcal{I}^n}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de présentation finie.

Références

[1] Bourbaki n. — *Algèbre commutative, chapitres 3 et 4*, Hermann.

[2] Frisch j. — *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, Inventiones **4** (1967), 118–138.

3. Clôture intégrale d'un idéal et éclatement normalisé

3.1. Remarque. — Soit A un anneau nœthérien réduit, $\overline{A}$ sa normalisation, I un idéal propre de A et soit $j = I \cdot \overline{A}$

$$\overline{J}^n = \{f \in \overline{A} \text{ vérifiant une relation } f^k + \sum_{i=1}^{k} a_i f^{k-i} = 0, \quad a_i \in A\}\ .$$

Proof. — Il suffit de remarquer que la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $\overline{A}[T]$ est aussi celle de $p(J)$ dans $\overline{A}[T]$. En effet $JT = I \cdot \overline{A}T$ est formé d'éléments de $\overline{A}[T]$ entiers sur $\mathcal{P}(I)$.

D'autre part, un calcul analogue à celui de 1.7 montre que la fermeture intégrale de $\mathcal{P}(I)$ dans $\overline{A}[T]$ est $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} J_n T^n$ où $J_n = \{f \in \overline{A}$ vérifiant une relation $f^k + \Sigma a_i f^{k-i} = 0$, $a_i \in A$, $\nu_I(a_i) \geq i\}$.

Mais on sait aussi (1.7) que la fermeture intégrale de $p(J)$ dans $\overline{A}[T]$ est $\oplus \overline{J^n} T^n$.

3.2. Proposition. — *Soit x un espace analytique complexe réduit, $\overline{X}$ la normalisation de X, $n : \overline{X} \to X$ le morphisme. Soit Y un sous-espace analytique fermé rare de X, W son image réciproque par n. Soit $\mathcal{I}$(resp. $\mathcal{J}$) l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$(resp. $\mathcal{O}_{\overline{X}}$) définissant Y (resp. W).*

L'éclatement normalisé de Y est X-isomorphe au morphisme composé

$$\mathrm{Projan}_{\overline{X}} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{J}^n} \xrightarrow{\pi} \overline{X} \xrightarrow{n} X$$

où π désigne le morphisme structural.

Proof. — Posons $z = \mathrm{Projan} \underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \overline{\mathcal{J}^n}$ et soit $p : X' \simeq \mathrm{Projan} \oplus \mathcal{I}^n \to X$ l'éclatement de Y dans X. Par fonctorialité de la formation du Projan, il existe $q : Z \to X'$ tel que $q \circ p = \pi \circ n$. On sait d'après 2.8 que $\oplus \overline{\mathcal{I}^n}$ est un $\oplus \mathcal{I}^n$-module de type fini. Après la remarque 3.1 le même raisonnement montre que $\oplus \overline{\mathcal{J}^n}$ est un $\oplus \mathcal{I}^n$-module de type fini. De [1] exposé 19, on déduit que le morphisme canonique $\mathrm{Specan} \oplus \overline{\mathcal{J}^n} \to \mathrm{Specan} \oplus \mathcal{I}^n$ est un morphisme fini et a fortiori q. Soit $N(X)$ l'ouvert des points normaux de X et soit $f = \complement N(X) \cup |Y|$. C'est un fermé analytique rare de X dont l'image réciproque F' dans X' est également un fermé rare et q induit un isomorphisme analytique de $Z-(\pi\circ n)^{-1}(F)$ sur $X'-p^{-1}(F)$.

Montrons maintenant que Z est un espace normal. Pour cela, il suffit que $C_Z = \text{Specan}\oplus\overline{\mathcal{J}^n}$ le soit, *i.e.* il suffit, que pour tout x de $\overline{X}$, le germe en x de $\oplus\overline{jc^n}$ soit intégralement fermé dans son anneau total de fractions. Or posant $J=\mathcal{J}_x$, $\overline{A}=\mathcal{O}_{\overline{X},x}$, nous avons déjà remarqué (1.14) que $\oplus\overline{J^n}T^n$ (qui est canoniquement isomorphe à $\oplus\overline{J^n}$) a même anneau total de fractions que $\overline{A}[T]$. $\overline{X}\times\mathbb{C}$ étant un espace normal et $\oplus\overline{J^n}T^n$ étant la fermeture intégrale de $p(J)$ dans $\overline{A}[T]$ est intégralement clos. D'après [1] exposé 21, cor. 3, $q: Z\to X'$ est le morphisme de normalisation de X'.

3.3. Proposition. — *Soit X un espace analytique complexe réduit, Y un sous-espace analytique fermé rare dont le support contient l'ensemble des points non normaux de X. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant Y. L'éclatement normalisé de Y est X-isomorphe au morphisme canonique*

$$\text{Projan} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{I}^n} \longrightarrow X\ .$$

Proof. — Soit $\mathcal{C}$ le conducteur de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_{\overline{X}}$. Y contenant tous les points non normaux de X, $\sqrt{\mathcal{I}}$ est contenu dans $\sqrt{\mathcal{C}}$. Localement sur X, il existe donc un entier k tel que $\mathcal{I}^k\subset\mathcal{C}$. Soit, comme en 3.2, $\mathcal{J}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ définissant l'image réciproque W de Y dans $\overline{X}$. Localement sur $\overline{X}$, d'après 2.9, il existe un entier N tel que si $n\geq N$, $\overline{\mathcal{J}^n}=\mathcal{J}^{n-N}\overline{\mathcal{J}^N}$. Si donc $n\geq N+k$ $\overline{\mathcal{J}^n}\subset\mathcal{C}\cdot\mathcal{J}^{n-N-k}\cdot\overline{\mathcal{J}^N}\subset\mathcal{O}_X\cap\overline{\mathcal{J}^n}=\overline{\mathcal{I}^n}$ d'après 3.1.

Or (3.2), $\text{Projan}\oplus\overline{\mathcal{J}^n}$ est isomorphe à l'éclatement normalisé de Y et on sait que pour tout entier d, $\text{Projan}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{J}^n}$ (resp. $\text{Projan}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{I}^n}$) est canoniquement isomorphe à $\text{Projan}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{J}^{nd}}$ (resp. $\text{Projan}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{I}^{nd}}$). De plus, le terme de degré 0 dans les sommes directes est inessentiel (cf. 0.2).

On prendra garde que $\text{Specan}\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{I}^n}$ peut ne pas être un espace normal comme le montre l'exemple suivant : soit X le cusp. Son anneau local est $\mathbb{C}\{t^2,t^3\}$. Soit I l'idéal maximal. On vérifie que $\overline{I^n}=\{\Sigma a_i t^i\in\mathbb{C}\{t\}, a_i=0, i<2n\}$ si $n\geq 1$. Soit $\varphi:\mathbb{C}\{t^2,t^3\}[U,V]\to\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{I^n}$ le morphisme gradué qui envoie U de degré 1 sur $t^2\in\overline{I}$ et V de degré 1 sur t^3. φ est surjectif. En effet, on remarque que $\overline{I^n}=I^n$. Il suffit donc que la composante homogène de degré 1 de φ soit surjective. Or t^2 est l'image de U, t^3 celle de V, t^{2n} est l'image de $t^{2(n-1)}U$, t^{2n+1} est l'image de $t^{2(n-1)}V$. D'autre part $\ker\varphi=(t^3U-t^2V)$ et $\oplus\overline{I^n}$ n'est donc pas normal puisque $t=\frac{V}{U}$ est un élément de son corps des fractions entier et ne lui appartenant pas.

3.4. Proposition. — *Les notations et hypothèses sont celles de 3.3. Pour que l'éclatement X' de Y soit un espace analytique normal, il faut et il suffit que localement sur X, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $\overline{\mathcal{I}^n} = \mathcal{I}^n$.*

Proof. — Supposons X' normal. D'après 2.9, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X et un entier N tel que :

3.4.1. — $\overline{\mathcal{I}^{n+N}}|U = \mathcal{I}^n|U \cdot \overline{\mathcal{I}^N}|U, \quad n \in \mathbb{N}.$

D'autre part, l'éclatement de $\mathcal{I}^N$ étant canoniquement isomorphe à celui de $\mathcal{I}$ est également un espace analytique normal et d'après 2.1 iv) et v) quitte à restreindre U, on détermine un entier k tel que :

3.4.2. — $\overline{\mathcal{I}^N}|U \cdot \mathcal{I}^{Nk}|U = \mathcal{I}^{N(k+1)}|U.$

En effet, on peut choisir pour $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^N$, et pour $\mathcal{J}$, $\overline{\mathcal{I}^N}$; dans la démonstration de $v \to i)$ on avait montré que localement il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{\mathcal{J}}\mathcal{K}^k \subset \mathcal{I}\mathcal{K}^k$. Remplaçons n par Nk dans 3.4.1 ; nous obtenons :

$$\overline{\mathcal{I}^{N(k+1)}}|U = \mathcal{I}^{Nk}|U \cdot \overline{\mathcal{I}^N}|U \ .$$

Comparant avec 3.4.2, il vient :

$$\overline{\mathcal{I}^{N(k+1)}}|U = \mathcal{I}^{N(k+1)}|U \ .$$

Soit $M = N(k+1)$, il suffit pour conclure de remarquer que si $s \geq M$

$$\overline{\mathcal{I}^s}|U = \mathcal{I}^{s-M}|U \cdot \overline{\mathcal{I}^M}|U \ .$$

Réciproquement, on sait que pour tout entier d, l'éclatement de $\mathcal{I}$ est isomorphe à Projan $\bigoplus\limits_n \mathcal{I}^{nd}$ et d'après 3.3 que l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$ est isomorphe à Projan $\oplus \overline{\mathcal{I}^n}$ donc aussi à Projan $\oplus \overline{\mathcal{I}^{nd}}$.

3.5. Remarque. — Les notations et hypothèses sont celles de 3.4. Si l'éclatement de $\mathcal{I}$ est un espace analytique normal, pour tout x de X, il existe un entier N_x tel que pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\nu_{\mathcal{I}_x}(f) \geq N_x$, $\nu_{\mathcal{I}_x}(f)$ est la partie entière de $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f)$. En particulier, la suite $k \mapsto \nu_{\mathcal{I}_x}(f^k)/k$ est stationnaire à partir d'un certain cran (dépendant de x pour tout f).

3.6. Avis. — Nous recherchons un contre-exemple à la proposition 3.4 avec $N = 1$. (X non réduit s'abstenir).

Référence

[1] Cartan H. — *Famille d'espaces complexes et fondement de la géométrie analytique*, **13**,1960–1961.

4. $\bar{\nu}$ et éclatement normalisé

4.0. — Dans ce paragraphe nous allons montrer comment l'on peut calculer $\bar{\nu}$ après éclatement normalisé, et en déduire d'importants résultats de finitude, notamment la rationalité de $\bar{\nu}$, et le fait que les algèbres graduées associées à la "filtration par le $\bar{\nu}$" sont de présentation finie.

4.1. Calcul de $\bar{\nu}$ dans l'éclatement normalisé.

4.1.1. — Soient X un espace analytique complexe réduit et $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent tel que $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ soit rare dans X.

Soient $\pi_0 : X'_0 \to X$ l'éclatement de X défini par $\mathcal{I}$, et $\pi : X' \to X$ l'éclatement normalisé de X défini par $\mathcal{I}$, défini comme morphisme composé π : $X' \xrightarrow{n} X'_0 \xrightarrow{\pi_0} X$ où n désigne la normalisation de X'_0. On remarquera que, puisque X est réduit et $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ rare dans X, X'_0 est réduit et donc la normalisation a un sens.

4.1.2. — Ainsi, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ est un idéal inversible dans l'espace normal X', et pour tout ouvert $U \subset X$ on peut définir un ensemble de fonctions d'ordre sur l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ comme suit :

Considérons les composantes irréductibles $(D_\alpha)_{\alpha \in A(U)}$ de $D|U\big(= D \cap \pi^{-1}(U)\big)$, où D est le diviseur exceptionnel de π, *i.e.* le diviseur de X' défini par $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$.

Puisque $X|U\big(= \pi^{-1}(U)\big)$ est normal, pour chaque $\alpha \in A(U)$, il existe un ouvert analytique dense V_α de D_α tel que, pour tout point $x' \in V_\alpha$, X' et D_{red} soient lisses en x'. On peut alors choisir un système de coordonnées locales $(u, t_1, \ldots, t_m)$ pour X' en x' tel que :

i) $\mathcal{O}_{X',x'} \simeq \mathbb{C}\{u, t_1, \ldots, t_m\}$

ii) $\mathcal{I} \cdot_{X',x'} = (u^{e_\alpha}) \cdot \mathbb{C}\{u, t_1, \ldots, t_m\}$, où $e_\alpha \in \mathbb{N}$.

4.1.3. — Considérons maintenant $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et le sous-espace Z_f de $X'|U$ défini par l'idéal $f \cdot \mathcal{O}_{X'|U} (= f \circ \pi|U)$. Puisque D est un diviseur de $X'|U$, et que $X'|U$ étant normal, d'après le "hauptidealsatz", si $f \cdot \mathcal{O}_{X'|U}$ ne s'annule pas identiquement au voisinage d'un point $x' \in X'|U$, toutes les composantes irréductibles de Z_f sont de codimension pure 1 en ce point, nous pouvons trouver un ouvert analytique $U_\alpha \subset V_\alpha$ tel que, en tout point $x' \in U_\alpha$ nous ayons :

$$ii)_f : f \cdot \mathcal{O}_{X',x'} = (u^{m_\alpha}) \cdot \mathbb{C}\{u, t_1, \ldots, t_m\}$$

où :

$m_\alpha \in \mathbb{N}$ si $|D_\alpha|$ coïncide ensemblistement avec une composante irréductible de Z_f.

$m_\alpha = 0$ si $\dim(D_\alpha \cap Z_f) < \dim D_\alpha$

et l'on pose : $m_\alpha = +\infty$ si f_α s'annule identiquement au voisinage d'un point de V_α, c'est-à-dire en fait si D_α est contenu dans une composante irréductible de $X'|U$ qui est contenue dans Z_f.

4.1.4. — Puisque D_α est irréductible, U_α est connexe, et puisque les entiers m_α et e_α que nous venons de définir sont clairement localement constants sur U_α, ils sont en fait indépendants du choix de $x' \in U_\alpha$.

4.1.5. Remarque. — Pour tout $\alpha \in A(U)$, l'application $v_\alpha : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par $v_\alpha(f) = m_\alpha$ satisfait :

01) $v_\alpha(f + g) \geq \min\big(v_\alpha(f), v_\alpha(g)\big)$

02) $v_\alpha(f \cdot g) = v_\alpha(f) + v_\alpha(g)$

v_α est donc une fonction d'ordre.

On définit comme d'habitude $v_\alpha(I)$ par un idéal I de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ par $v_\alpha(I) = \inf_{f \in I} v_\alpha(f)$, et l'on a alors :

$$e_\alpha = v_\alpha\big(\Gamma(U, \mathcal{I})\big) \ .$$

4.1.6. Théorème. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent tel que* $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ *soit rare dans X, et K un sous-ensemble compact de X.*

Il existe un voisinage ouvert U de K dans X tel que :

1) L'ensemble $A(U)$ des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé $\pi|U : X'|U \to X|U$ de $\mathcal{I}$ est fini.

2) Pour tout $f \in \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$, il existe un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de K dans X contenu dans U et un prolongement $\tilde{f}$ de f à $\widetilde{U}$ tel que :

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) = \min_{\alpha \in A(\widetilde{U})} \frac{v_\alpha(\tilde{f})}{v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})} .$$

(Notations de 4.1.5 : $v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U}) = v_\alpha\big(\Gamma(\widetilde{U}, \mathcal{I})\big)$ où l'on a posé par définition : $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) = \inf_{x \in K} \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f)$).

Avant la démonstration, donnons le

4.1.7. Corollaire. — *Il existe un entier $q = q(K, y)$, que nous appellerons "dénominateur universel" tel que pour tout ouvert V contenant K, et tout $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, on ait*

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) \in \frac{1}{q}\mathbb{N} \cup \{+\infty\} .$$

En particulier, $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f)$, s'il est fini, est un nombre rationnel. (On peut prendre pour q le p.p.c.m. des $v_\alpha(\mathcal{I}|U)$).

La démonstration du théorème 4.1.6 repose sur la proposition suivante.

4.1.8. Proposition. — *Soient X un espace analytique normal, dénombrable à l'infini, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal inversible et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Notons D le diviseur de Cartier défini par $\mathcal{I}$ et $D = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$ sa décomposition en composantes irréductibles. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f_x \in \mathcal{I}_x$ pour tout $x \in X$ est que pour tout $\alpha \in A$, il existe un point $x_\alpha \in D_\alpha$ tel que $f_{x_\alpha} \in \mathcal{I}_{x_\alpha}$.*

Proof. — La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Notons $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ la fonction méromorphe $\mathcal{I}^{-1} \cdot f$. Nous appellerons sous-espace-polaire de φ, le sous-espace analytique fermé P_φ de X associé à l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$, P_φ défini par

$$\Gamma(U, P_\varphi) = \{h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) : h \cdot (\varphi|U) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) .$$

Il est clair que $P_\varphi \subset D$ et que $f_x \in \mathcal{I}_x$ si et seulement si $x \notin P_\varphi$. Le germe en tout point $x \in X$ de P_φ est soit vide, soit de codimension 1. (Il contient une composante irréductible de codimension 1). En effet, écrivons la décomposition primaire de $P_{\varphi,x}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$

$$P_{\varphi,x} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k .$$

Supposons qu'aucun des $\sqrt{Q_i}$ ne soit de hauteur 1. Alors, pour tout idéal premier P de hauteur 1, il existe $h \in p_{\varphi,x}$ tel que $h \notin P$. Sinon $P_{\varphi,x} \subset P$ et puisque P

est de hauteur 1, il doit coïncider avec $\sqrt{Q_i}$ pour au moins un $i = 1 \cdots k$. Donc $h\varphi_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $\varphi_x \in (\mathcal{O}_{X,x})_P$. $\mathcal{O}_{X,x}$ étant normal, d'après le critère de Serre, ceci entraîne que $\varphi_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ que $1 \in P_{\varphi,x} = \emptyset$.

Puisque $P_\varphi \subset D$ et que tout $\alpha \in A$, $x_\alpha \notin P_\varphi$, $P_\varphi = \emptyset$ (sinon il coïnciderait avec une composante de D) et $f_x \in \mathcal{I}_x$ pour tout $x \in X$.

4.1.8.1. Démonstration du théorème (4.1.6). — Soit $\pi : X' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$ dans X, comme au 4.1.1. π est un morphisme propre, puisque composé de deux morphismes propres, et donc tout compact K de X possède un voisinage U tel que :

i) $D|U$ n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles (où D est le diviseur exceptionnel de π, défini par $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$, et $D|U$ signifie $D \cap \pi^{-1}(U)$).

ii) Pour tout voisinage ouvert $\widetilde{U} \subset U$ de K, $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ rencontre toutes les composantes irréductibles de $D|U$. Si l'on préfère, toutes les composantes irréductibles de $D|U$ rencontrent $\pi^{-1}(K)$.

En effet, $\pi^{-1}(K)$ est compact, et par la finitude locale du nombre des composantes irréductibles d'un espace analytique, possède un voisinage V tel que $D \cap V$ n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles, qui rencontrent toutes $\pi^{-1}(K)$. π étant propre, on peut choisir V de la forme $\pi^{-1}(U)$ avec $U \subset X$ voisinage de K.

Supposons maintenant $\inf_{x \in K} \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq \frac{p}{q}$, nombre rationnel. Nous savons grâce à (2.2 et 2.5) que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq \frac{p}{q}$ équivaut à l'existence d'un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que pour tout $x_1 \in U_x$ on ait :

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x_1} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X,x_1}} \ .$$

Ainsi, si nous posons $\widetilde{U} = (\bigcup_{x \in K} U_x) \cap U$, (qui est un voisinage de K dans U), nous avons, en tout point $x' \in \pi^{-1}(\widetilde{U})$

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X',x'} \in \mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X',x'}$$

et donc

$$q \cdot v_\alpha(f|\widetilde{U}) \geq p \cdot v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})$$

et donc

$$\min_{\alpha \in A(U)} \frac{v_\alpha(f|\widetilde{U})}{v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})} \geq \frac{p}{q} \ .$$

Ceci nous montre que

$$\inf_{\alpha \in A(\widetilde{U})} \frac{v_\alpha(f|\widetilde{U})}{v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})} \geq \inf_{x \in K} \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \ .$$

Or, supposons que cette inégalité soit stricte ; nous pouvons choisir un rationnel $\frac{p'}{q'}$ et un point $x_0 \in K$ tels que

$$\inf_{\alpha \in A(\widetilde{U})} \frac{v_\alpha(f|\widetilde{U})}{v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})} > \frac{p'}{q'} > \bar{\nu}_{\mathcal{I}_{x_0}}(f) \geq \inf_{x \in K} \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \ .$$

Mais d'après la proposition 4.1.8, $\inf_{\alpha \in A(\widetilde{U})} \frac{v_\alpha(f|\widetilde{U})}{v_\alpha(\mathcal{I}|\widetilde{U})} \geq \frac{p'}{q'}$ indique qu'en tout point $x \in K$, $f^{q'}\mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^{p'} \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$, et donc d'après (2.2) $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq \frac{p'}{q'}$, d'où la contradiction cherchée.

4.2. Définition des $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$.

4.2.1. Définition. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent tel que* $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ *soit rare. Pour tout ouvert $U \subset X$ on définit :*

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) = \inf_{x \in U} \left(\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}^x(f) \right) \ .$$

4.2.2. Définition hypothèses et notations de 4.2.1). — *Soit $\nu \in \mathbb{R}_+$. Considérons le faisceau :*

$$U \longmapsto \left\{ f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) / \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) \geq \nu \right\} \ .$$

Puisque clairement si $U' \subset U$, $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^{U'}(f|U') \geq \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f)$, ce faisceau est un idéal de $\mathcal{O}_X$, que nous noterons $\overline{\mathcal{I}^\nu}$, et dont le germe en $x \in X$ est $(\overline{\mathcal{I}^\nu})_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} / \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq \nu\}$ et plus généralement, pour tout compact K, l'anneau des sections sur K est

$$\Gamma(K, \overline{\mathcal{I}^\nu}) = \{f \in \Gamma(K, \mathcal{O}_X), \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) \geq \nu\} \ .$$

4.2.3. Proposition hypothèses et notations de 4.2.1). — *Pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$*

Proof. — 1ère étape. Vérifier le résultat quand X est normal et $\mathcal{I}$ inversible.

Soit $X = \bigcup_K V_k$ un recouvrement ouvert tel que pour tout k,

$$\mathcal{I}|V_k = \varphi_k \cdot \mathcal{O}_{X|V_k}, \varphi_k \in \Gamma(V_k, \mathcal{O}_X) \ .$$

Considérons, pour chaque k, le morphisme $\pi_k : \overline{V_k^q} \to V_k$ défini comme composé $\overline{V_k^q} \xrightarrow{n} V_k^q \xrightarrow{\omega_k} V_k$ où n est la normalisation, et ω_k le morphisme structural

$\operatorname{Specan}_{V_k} B_k \longrightarrow V_k$, où B_k désigne la $\mathcal{O}_{V_k}$-algèbre finie $\mathcal{O}_{V_k}[T]/(T^q - \varphi_k)$. Nous disposons de l'idéal inversible J_k sur $\overline{V_k^q}$ engendré par $(t \circ n)\mathcal{O}_{\overline{V_k^q}}$, où $t \in \Gamma(V_k^q, \mathcal{O}_{V_k^q})$ est l'image de T.

4.2.3.1. Lemme. — $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}|V_k = \pi_{k^*}(J_k^p) \cap \mathcal{O}_X|V_k$ *(intersection dans* $\pi_{k^*}\mathcal{O}_{\overline{V_k^q}}$*).*

Proof. — Soient U un ouvert de V_k, et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Supposons $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) \geq \frac{p}{q}$. Alors, puisque $\mathcal{I}$ est supposé inversible, et que X est normal, d'après 2.1 $f^q \cdot \mathcal{O}_{X|U} \in \mathcal{I}^p \mathcal{O}_{X|U}$ et a fortiori $f^q \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U} \in \mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{\overline{V^q_k}|U}$.

Mais par définition de J_k, $(\mathcal{I}^p|U)\mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U} = J_k^{pq} \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U}$. (La restriction à U dans $\overline{V_k^q}$ signifie bien sûr à $\pi_k^{-1}(U)$). Et puisque $\overline{V_k^q}$ est normal et J_k inversible, on peut déduire du fait que $f^q \in J_k^{pq}$ que $f \in J_k^p$; en effet $(J_k^{-p} \cdot f)^q \subset \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}}$ ce qui, puisque $\overline{V_k^q}$ est normal, implique $J_k^{-p} \cdot f \subset \mathcal{O}_{V_k^q}$, donc $f \in J_k^p$.

Ainsi, nous venons de vérifier que :

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) \geq \frac{p}{q} \Rightarrow f \in \Gamma(U, \pi_{k^*} J_k^p \cap \mathcal{O}_{V_k})$$

c'est-à-dire encore :

$$\overline{\mathcal{I}^{p/q}}|U \subseteq (\pi_{k^*} J_k^p \cap \mathcal{O}_{V_k})|U \ .$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \Gamma(U, \pi_{k^*} J_k^p \cap \mathcal{O}_{V_k})$ il vient, par définition de l'image directe :

$$f \circ \pi_k = f \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U} \in J_k^p \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U} \ ,$$

d'où

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U} \subset \varphi_k^p \cdot \mathcal{O}_{\overline{V_k^q}|U}$$

et donc, d'après 2.1 iv), puisque $\overline{V_k^q}$ est normal, que π_k est surjectif, pour tout $x \in U$, $f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$, donc $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f) \geq \frac{p}{q}$ et $f \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{I}^{p/q}})$. QED pour le lemme.

4.2.3.2. Corollaire. — *Si* $\mathcal{I}$ *est un idéal inversible d'un espace normal* X*, tel que* $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ *soit rare dans* X*,* $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-idéal cohérent, pour tout rationnel positif* $\frac{p}{q}$*.*

En effet, π_k est propre, et J_k^p un idéal cohérent pour tout p. Donc d'après le théorème de Grauert, son image directe $\pi_{k^*} J^p$ est cohérente, et son intersection dans le $\mathcal{O}_{V_k}$-module cohérent $\pi_{k^*}\mathcal{O}_{\overline{V_k^q}}$ avec $\mathcal{O}_{V_k}$ est encore un module cohérent, et donc un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{V_k}$.

4.2.4. Remarque. — $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$ n'est pas en général inversible, comme le montre l'exemple suivant : soit X le cône quadratique défini dans $\mathbb{C}^3$ par $\xi\eta = z^2$ et soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ξ. $\overline{\mathcal{I}^{1/2}}$ est engendré par ξ et z.

2e étape de la démonstration de 4.2.2 :

4.2.5. Lemme. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent définissant un sous-espace rare dans X. Soit $\pi : X' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$ (4.1.0). On a :*

$$\overline{\mathcal{I}^{p/q}} = \pi_* \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{p/q}} \cap \mathcal{O}_X \ .$$

Proof. — Soient U un ouvert de X, et $f \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{I}^{p/q}})$. Pour tout $x \in U$, $\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) \geq \frac{p}{q}$, *i.e.* $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f \cdot \mathcal{O}_{X,x}) \geq \frac{p}{q}$, ce qui d'après (2.1) entraîne que pour tout $x' \in \pi^{-1}(U)$, $f^q \cdot \mathcal{O}_{X',x'} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X',x'}}$, d'où : $\bar{\nu}^{x'}_{\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{X'}}(f \cdot \mathcal{O}_{X'}) \geq \frac{p}{q}$ pour tout $x' \in \pi^{-1}(U)$. Donc

$$f \cdot \mathcal{O}_{X'|U} \subset \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'|U})^{p/q}},$$

ce qui montre

$$\overline{\mathcal{I}^{p/q}} \subset \pi_* \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{p/q}} \cap \mathcal{O}_X .$$

Réciproquement si $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est tel que $f \cdot \mathcal{O}_{X'|U} \subset \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{p/q}}$, on a (2.1)

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X'|U} \subset \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'|U})^p} = (\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'|U})^p$$

puisque $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ est un idéal inversible d'un espace normal. Donc

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X'|U} \subset \mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X'|U}$$

ce qui, toujours d'après (2.1), signifie que pour tout $x \in U$

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x} \subset \overline{\mathcal{I}^p} \cdot \mathcal{O}_{X,x} \ ,$$

i.e. $\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) \geq \frac{p}{q}$, $\forall x \in U$ et donc $f \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{I}^{p/q}})$. QED pour le lemme.

4.2.6. Corollaire. — *Soient$X$ un espace analytique réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent définissant un sous-espace rare dans X. $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$ est un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, dont le germe $(\overline{\mathcal{I}^{p/q}})_x$ en un point $x \in X$ est* $\overline{\mathcal{I}^{p/q}_x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} / \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) \geq p/q\}$.

Proof. — D'après 4.2.4.2, $\overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{p/q}}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-idéal cohérent ; puisque $\pi : X' \to X$, éclatement normalisé de $\mathcal{I}$, est propre, $\pi_* \overline{(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{p/q}}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent du $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\pi_* \mathcal{O}_{X'}$, donc $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$, intersection de deux sous-$\mathcal{O}_X$-modules cohérents d'un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, est cohérent.

4.3. L'algèbre graduée $\overline{P}^{(1/q)}(\mathcal{I})$.

4.3.0. DÉFINITION. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent et $q \in \mathbb{N}$. On appelle algèbre des $\frac{1}{q}$-puissances de $\mathcal{I}$ la $\mathcal{O}_X$-algèbre*

$$\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overline{\mathcal{I}^{p/q}} \cdot T^{p/q} \subset \mathcal{O}_X[T^{1/q}]$$

où $\mathcal{O}_X[T^{1/q}]$ désigne la $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{O}_X[T,U]/(T-U^q)$.

4.3.1. PROPOSITION. — *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée de présentation finie.*

Proof. — D'après ([1] ch. I, 1.4) puisque $\overline{\mathcal{I}^{p/q}}$ est un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, il suffit de vérifier que $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini.

4.3.2. LEMME. — *$\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})$ est la fermeture intégrale dans $\mathcal{O}_X[T^{1/q}]$ de $P(\mathcal{I}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n T^n \subset \mathcal{O}_X[T] \subset \mathcal{O}_X[T^{1/q}]$.*

Proof. — Nous savons grâce à ([3] ch. VII § 2, ou Bourbaki, Alg. Comm., ch. 5-6, page 30) que la fermeture intégrale $\overline{P(\mathcal{I})}$ de $P(\mathcal{I})$ dans $\mathcal{O}_X[T^{1/q}]$ est une sous-$\mathcal{O}_X$-algèbre graduée de $\mathcal{O}_X[T^{1/q}]$. Nous pouvons donc nous restreindre au calcul des éléments homogènes.

Nous allons voir que le lemme 4.3.2 résulte de :

4.3.3. PROPOSITION. — *Soient $\mathcal{O}$ une algèbre analytique, I un idéal de $\mathcal{O}$, $f \in \mathcal{O}$ non inversible, et $d \in]0, +\infty]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\bar{\nu}_I(f) \geq d$

2) Il existe une relation de dépendance intégrale

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

avec $a_i \in \mathcal{O}$ tels que $\nu_I(a_i) \geq id$.

En fait, nous n'avons besoin ici que du cas particulier où $d = \frac{p}{q}$, que nous allons montrer directement, et qui d'ailleurs, après 4.1.7 suffit pour montrer le cas général. Une autre démonstration, n'utilisant pas 4.1.2, est donnée en appendice.

Supposons donc $\bar{\nu}_I(f) \geq \frac{p}{q}$, c'est-à-dire $\bar{\nu}_I(f^q) \geq p$ on a, grâce à (2.1) : $f^q \in \overline{I^p}$, c'est-à-dire que nous disposons d'une relation de dépendance intégrale :

$$f^{qk} + \sum_{i=1}^{k} a_i f^{q(k-i)} = 0 \quad \text{où} \quad a_i \in I^{pi}$$

mais cette relation peut aussi se lire comme relation de dépendance intégrale pour f

$$f^{qk} + \sum_{i=q}^{qk} a_j f^{qk-j} \quad \text{vérifiant} \quad \nu_I(a_j) \geq j\frac{p}{q} \ .$$

Réciproquement, supposons que f satisfasse

$$(E) \qquad f^\ell + a_1 f^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_I(a_j) \geq j \cdot \frac{p}{q} \ .$$

Pour tout morphisme $\mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}\{t\}$

$$\big(\varphi(E)\big) \qquad \varphi(f)^\ell + \varphi(a_1)\varphi(f)^{\ell-1} + \cdots + \varphi(a_\ell) = 0$$

et

$$v\big(\varphi(a_j)\big) \geq j\frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big)$$

où v désigne la valuation t-adique. Nous allons en déduire que

$$v\big(\varphi(f)\big) \geq \frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big) \ .$$

Pour cela remarquons d'abord que

$$v\big(\varphi(f)^{\ell-j} \cdot \varphi(a_j)\big) \geq (\ell - j) v\big(\varphi(f)\big) + j\frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big)$$

puisque $v\big(\varphi(a_j)\big) \geq j\frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big)$. Donc si nous avions

$$v\big(\varphi(f)\big) < \frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big) \ ,$$

nous en déduirions

$$v\big(\varphi(f)^{\ell-j} \cdot \varphi(a_j)\big) > \ell \cdot v\big(\varphi(f)\big) \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq \ell$$

et d'après la relation de dépendance intégrale $\varphi(E)$:

$$\ell \cdot v\big(\varphi(f)\big) \geq \min_{1 \leq j \leq \ell} v\big(\varphi(f)^{\ell-j} \cdot \varphi(a_j)\big) > \ell \cdot v\big(\varphi(f)\big)$$

et donc une contradiction.

Ceci montre que pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}\{t\}$, nous avons $v\big(\varphi(f)\big) \geq \frac{p}{q} v\big(\varphi(I)\big)$, *i.e.* $v\big(\varphi(f^q)\big) \geq v\big(\varphi(I^p)\big)$ et d'après (2.1), ceci implique $f^q \in \overline{I^p}$ dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire $\bar{\nu}_I(f) \geq \frac{p}{q}$.

4.3.5. — Démontrons maintenant 4.3.2.

Il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, le germe $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})_x$ en x de $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})$ est la fermeture intégrale dans $\mathcal{O}_{X,x}[T^{1/q}]$ de $P(\mathcal{I})_x \subset \mathcal{O}_{X,x}[T]$ et comme nous avons vu, il suffit de montrer qu'un élément homogène de $\mathcal{O}_{X,x}[T^{1/q}]$ est entier sur $P(\mathcal{I})_x$ si et seulement s'il appartient à $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})_x$.

Soit donc $f \cdot T^{p/q} \in \mathcal{O}_{X,x}[T^{1/q}]$, entier sur $P(\mathcal{I})_x$, c'est-à-dire satisfaisant une équation :

$$(f \cdot T^{p/q})^k + A_1(f \cdot T^{p/q})^{k-1} + \cdots + A_k = 0\ ; \quad A_i \in P(\mathcal{I})_x$$

dans $\mathcal{O}_{X,x}[T^{1/q}]$. Par homogénéité, nous pouvons supposer $A_i = B_i \cdot T^{a(i)}$ avec $B_i \in \mathcal{I}_x^{a(i)}$, et $a(i) = \frac{ip}{q}$, et égaler à zéro le cœfficient de $T^{\frac{kp}{q}}$ donne :

$$f^k + B_1 f^{k-1} + \cdots + B_k = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_{\mathcal{I}_x}(B_i) \geq i\frac{p}{q}$$

ce qui entraîne, d'après 4.3.3 :

$$f \in \overline{\mathcal{I}_x^{p/q}}, \quad \text{donc} \quad f \cdot T^{p/q} \in \left(\overline{P}^{(1/p)}(\mathcal{I})\right)_x = \overline{P}^{(1/q)}(\mathcal{I}_x)\ .$$

Réciproquement, supposons $f \cdot T^{p/q} \in \overline{P}^{(1/q)}(\mathcal{I}_x)$, c'est-à-dire $f \in \overline{\mathcal{I}_x^{p/q}}$, ou encore $f^q \in \overline{\mathcal{I}_x^p}$, écrivons une relation de dépendance intégrale :

$$(f^q)^k + B_1(f^q)^{k-1} + \cdots + B_k = 0 \quad \text{avec} \quad B_i \in \mathcal{I}_x^{p \cdot i}\ .$$

Après multiplication par T^{kp}, on peut réécrire ceci :

$$(f \cdot T^{p/q})^{kq} + B_1 T^p (f \cdot T^{p/q})^{(k-1)q} + \cdots + B_k T^{pk} = 0$$

ce qui montre bien que $f \cdot T^{p/q}$ est entier sur $P(\mathcal{I}_x)$, et achève la démonstration de 4.3.2.

Remarque. — En fait 4.3.2 et 4.3.3 sont des énoncés équivalents. Le même argument que celui développé en 2.8 montre que $\overline{P}^{1/q}(\mathcal{I})$ est un $P(\mathcal{I})$-module de type fini donc une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini, ce qui achève la démonstration de 4.3.1.

4.3.6. Corollaire. — *Soient X un espace analytique complexe réduit, et $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent dont le support est rare dans X. Tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un entier $N = N(U)$ tel que :*

$$(\mathcal{I}|U)^k \cdot \overline{(\mathcal{I}|U)^{p/q}} = \overline{(\mathcal{I}|U)^{(p/q)+k}} \quad \text{dès que} \quad \frac{p}{q} \geq N\ .$$

4.3.7. Corollaire. — *Dans la situation de 4.3, pour tout entier $q \in \mathbb{N} - \{0\}$, la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée définie par*

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overline{\mathcal{I}^{p/q}} / \overline{\mathcal{I}^{\frac{p+1}{q}}}$$

est une $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduée de présentation finie.

Proof. — Tout d'abord, il résulte immédiatement du fait que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f \cdot q) \geq \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(f) + \bar{\nu}_{\mathcal{I}_x}(q)$ que $\mathcal{I} \cdot \overline{\mathcal{I}^{p/q}} \subset \overline{\mathcal{I}^{\frac{p+1}{q}}}$ et donc que $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X$ est en fait une $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduée. De plus, ceci nous donne un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduées :

$$\overline{P^{1/q}}(\mathcal{I}) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \longrightarrow \overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

ce qui entraîne que $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduée de type fini, d'après 4.3.1, et donc est de présentation finie d'après ([1] ch. I, 1.4) puisque chacune de ses composantes homogènes est un $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-module cohérent, comme quotient du $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-module cohérent $\overline{\mathcal{I}^{p/q}} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$.

4.4.0. — Nous allons maintenant utiliser l'existence du "dénominateur universel" de 4.1.2 pour montrer que localement, toutes les algèbres graduées que l'on a envie d'associer à la filtration par le $\bar{\nu}$ sont du type étudié ci-dessus.

4.4.1. Proposition. — *Soient X un espace analytique réduit, et $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent. Considérons, pour tout nombre réel $\nu \in \mathbb{R}^+$ le faisceau $\overline{\mathcal{I}^\nu}$*(resp. $\overline{\mathcal{I}^{\nu+}}$) *associé au préfaisceau*

$$U \longmapsto \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)/\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) \geq \nu\}$$
$$\big(\text{resp.}\, U \longmapsto \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)/\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) > \nu\}\big)$$

et la $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduée (par $\mathbb{R}_0 = \{\nu \in \mathbb{R}, \nu \geq 0\}$)

$$\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}_X = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{R}_0} \overline{\mathcal{I}^\nu}/\overline{\mathcal{I}^{\nu+}}\ .$$

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un entier q tels que l'injection canonique $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X|U \hookrightarrow \overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}_X|U$ soit un isomorphisme.

Proof. — D'après 4.1.1, il existe un voisinage U de $x \in X$ et un entier q tel que $\forall x' \in U$, $\bar{\nu}_{\mathcal{I}_{x'}}(f) \in \frac{1}{q}\mathbb{N}$ pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x'}$. En effet, il suffit de choisir U assez petit pour que toutes les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel D de l'éclatement normalisé $\pi : X' \to X$ de $\mathcal{I}$ qui rencontrent $\pi^{-1}(U)$ rencontrent $\pi^{-1}(x)$, et de prendre pour q le p.p.c.m. de $\{e_\alpha, \alpha \in A(U)\}$.

4.4.2. Corollaire. — $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}_X$ *est une $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-algèbre graduée de présentation finie.*

En effet, être de présentation finie est une condition locale, par définition, et $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}^{1/q}\mathcal{O}_X$ est de présentation finie d'après 4.3.5.

4.4.3. Remarque. — $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}_X$ étant en fait réduite, elle est de façon naturelle une $\mathcal{O}_X/\sqrt{\mathcal{I}}$-algèbre, et de présentation finie en tant que telle, d'après 4.3.8.

Appendice au § 4

Démonstration de 4.3.3 en général, et une autre démonstration de la rationalité de $\bar{\nu}_I(f)$ au moyen de la théorie des installations.

A 1. — Rappelons brièvement qu'on appelle installation la donnée d'un espace analytique complexe Z, de sous-espaces X et W de Z et d'une rétraction $r : Z \to W$, et que l'on note un tel objet $\triangle\ = (X, Z, W, r)$. La catégorie des installations est le cadre naturel de construction de polygones de Newton, comme suit : si Y est un sous-espace analytique fermé de $X \cap W$, pour tout $d \in \mathbb{R}_+ U\{\infty\}$, on peut associer à $\triangle$ son cône normal anisotrope de long de Y, de tropisme d, qui est noté $C^d_{\triangle\ ,Y}$ et, dans le cas où r est une rétraction lisse à fibre isomorphe à $\mathbb{C}^t$, cas où nous nous placerons désormais, est canoniquement le sous-cône de $C_{W,Y} \underset{Y}{\times} [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y]$ défini par l'idéal $\mathrm{in}_Y(\triangle\ ,\underline{\triangle}\ ,d)$ de $\mathrm{gr}_Y\, \mathcal{O}_W[Z_1, \ldots, Z_t]$ engendré par les éléments $\mathrm{in}_Y(g,d)$ lorsque g parcourt l'idéal J définissant X dans Z éléments ainsi définis dans :

$$\mathcal{O}_{Z,x} \simeq \mathcal{O}\{z\}, g = \sum_{a \in \mathbb{N}^t} g_a z^a \ ;$$

dans ce même anneau, soit $I(d, \mu)$ l'idéal engendré par les hz^a tels que $a + \nu_Y(h)/d \geq \mu$ et soit $\nu_Y(g,d) = \sup\{\mu, g \in I(d,\mu)\}$

On a alors le

Théorème [1], [2]. — *Étant donné $x \in Y \subset W \cap X$, il existe une suite finie de nombres rationnels $0 < d_1 < \cdots < d_s < \infty$ telle que l'on ait :*

1) Pour tout i, $1 \leq i \leq s+1$, le germe de $C^d_{\triangle\ ,Y}$ en x est indépendant de $d \in]d_{i-1}, d_i[$. Notons $C_{\triangle\ ,Y}(i)$ ce germe.

2) Les $C_{\triangle\ ,Y}(i)$ sont tous distincts.

Les d_i sont appelés tropismes critiques de l'installation $\triangle$ le long de Y en x.

De plus, si nous considérons l'installation :

$$\left(C^d_{\triangle\ ,Y}, C_{W,Y} \underset{Y}{\times} [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y], C_{W,Y}, P_1\right)$$

il existe $\varepsilon > 0$ tel que le germe en x du cône normal anisotrope le long de Y, de tropisme 0, de cette installation s'identifie canoniquement au germe en x de $C^\delta_{\triangle\ ,Y}$ pour $\delta \in [d - \varepsilon, d[$.

A 2. — Reprenons maintenant notre algèbre analytique $\mathcal{O}$, correspondant à un germe d'espace analytique (W,x), notre idéal I définissant un sous-espace $Y \subset W$ que nous pouvons supposer fermé, et $f \in \mathcal{O}$, que nous pouvons considérer comme $f \in \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$. Considérons l'espace $Z = (W \times \mathbb{C}, x \times \{0\})$ et identifions (W,x) à $(W \times \{0\}, x \times \{0\}) \subset Z$. Quitte à rétrécir Z, nous pouvons supposer que l'idéal $(z-f)\mathcal{O}_{Z,x\times\{0\}}$ (où z est la coordonnée sur $(\mathbb{C},0)$ définit le germe d'un sous-espace analytique fermé $X \subset Z$ et quitte à élever f à une puissance assez grande nous pouvons supposer que $f \in I(Y \subset X)$, et considérer l'installation $\triangle(f) = \triangle = (X, Z, W, \mathrm{Pr}_1)$ où Pr_1 est la première projection $W \times \mathbb{C} \to W$

$i(W) = W \times \{0\}$.

A 3. — Nous sommes maintenant en position pour démontrer 4.3.3,c'est-à-dire l'équivalence, pour un $d \in]0, +\infty]$ des assertions :

1) $\bar{\nu}_I(f) \geq d$.

2) Il existe une relation de dépendance intégrale

$$f^\ell + a_1 f^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_I(a_i) \geq d \cdot i\cdot$$

A.3.1.

1) $\Rightarrow$ 2). Le point crucial est que par définition de $\bar{\nu}$, pour tout $\varepsilon > 0$ (resp. pour tout A si $d = +\infty$) il existe un k_0 tel que si $k \geq k_0$, $\frac{\nu_I(f^k)}{k} > d - \varepsilon$ (resp. $\frac{\nu_I(f^k)}{k} > A$) ce qui signifie que dans notre installation $\triangle = \triangle(f)$ puisque $z^k - f^k = (z-f)(z^{k-1} + z^{k-2}f + \cdots + f^{k-1}) \in J$ idéal définissant X dans Z, par définition des cônes normaux anisotropes le long de Y, (en écrivant 0 pour $x \times 0$ et z pour $\mathrm{in}_Y\big((z), \triangle, d-\varepsilon\big)$ nous avons

$$z^k \in \mathrm{in}_Y(\triangle, \underline{\triangle}, d-\varepsilon) \subset \mathrm{gr}_I\, \mathcal{O}_{W,0}[z]$$

$\big(\mathrm{in}_Y(\triangle, \underline{\triangle}, d-\varepsilon)\big)$ est l'idéal définissant $C^{d-\varepsilon}_{\triangle,Y}$ dans $C_{X,Y} \times \mathbb{C} = C_{X,Y} \times [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y]$. Ainsi, il doit exister $g \in (z-f)\mathcal{O}_{W,x}\{z\} = J$ tel que

$$\mathrm{in}_N\big(\mathrm{in}_Y(g, \triangle, d)\big) = z^k \quad \text{(resp. avec } d = +\infty)$$

où N est l'idéal de $\mathrm{gr}_I\, \mathcal{O}_{\ ,x}[z]$ engendré par $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{gr}^i_I\, \mathcal{O}_{\ ,x}$ (où $\mathcal{O}_{\ ,x} = \mathcal{O}$). Nous pouvons écrire un tel élément g sous la forme :

$$\begin{aligned} g &= (b_0 + b_1 z + \cdots + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots)(z-f) \\ &= -b_0 f + (b_0 - b_1 f)z + \cdots + (b_{k-1} - b_k f)z^k + \cdots \end{aligned}$$

et le fait que $\mathrm{in}_N\left(\mathrm{in}_Y(g, \underline{\triangle}, d)\right) = z^k$ impose :

$$\begin{cases} b_{k-1} - b_k \cdot f = 1 \bmod I \\ \nu_I(b_{i-1} - b_i \cdot f) \geq (k-i)d \qquad i = 1, \ldots, k-1 \\ \nu_I(b_0 \cdot f) \geq k \cdot d \end{cases}$$

La première relation implique que b_{k-1} est inversible. Nous pouvons donc remplacer g par $b_{k-1}^{-1} \cdot g$ sans changer la forme initiale, et donc supposer $b_{k-1} = 1$.

Définissons maintenant des $a_i \in \mathcal{O}$ par :

$$\begin{aligned} b_{k-2} &= f + a_1 \\ &\vdots \\ b_{i-1} &= b_i \cdot f + a_{k-i} \\ &\vdots \\ b_0 &= b_1 f + a_{k-1} \\ b_0 f &= -a_k \end{aligned}$$

avec $\nu_I(a_1) \geq d$, $\nu_I(a_{k-i}) \geq (k-i)d$, $0 \leq i \leq k-1$.

Nous avons donc :

$$b_0 = f^{k-1} + a_1 f^{k-2} + \cdots + a_{k-1}$$

et donc

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_I(a_i) \geq id$$

ce qui achève de prouver 1) $\Rightarrow$ 2).

A.3.2.

Pour montrer que 2) $\Rightarrow$ 1), souvenons-nous qu'en 4.3.3, nous l'avons montré que tout d rationnel. Si donc nous avons une relation

$$f^\ell + a_1 f^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_I(a_i) \geq id\ ,$$

pour tout rationnel $\frac{p}{q} < d$, nous avons $\bar{\nu}_I(f) \geq \frac{p}{q}$, ce qui montre bien $\bar{\nu}_I(f) \geq d$.

A.3.3.

Corollaire. — $\bar{\nu}_I(f) = +\infty \Longleftrightarrow \exists k \cdot f^k = 0$.

A 4. Théorème. — *$\bar{\nu}_I(f)$ est le plus grand tropisme d_i critique de l'installation $\triangle(f)$ tel que le cône normal anisotrope $C^{d_i}_{\triangle,0} \subset C_{W,Y} \times \mathbb{C}$ ne contienne pas $Y \times \mathbb{C}$ (Y étant vu comme section nulle du cône relatif $C_{W,Y} \to Y$).*

Posons $d = \bar{\nu}_I(f)$.

Si d n'était pas tropisme critique, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{in}_Y(\triangle\,, \triangle\,, \delta)$ germe en x de l'idéal définissant $C^{\delta}_{\triangle\,,Y}$ dans $C_{W,Y} \times \mathbb{C}$ ne dépende pas de $\delta \in [d-\varepsilon, d+\varepsilon]$. Le même raisonnement qu'en A.3.1 permettrait de construire $g \in (z-f)\mathcal{O}\{z\}$ tel que

$$z^k = \mathrm{in}(g, d+\varepsilon)$$

et une relation de dépendance intégrale

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots a_k = 0$$

avec $\nu_I(a_i) \geq i(d+\varepsilon)$.

D'après A.3.1, on aurait $\bar{\nu}_I(f) \geq d+\varepsilon$. $\bar{\nu}_I(f)$ est donc un tropisme critique.

Montrons maintenant que $Y \times \mathbb{C} \not\hookrightarrow C^{d}_{\triangle\,,Y}$ et que $Y \times \mathbb{C} \hookrightarrow C^{\delta}_{\triangle\,,Y}$ si $\delta > d$. En effet, on a une relation de dépendance intégrale :

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad \nu_I(a_i) \geq id$$

soit

$$g = (z^k - f^k) + a_1(z^{k-1} - f^{k-1}) + \cdots a_{k-1}(z-f) \ .$$

On a :

$$g \in (z-f)\mathcal{O}\{z\} \quad \text{et} \quad \nu_Y(g,d) = k$$

$$\mathrm{in}_Y(g,d) = z^k + \mathrm{in}\, a_1 z^{k-1} + \cdots + \mathrm{in}\, a_k \notin \bigoplus_{i \geq 1} \mathrm{gr}^i_Y W[z] \ .$$

Si par contre pour un $\delta > d$, on avait $Y \times \mathbb{C} \not\hookrightarrow C^{\delta}_{\triangle\,,Y}$ (*i.e.*)

$$\mathrm{in}_Y(\triangle\,, \underline{\triangle}\,, \delta) \not\hookrightarrow \bigoplus_{i \geq 1} \mathrm{gr}^i_Y W[z]$$

il existerait $g \in (z-f)\mathcal{O}\{z\}$ tel que

$$\mathrm{in}_Y(g,\delta) \notin \bigoplus_{i \geq i} \mathrm{gr}^i_Y W[z]$$

et on aurait avec $N = \underset{i \geq 1}{\oplus} \mathrm{gr}^i_Y W[z]$

$$z^k = \mathrm{in}_N \left(\mathrm{in}(g,\delta)\right)$$

donc comme en A.3.1, $\bar{\nu}_I(f) > d$.

A.4.1.

Corollaire. — $\bar{\nu}_I(f) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Références

[1] LEJEUNE M., TEISSIER B. — *Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polynôme de Newton*, Thèse, Paris VII, 1973.

[2] LEJEUNE M., TEISSIER B. — *Transversalité polygone de Newton et installations*, Astérisque 7.8, 1973.

[3] ZARISKI, SAMUEL. — *Commutative algebra Van Nostrand*,.

5. $\bar{\nu}$ et arcs analytiques

5.0. — Les résultats de ce paragraphe ont pour but de justifier le calcul de $\bar{\nu}$, dans certains cas, par restriction à des arcs "suffisamment généraux", et de préciser les limites de cette méthode.

5.1. Définition. — *Soit X un espace analytique complexe. On appelle arc analytique sur X centré en un point $x \in X$ un germe de morphisme $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$ où $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$. On notera $\mathcal{A}_{X,x}$ l'ensemble des arcs non triviaux centrés en x, c'est-à-dire des arcs tels que $\mathrm{Im}(h) \neq \{x\}$, ou encore tels que le morphisme $h^* : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ ne soit pas nul. [Un arc analytique centré dans un sous-espace $Y \subset X$, i.e. tel que $h(0) \in Y$, sera noté $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, Y)$]. Si $h \in \mathcal{A}_{X,x}$, puisque $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ est un anneau de valuation discrète, on peut associer à $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ l'entier $v(f \circ h) \in \mathbb{Z}_+$ où $f \circ h = h^*(f \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0})$. De même on peut définir $v(\mathcal{I} \circ h)$ pour un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ par $v(\mathcal{I} \circ h) = v\big(h^*(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X,x})\big)$, v désignant toujours la valuation naturelle de $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ (i.e. l'ordre en t, si $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0} \cong \mathbb{C}\{t\}$).*

5.2. Théorème. — *Soient X un espace analytique complexe, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, et $x \in X$.*

Pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, on a :

$$\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) = \inf_{h \in \mathcal{A}_{X,x}} \Big\{ \frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} \Big\}$$

Proof. — 5.2.1. Après 4.1.2.1, nous pouvons écrire : $\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) = \frac{p}{q}$ (p, q, entiers) et, après 1.2 :

$$f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$$

et le critère valuatif de dépendance intégrale implique :

$$v(f^q \circ h) \geq v(\mathcal{I}^p \circ h), \quad \forall h \in \mathcal{A}_{X,x}$$

d'où :

$$\frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} \geq \frac{p}{q} = \bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f), \quad \forall h \in \mathcal{A}_{X,x}$$

et :

$$\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) \leq \inf_{h \in \mathcal{A}_{X,x}} \Big\{ \frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} \Big\}.$$

Pour achever la preuve de 5.2, raisonnons par l'absurde et supposons l'inégalité ci-dessus stricte : soit $\frac{p'}{q'}$ un rationnel tel que

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^{x}(f) < \frac{p'}{q'} \leq \inf_{h \in \mathcal{A}_{X,x}} \{\frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)}\},$$

et donc tel que $v(f^{q'} \circ h) \geq v(\mathcal{I}^{p'} \circ h)$, $\forall h \in \mathcal{A}_{X,x}$.

Le critère valuatif de dépendance intégrale fournit :

$$f^{q'} \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^{p'} \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$$

et [2.1] nous donne alors :

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^{x}(f) \geq \frac{p'}{q'}$$

et la contradiction cherchée.

5.3. — Commentaires géométriques sur 5.2 : après la construction faite au paragraphe précédent, il n'est pas difficile d'imaginer un cas où nous saurons construire un arc donnant exactement le minimum. Reprenons les notations de 4.1.0, et supposons que le minimum du théorème 4.1.1, soit atteint sur une composante D_α du diviseur exceptionnel D de l'éclatement normalisé $\pi : X' \to X$ de $\mathcal{I}$, telle que $\pi^{-1}(x)$ rencontre l'ouvert U_α des points "assez généraux" de D_α. Choisissons un germe de courbe analytique lisse centré en un point $x' \in \pi^{-1}(x) \cap U_\alpha$, et transversal à D_α en x', *i.e.* un arc $h' \in \mathcal{A}_{X',x'}$ tel que $h'^{*}(U) \in \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ soit de valuation 1, où $(U)^{e_\alpha} \in \mathbb{C}\{U, t_1, \ldots, t_n\}$ est l'idéal de D_α dans X' au voisinage de x'. On aura alors clairement, toujours avec les notations de 4.1 :

$$e_\alpha = v\big((\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X',x'}) \circ h'\big); m_\alpha = v\big((f \cdot \mathcal{O}_{X',x'}) \circ h'\big)$$

et donc, pour $h = \pi \circ h' \in \mathcal{A}_{X,x}$,

$$\frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} = \frac{m_\alpha}{e_\alpha} = \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^{x}(f). \qquad \text{(d'après4.1.1)}$$

Soit maintenant, pour chaque composante irréductible $|Y|_i$ de $|Y| = \sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, $A(i)$ l'ensemble des $\alpha \in A$ (A indiciant les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $D \subset X'$ cf. 4) tels que $\pi(D_\alpha) = |Y|_i$ ($\pi(D_\alpha)$ est un sous-espace fermé de X par la propreté de π). Et pour chaque i, soit $\bar{\nu}_i = \min_{\alpha \in A(i)}(\frac{e_\alpha}{m_\alpha})$. Au moins au voisinage d'un compact donné de X, les $A(i)$ sont finis, et $\bar{\nu}_i \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$. Pour $\alpha \in A(i)$, $\pi(U_\alpha)$ contient un ouvert analytique dense de $|Y|_i$ et donc en particulier pour les $\alpha \in A(i)$ tels que $\frac{e_\alpha}{m_\alpha} = \bar{\nu}_i$.

Ceci suffit pour montrer la

5.4. PROPOSITION. — *Étant donné un idéal cohérent $\mathcal{I}$ sur un espace analytique complexe X, et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, l'ensemble des points $x \in |Y| = \sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ tels qu'il existe $h_0 \in \mathcal{A}_{X,x}$ tel que :*

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f) = \frac{v(f \circ h_0)}{v(\mathcal{I} \circ h_0)} = \inf_{h \in \mathcal{A}_{X,x}} \Big\{ \frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} \Big\}$$

contient un ouvert analytique partout dense de $|Y|$.

En particulier, si $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = \{x\}$, $|D| = |\pi^{-1}(x)|$ et l'on peut toujours calculer $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f)$ en prenant pour h un disque $\pi \circ h'$, où h' est construit comme en 5.3.

5.5. PROPOSITION. — *Soient X, $\mathcal{I}$ et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ comme dans le théorème 1.*

Soit $p : X_1 \to X$ un morphisme d'espaces analytiques complexes propre et surjectif. Alors, posant $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_1}$, $f_1 = f \circ p \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$, on a, pour tout $x \in X$

$$\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f) = \bar{\nu}_{\mathcal{I}_1}^{p^{-1}}(x)(f_1) \overset{\text{déf}}{=} \min_{x_1 \in p^{-1}(x)} \bar{\nu}_{\mathcal{I}_1}^{x_1}(f_1)\ .$$

Proof. — Ceci résulte immédiatement de 5.2 et du critère valuatif de propreté.

5.6. Remarque. — La comparaison de 5.5 et du théorème 4.1.1 (§ 4) peut surprendre, puisque 5.5 implique que tous les arcs analytiques $h' : (\mathbb{D}, 0) \to \big(X', \pi^{-1}(x)\big)$ ($\pi : X' \to X$ est toujours l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$) nous donnent

$$\frac{v(f' \circ h')}{v(\mathcal{I} \circ h')} \geq \min \Big\{ \frac{v_\alpha(f)}{e_\alpha} \Big\}$$

ce qui est relativement peu aisé à vérifier directement.

5.7. — Un cas où l'on peut calculer $\bar{\nu}$ à l'aide d'un arc analytique.

Soient X un espace analytique réduit de dimension $d \geq 1$, $x \in X$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un anneau de Cohen-Macaulay, et $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal tel que $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = \{x\}$, *i.e.* $I = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X,x}$ est primaire pour l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}$. Supposons d'abord que I puisse être engendré par une suite régulière $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ ($d = \dim \mathcal{O}$). Nous pouvons alors définir une famille de germes de courbes dans (X, x), paramétrée par $\mathbb{P}^{d-1}$, comme suit : $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ définissent un germe de morphisme $\Phi : (X, x) \to (\mathbb{C}^d, 0)$, fini d'après le théorème de préparation de Weierstrass, puisque $\Phi^{-1}(0)$ est défini par I et que $\sqrt{I} = \mathcal{M}$. À chaque point $\ell \in \mathbb{P}^{d-1}$

correspond une droite ℓ dans $(\mathbb{C}^d, 0)$ et $\big(\Phi^{-1}(\ell), x\big)$ est un germe de courbe contenu dans (X, x) ; que nous noterons (C_ℓ, x).

Il y a une bien meilleure façon de décrire cette famille de courbes. L'éclatement de $\mathcal{I}$ dans X peut être décrit comme l'adhérence X'_0 dans $X \times \mathbb{P}^{d-1}$ du graphe de morphisme $X - \{x\} \to \mathbb{P}^{d-1}$ défini par $x' \mapsto \big(\varphi_1(x') : \cdots : \varphi_d(x')\big) \in \mathbb{P}^{d-1}$. On a donc où π_0 est l'éclatement de $\mathcal{I}$ dans X. Nommons $G_{\mathcal{I}} : X'_0 \to \mathbb{P}^{d-1}$ le morphisme déduit par la seconde projection. Alors, on vérifie sans mal que $C_\ell = \pi_0\big(G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell)\big)$.

On peut utiliser par exemple le fait que si l'on choisit des coordonnées homogènes $(T_1 : \cdots : T_d)$ sur $\mathbb{P}^{d-1}$, X'_0 est défini dans $X \times \mathbb{P}^{d-1}$ par l'idéal engendré par les $\{(T_i\varphi_j - T_j\varphi_i), i \neq j\}$. De plus, $\pi_0^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^{d-1}$ par $G_{\mathcal{I}}|\pi^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$. Je noterai σ l'isomorphisme inverse.

Ainsi nous pouvons considérer $G_{\mathcal{I}} : X'_0 \overset{\sigma}{\leftrightarrows} \mathbb{P}^{d-1}$ comme une famille de germes de courbes, et d'après le théorème de Bertini-Sard, puisque X'_0 est réduit, il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset \mathbb{P}^{d-1}$ tel que si $\ell \in U$, $\big(G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell), \sigma(\ell)\big)$ est un germe de courbe réduite. Par ailleurs, quitte à restreindre U on peut supposer que la normalisation $X' \xrightarrow{n} X'_0$ vérifie :

5.7.1.

1) Le morphisme composé $G_{\mathcal{I}} \circ n = \overline{G_{\mathcal{I}}} : X' \to \mathbb{P}^{d-1}$ est lisse (=plat et à fibre lisse) en tout point de $\overline{G}_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell)$, $\ell \in U$.

2) Le morphisme induit $\overline{G}_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell) \to G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell)$ est la normalisation, pour tout $\ell \in U$.

3) Le nombre des composantes irréductibles de $\big(G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell), \sigma(\ell)\big)$ est indépendant de $\ell \in U$.

4) Chaque composante irréductible de $G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell)$ est un arc sur X' passant par un point non singulier de X', où D_{red} est aussi non singulière, et transverse à D_{red} en ce point. [D est comme d'habitude le diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé $X' \to X$].

Puisque π_0 est un isomorphisme hors de $\pi^{-1}(x)$, π_0 induit un isomorphisme $G_{\mathcal{I}}^{-1}(\ell) - \{\sigma(\ell)\} \xrightarrow{\sim} C_\ell - \{x\}$.

Soit $C_\ell = \bigcup_1^r \Gamma_q$ la décomposition de C_ℓ en composantes irréductibles. Si $\ell \in U$, chaque Γ_q est réduite et irréductible, et fournit un arc $h_q : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x)$.

Proposition. — *Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, il existe un ouvert de Zariski non vide V de $\mathbb{P}^{d-1}$ tel que si $\ell \in V$, il existe une composante irréductible Γ_q de C_ℓ telle que*

5.7.2. — $\bar{\nu}^x_{\mathcal{I}}(f) = \frac{v(f \circ h_q)}{v(\mathcal{I} \circ h_q)}$.

Proof. — Il suffit d'appliquer 5.3 à la situation créée ci-dessus.

Ainsi, nous pouvons affirmer dans ce cas-ci qu'"une composante irréductible d'une courbe définie par $d-1$ combinaisons linéaires génériques de générateurs de $\mathcal{I}_x$, calcule $\bar{\nu}$ pour nous".

6. $\bar{\nu}$ et exposants de Łojasiewicz

6.0. — Nous allons montrer ici qu'un calcul de $\bar{\nu}$ est en fait un calcul d'exposant de Łojasiewicz, et en déduire la rationalité de ces derniers en géométrie analytique complexe. Ce paragraphe-ci est clairement le seul que l'on ne puisse pas transcrire en géométrie algébrique !

6.1. Définition. — Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et K un sous-ensemble compact de X. L'exposant de Łojasiewicz $\theta_K(f, \mathcal{I})$ de f par rapport à $\mathcal{I}$ sur K est la borne inférieure de l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}_+$ tels qu'il existe un voisinage ouvert U de K dans X et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|f(x)|^\theta \leq C \cdot \sup_{g \in \Gamma(U, \mathcal{I})} |g(x)|, \quad \forall x \in U \ .$$

Si l'ensemble de ces θ est vide, on convient de poser $\theta_K(f, \mathcal{I}) = +\infty$. Si par ailleurs $\Gamma(U, \mathcal{I})$ est de type fini quand U est un voisinage assez petit de K (ce sera le cas si $K = \{x\}$), $\theta_K(f, \mathcal{I})$ est aussi la borne inférieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ de l'ensemble des θ tels qu'il existe U et C tels que

$$|f(x)|^\theta \leq C \cdot \sup_{i=1}^{m} |g_i(x)| \quad (x \in U), \text{ où } (g_1, \ldots, g_m)$$

engendrent $\Gamma(U, \mathcal{I})$.

6.2 Remarque. — On peut aussi bien définir l'exposant de Łojasiewicz $\theta_K(\mathcal{I}', \mathcal{I})$ d'un idéal $\mathcal{I}'$ par rapport à $\mathcal{I}$ sur K :

$$\theta_K(\mathcal{I}', \mathcal{I}) = \sup_{f \in \Gamma(X, \mathcal{I}')} \theta_K(f, \mathcal{I}) \ .$$

6.3. Théorème.

1) $\theta_K(f,\mathcal{I}) = \frac{1}{\bar\nu^k_{\mathcal{I}}(f)}$, *où* $\bar\nu^k_{\mathcal{I}}(f) = \inf_{x\in K} \bar\nu^x_{\mathcal{I}}(f)$.

[On convient bien sûr que $\bar\nu^k_{\mathcal{I}}(f) = 0 \Rightarrow \theta_K(f,\mathcal{I}) = +\infty$*].*

2) Et de plus, il existe un voisinage U *de* K *dans* X *et une constante* $C \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$|f(x)|^{\theta_K(f,\mathcal{I})} \le C \cdot \sup_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g(x)| \quad \textit{pour tout} \quad x \in U$$

i.e. la borne inférieure de 6.1 est atteinte.

6.4. Corollaire. — *Pour tout idéal cohérent* $\mathcal{I}$ *sur un espace analytique complexe réduit* X*, telle que* $\sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ *soit rare, pour tout* $f \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ *et tout compact* $K \subset X$*,*

$$\theta_K(f,\mathcal{I}) \in \mathbb{Q}_0 \cup \{+\infty\} .$$

Démonstration de 6.3. — Posons $\bar\nu^K_{\mathcal{I}}(f) = \frac{p}{q}$ (4.1.6). Après (4.2.3), il existe un voisinage V_0 de K dans X tel que pour tout $x \in U_0$, $f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$, et le théorème de majoration (2.1.vi) nous fournit une constante C telle que $|f(x)|^q \le C \cdot \sup_{g\in\Gamma(U_0,\mathcal{I}^p)} |g(x)|$ pour tout $x \in U_0$. Mais d'après (2.1.iv), l'idéal (contenu dans $\mathcal{I}^p$) engendré par les puissances p-ièmes d'éléments de $\mathcal{I}$ a même clôture intégrale que $\mathcal{I}^p$, et donc en appliquant à nouveau le théorème de majoration nous pouvons écrire au prix d'un changement de la constante C

$$|f(x)|^q \le C \cdot \sup_{g\in\Gamma(U_0,\mathcal{I})} |g(x)|^p, \text{ i.e.}$$

$$|f(x)|^{q/p} \le C^{1/p} \cdot \sup_{g\in\Gamma(U_0,\mathcal{I})} |g(x)|.$$

D'où :

$$\theta_K(f,\mathcal{I}) \le \frac{q}{p} = \frac{1}{\bar\nu^K_{\mathcal{I}}(f)}.$$

Mais, si nous supposons l'inégalité stricte, il existe $\frac{q'}{p'} < \frac{q}{p}$, un voisinage U' de K dans X et une constante $D \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$|f(x)|^{q'} \le D \cdot \sup_{g\in\Gamma(U',\mathcal{I})} |g(x)|^{p'} \quad (x \in U')$$

et le théorème de majoration, avec l'argument précédent, nous donne :

$$f^{q'} \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^{p'} \cdot \mathcal{O}_{X,x}} \quad (x \in U') ,$$

donc :

$$\bar\nu^K_{\mathcal{I}}(f) \ge \frac{p'}{q'} ,$$

(après (2.1)) et la contradiction cherchée. Ceci démontre 1) et 2) de 6.3, avec $U = U_0$.

6.5. — Comme les morphismes propres conservent les inégalités du type considéré ici, au prix éventuellement d'une modification des constantes, on peut très bien utiliser 6.3 pour démontrer 5.5 (§ 5) sans utiliser le critère valuatif de propreté.

7. Théorème récapitulatif

7.1. Notations. — Soient X un espace analytique complexe réduit, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent tel que $|Y| = \sup \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ soit rare dans X, et K un sous-ensemble compact de X. Soient $\pi : X' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{I}$, D le diviseur exceptionnel, sous-espace de X' défini par l'idéal inversible $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$. Soit $A(K)$ l'ensemble fini tel que les composantes irréductibles D_α de D, avec $\alpha \in A(K)$ soient exactement celles qui rencontrent $\pi^{-1}(U)$ pour tout voisinage ouvert U de K dans X. Soit enfin e_α la multiplicité de $\mathcal{I}$ en un point $x' \in V_\alpha$, où $V_\alpha \subset D_\alpha$ est un ouvert analytique dense dans D_α en chaque point duquel X' et $D_{\alpha,\mathrm{red}}$ sont non singuliers, et $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X',x'} = u^{e_\alpha} \cdot \mathcal{O}_{X',x'}$, $D_{\alpha,\mathrm{red}}$ étant défini par $(u) \cdot \mathcal{O}_{X',x'}$.

7.2. Théorème. — *Étant donné une fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, les conditions suivantes sont équivalentes pour un nombre rationnel $\frac{p}{q} > 0$:*

1) $f^q \cdot \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{\mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{X,x}} \quad \forall x \in K$.

2) $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) = \inf_{x \in K} \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x(f) \geq \frac{p}{q}$.

3) Pour tout $x \in K$, il existe des $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, tels que $\nu_{\mathcal{I}x}(a_i) \geq \frac{p}{q} \cdot i$ (où $\mathcal{I}_x = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X,x}$) et que $f_x^k + a_1 f_x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$ (où $f_x = f \cdot \mathcal{O}_{X,x}$).

3') Si K est un polycylindre, il existe $a_i \in \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ $i = 1 \cdots k$ tels que $\nu_{\Gamma(K,\mathcal{I})}(a_i) \geq \frac{ip}{q}$ et que $f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ dans $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$.

4) Pour tout arc $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, K)$ (i.e. $h(0) \in K$) on a : $\frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} \geq \frac{p}{q}$.

5) Pour tout morphisme $\pi : X' \to X$ propre, dont l'image contient K, et tel que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ soit inversible, et que X' soit un espace analytique normal, il existe un voisinage ouvert U' de $\pi^{-1}(K)$ dans X' tel que : $f^q \cdot \mathcal{O}_{U'} \in \mathcal{I}^p \cdot \mathcal{O}_{U'}$.

6) Il existe un voisinage ouvert U de K dans X, et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|f(x)|^{q/p} \leq C \cdot \sup_{g \in \Gamma(U,\mathcal{I})} |g(x)| \quad \text{pour tout} \quad x \in U \ .$$

De plus,

A) Il existe $\alpha_0 \in A(U)$ tel que $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) = \frac{\mathcal{M}_{\alpha_0}}{e_{\alpha_0}}$ où $\mathcal{M}_{\alpha_0}$ est la multiplicité de f le long de $D_{\alpha,\mathrm{red}}$ en tout point x' d'un ouvert analytique dense $V_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_0} \subset D_{\alpha_0}$, et donc, pour tout arc $h : (\mathbb{D}, 0) \to (X, U)$ de la forme $\pi \circ h'$, où $h' : (\mathbb{D}, 0) \to \big(X', \pi^{-1}(U)\big)$ est tel que $h'(0) \in V_{\alpha_0}$ et que $h'^*(U)$ soit de valuation 1 dans $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ (6.1.1), on a :

$$\frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)} = \frac{\mathcal{M}_{\alpha_0}}{e_{\alpha_0}} = \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^K(f) = \inf_{h \in \mathcal{A}_{X,K}} \frac{v(f \circ h)}{v(\mathcal{I} \circ h)}$$

et tout voisinage U de K dans X contient de tels arcs, c'est-à-dire que l'on peut trouver de tels arcs avec $h(0) \in U$.

B) Le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par

$$\overline{\mathcal{I}^{p/q}}(U) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) / \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U(f) \geq \frac{p}{q}\}$$

(où $\bar{\nu}_{\mathcal{I}}^U = \inf\limits_{x \in U} \bar{\nu}_{\mathcal{I}}^x$) est cohérent pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, et la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\mathop{\oplus}\limits_{p'=0}^{\infty} \overline{\mathcal{I}^{p/q}} T^{p/q}$ est de présentation finie pour tout entier q. Enfin, la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\overline{\mathrm{gr}}_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X = \mathop{\oplus}\limits_{\nu \in \mathbb{R}_+} \overline{\mathcal{I}^{\nu}} / \overline{\mathcal{I}^{\nu+}}$ coïncide localement sur X avec une algèbre du type

$$\bigoplus_{p=0}^{+\infty} \overline{\mathcal{I}^{p/q}} / \overline{\mathcal{I}^{\frac{p+1}{q}}}$$

et est donc de présentation finie, puisque cette dernière l'est comme quotient de

$$\Big(\bigoplus_{p=0}^{+\infty} \overline{\mathcal{I}^{p/q}} T^{p/q}\Big) \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X / \overline{\mathcal{I}^{1/q}} .$$

Appendice par J.J. Risler

Les exposants de Łojasiewicz dans le cas analytique réel

Dans le cas réel, l'exposant de Łojasiewicz n'a pas d'interprétation algébrique simple analogue au $\bar{\nu}$ ou à la notion de clôture intégrale ; je vais cependant montrer que comme dans le cas complexe on peut le calculer à l'aide d'arcs analytiques, ou de morphismes analytiques réels qui jouent un rôle analogue à celui de l'éclatement normalisé ; il en résultera que dans le cas réel aussi les exposants de Łojasiewicz sont toujours rationnels.

Les références au séminaire seront précédées de la lettre S.

1. Préliminaires

1.1. Définition (cf. [R]). — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre analytique ; on dit qu'un idéal $I \subset A$ est réel s'il satisfait à la condition suivante :*

$$f_i \in A (1 \leq i \leq p) \textit{ et } f_1^2 + \cdots f_p^2 \in I \Rightarrow f_i \in I (1 \leq i \leq p) .$$

On a alors la proposition suivante (cf. [R]) :

1.2. Proposition. — *Soient A une $\mathbb{R}$-algèbre analytique, I un idéal premier de A tel que $\dim(A/I) = h$, (X, x) un représentant du germe analytique défini par A/I ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) I est réel.

b) I est l'idéal de tous les éléments de A nuls sur le germe de X au point x.

c) X possède un point lisse de dimension h dans tout voisinage du point x.

1.3. — Soit $(X; \mathcal{O}_{X,x})$ un germe analytique dans $\mathbb{R}^n$; on a alors $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_n/I$ (avec $\mathcal{O}_n = \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$). Notons $I(X)$ l'idéal de $\mathcal{O}_n$ formé des séries nulles sur X ($I(X)$ est la racine réelle de I ([R])) ; on dit que X est normal en x si :

a) $I = I(X)$

b) l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos.

Dans ce cas l'anneau $\mathcal{O}_{\widetilde{X},x} = \mathcal{O}_{X,x} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ est aussi intégralement clos, autrement dit X possède un complexifié $\widetilde{X}$ qui est aussi un espace normal : l'anneau $\mathcal{O}_{X,x} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ est en effet intègre ([R], proposition 6.1), et il résulte d'un théorème d'algèbre classique qu'il est alors intégralement clos (cf. par exemple Bourbaki, Alg. Comm., chap. V). On dit qu'un espace analytique réel $(X, \mathcal{O}_X)$ est normal s'il est normal en chaque point (rappelons que $\mathcal{O}_X$ désigne un faisceau cohérent de $\mathbb{R}$-algèbres analytiques ; cf. [H] pour la notion d'espace analytique réel).

1.4. — Si $J =]-1, +1[\subset \mathbb{R}$, nous noterons comme dans S.5.1, v la valuation naturelle de l'anneau $\mathcal{O}_{J,0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\{t\}$.

2. Arcs analytiques réels et résolution des singularités

On a dans le cas réel le théorème suivant, analogue à une partie du théorème S.7.2 :

2.1. THÉORÈME. — *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique réel, K un compact de X, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe un voisinage ouvert U de K dans X et une constante $C > 0$ tels que :

$$|f(x)|^{q/p} \leq C \sup_{g \in \Gamma(U, \mathcal{I})} |g(x)| \quad \forall x \in U \; .$$

2) Pour tout arc analytique réel $h : (]-1, 1[, 0) \to (X, K)$ (i.e. tel que $h(0) \in K$), on a

$$\frac{v(f \circ h)}{v(I \circ h)} \geq \frac{p}{q} \; .$$

3) Pour tout morphisme analytique réel $\pi = X' \to X$ dont l'image contient K et tel que :

a) π soit propre et X' soit normal (cf. *1.3)*

b) $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ soit localement principal

c) $\forall x' \in \pi^{-1}(K)$, l'idéal $\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{O}_{X',x'}}$ soit un idéal réel (cf. *1.1 ; $\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{O}_{X',x'}}$ désigne la racine de l'idéal $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X',x'}$),*

il existe un voisinage ouvert U' de $\pi^{-1}(K)$ dans X' tel que : $f^q\mathcal{O}_{U'} \in \mathcal{I}^p\mathcal{O}_{U'}$.

4) Il existe un morphisme analytique réel $\pi : X' \to X$ dont l'image contient K et vérifiant les propriétés a), b), c) ci-dessus et un voisinage ouvert U' de $\pi^{-1}(K)$ dans X' tels que $f^q\mathcal{O}_{U'} \in \mathcal{I}^p\mathcal{O}_{U'}$.

Proof.

1) $\Rightarrow$ 2) : Soit $h : (]-1,1[,0) \to (X,K)$ un arc analytique réel ; on a par hypothèse $|f(x)|^q \leq C \sup\limits_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g(x)|^p \ \forall x \in U$, d'où $|f\circ h(t)|^q \leq C \sup\limits_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g\circ h(t)|^p$ pour t voisin de 0 dans $]-1,1[$, d'où immédiatement $v\big((f\circ h)^q\big) \geq v\big((\mathcal{I}\circ h)^p\big)$; soit $qv(f\circ h) \geq pv(\mathcal{I}\circ h)$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Soit $\pi = X' \to X$ un morphisme analytique réel propre vérifiant les conditions énoncées dans 3) ; si l'on suppose qu'il existe $x' \in \pi^{-1}(K)$ tel que $f^q\mathcal{O}_{X',x'} \notin \mathcal{I}^p\mathcal{O}_{X',x'}$, il faut montrer qu'il existe un arc analytique réel h : $(]-1,1[,0) \to (X,K)$ tel que $v(f\circ h)/v(\mathcal{I}\circ h) < p/q$, ce qui va résulter du lemme suivant :

2.2. Lemme (cf. le lemme S. 2.1.3 pour le cas complexe). — *Soient X un espace analytique réel normal, x un point de X, f et g deux éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que l'idéal $\sqrt{(g)}$ soit réel et que $f \notin (g)$; il existe alors un arc analytique réel $h :: (]-1,1[,0) \to (X,x)$ tel que $v(f\circ h) < v(g\circ h)$.*

Proof. — X_{reg} désignera l'ouvert formé des points y de X où l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$ est régulier (dans un voisinage de x, cet ouvert coïncide avec l'ouvert des points lisses de dimension $d = \dim \mathcal{O}_{X,x}$).

Quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe un morphisme de résolution des singularités (cf. [H]) *i.e.* un morphisme analytique réel $\pi : X' \to X$ propre et surjectif tel que X' soit lisse et que $\pi|\pi^{-1}(X_{\text{reg}}) : \pi^{-1}(X_{\text{reg}}) \to X_{\text{reg}}$ soit un isomorphisme.

On raisonne maintenant comme dans [B-R], Section 2, lemme 3.

La fonction "méromorphe" f/g a un lieu polaire P non vide dans X (car $f/g \notin \mathcal{O}_{X,x}$ par hypothèse) dont le germe en x est réunion de certaines composantes irréductibles du germe $Z(g)$ défini par (g) (car si $\widetilde{X}$ désigne un complexifié d'un voisinage de x dans X qui soit un espace normal, et $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ des extensions de f et g à $\widetilde{X}$, la fonction méromorphe $\tilde{f}/tig$ a un lieu polaire de codimension 1 dans $\widetilde{X}$). P est donc de codimension réelle 1 dans X au voisinage de x, car $\sqrt{(g)}$ est par hypothèse un idéal réel ce qui implique que tous les facteurs irréductibles sont réels (cf. 1.2) ; il en résulte que $PnX_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$, car X étant normal est lisse en codimension 1.

Soit $x' \in \pi^{-1}(x) \cap \overline{\pi^{-1}(P \cap X_{\mathrm{reg}})}$; comme X' est lisse, l'anneau $\mathcal{O}_{X',x'}$ est factoriel et l'on peut écrire : $f \circ \pi / g \circ \pi = \alpha/\beta$ dans le corps des fractions de $\mathcal{O}_{X',x'}$, avec α et β premiers entre eux. β s'annule alors sur $\pi^{-1}(P \cap X_{\mathrm{reg}})$ au voisinage de x', car $\pi^{-1}(P \cap X_{\mathrm{reg}})$ fait partie du lieu polaire de la fonction α/β puisque $\pi|\pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}})$ est un isomorphisme. D'autre part, si P_1 est une composante irréductible analytique locale de $\pi^{-1}(P)$ en x' telle que $P_1 \cap \pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}}) \neq \emptyset$, α ne peut s'annuler identiquement sur P_1, car P_1 étant de codimension réelle 1 dans X', cela serait contradictoire avec le fait que α et β sont premiers entre eux (cf. proposition 1.2 : α et β seraient tous deux divisibles par un générateur de l'idéal $I(P_1)$).

On peut alors choisir par le "curve selection lemma" (cf. [M]) un arc analytique $h' = (]-1,1[,0) \to (X',x')$ tel que $\beta \circ h' \equiv 0$; on a alors $v(\beta \circ h') = +\infty$ et $v(\alpha \circ h') < +\infty$; si maintenant h'' est un arc analytique ayant un contact suffisamment grand avec h'' on aura (exactement comme dans la démonstration du lemme S. 2.1.3) : $v(\alpha \circ h'') < v(\beta \circ h'') < +\infty$, soit $v(f \circ \pi \circ h'') < v(g \circ \pi \circ h'')$, d'où le résultat cherché en posant $h = \pi \circ h''$. C.Q.F.D.

3) $\Rightarrow$ 4) : Étant donné un espace analytique réel X et un compact $K \subset X$, il faut montrer qu'il existe un morphisme analytique réel propre $\pi : X' \to X$ vérifiant les propriétés a), b) et c) de la proposition 3) ; le problème est local en X, car si pour tout $x \in K$ on trouve un voisinage de x U_x et un morphisme : $X'_{U_x} \to U_x$ satisfaisant aux conditions demandées, on prendra pour X' la somme disjointe des X'_{U_i}, où (U_i) est un recouvrement fini de K extrait du recouvrement (U_x).

Soit donc $x \in K$: on utilise "désingularisation I" ([H], 5.10) pour trouver un voisinage U de x et un morphisme propre et surjectif $\pi_1 : X'' \to U$ avec X'' lisse, et "désingularisation II" ([H], 5.11) qui permet pour chaque point $x'' \in \pi_1^{-1}(x)$ de trouver un voisinage V de x'' et un morphisme $\pi_2 : X'_V \to V$ propre et surjectif tel que X_V soit lisse et $\mathcal{IO}_{X'}$ un diviseur à croisements normaux, ce qui entraîne évidemment que $\forall x' \in X'_V$, l'idéal $\sqrt{\mathcal{IO}_{X'_V,x'}}$ est réel. Il suffit alors de prendre pour X' la somme disjointe de X'_{V_i} correspondant à un recouvrement fini (V_i) de

$\pi_1^{-1}(x)$.

4) $\Rightarrow$ 1) : Soit $\pi : X' \to X$ un morphisme vérifiant les propriétés de la condition 3) ; comme par hypothèse il existe un voisinage ouvert de $\pi^{-1}(K)$ dans X' tel que $f^q\mathcal{O}_{U'} \in \mathcal{I}^p\mathcal{O}_{U'}$, il existe un voisinage U'' de $\pi^{-1}(K)$ et une constante C tels que : $|f\circ\pi(x')|^q \leq C \sup_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g\circ\pi(x')|^p \ \forall x' \in U''$, d'où le résultat puisque π étant propre, $\pi(U'')$ contient un voisinage de K. C.Q.F.D.

3. Applications aux exposants de Łojasiewicz et compléments

Je vais d'abord montrer un théorème analogue au corollaire S. 6.4 montrant que les exposants de Łojasiewicz sont rationnels.

3.1. — Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique réel, $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et K un sous-ensemble compact de X ; on définit de la même manière qu'en S. 6.1 $\theta_K(f, \mathcal{I})$ comme la borne inférieure de l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}_+$ tels qu'il existe un voisinage ouvert U de K dans X et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ avec :

$$|f(x)|^\theta \leq C \sup_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g(x)| \quad \forall x \in U \ .$$

(Dans le cas où $K = \{x\}$, $\theta_{(x)}(f, \mathcal{I})$ était noté $\alpha(f, \mathcal{I})$ dans [B-R]).

Nous poserons d'autre part $\tilde{\theta}_K(f, \mathcal{I}) = \theta_K(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{I}})$, $\tilde{f}$ et $\tilde{\mathcal{I}}$ étant des extensions de f et $\mathcal{I}$ à un complexifié $\widetilde{X}$ de X ; on a toujours $\theta_K(f, \mathcal{I}) \leq \tilde{\theta}_K(f, \mathcal{I})$, et $\tilde{\theta}_K(f, \mathcal{I})$ est toujours un nombre rationnel (S. 6.4).

Dans le cas réel, on a le théorème suivant :

3.2. Théorème.

a) $\theta_K(f, \mathcal{I}) \in \mathbb{Q}^+ \cup \{+\infty\}$.

b) Il existe un voisinage U de K dans X et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$|f(x)|^{\theta_K(f,\mathcal{I})} \leq C \sup_{g\in\Gamma(U,\mathcal{I})} |g(x)| \quad \forall x \in U \ .$$

Je n'écrirai pas la démonstration de ce théorème : il suffit en effet pour la partie a) de recopier la démonstration du théorème S. 4.1.6, $\bar{\nu}_I^K(f)$ étant remplacé par $1/\theta_K(f, \mathcal{I})$ et l'éclatement normalisé par un morphisme analytique réel π :

$X' \to X$ satisfaisant aux conditions du théorème 2.1.3 ; et pour la partie b) de recopier la démonstration du théorème S. 6.3.

3.3. Remarque. — Dans [B-R], nous avions posé :

$$\alpha_K(f,\mathcal{I}) = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \exists C > 0 \text{ avec } |f(x)|^\alpha \leq C \sup_{g\in\Gamma(K,x)} |g(x)|, \forall x \in K\right\}$$

et montré que si K est sous-analytique dans X, $\alpha_K(f,\mathcal{I})$ est un nombre rationnel ; ce résultat n'a pas de rapport avec le théorème 3.2, et sa démonstration est très différente : on démontre que pour calculer $\alpha_K(f,\mathcal{I})$ (dans le cas où K est sous-analytique, on peut toujours se restreindre à un arc analytique, alors que c'est faux en général pour $\theta_K(f,\mathcal{I})$.

3.4. — Étudions maintenant la question suivante (déjà envisagée dans [B-R]) qui se pose de manière naturelle : sous quelles conditions peut-on affirmer que $\theta_K(f,\mathcal{I}) = \tilde{\theta}_K(f,\mathcal{I})$ (et donc que $\theta_K(f,\mathcal{I}) = 1/\bar{\nu}^K_{\mathcal{I}}(f)$) ?

Pour simplifier, nous supposerons dorénavant $K = \{x\}$, et poserons $\theta_{\{x\}}(f,\mathcal{I}) = \theta(f,I)$ où $I = \mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{X,x}$.

3.5. Définition. — *Soient $(X,\mathcal{O}_X)$ un espace analytique réel, $x \in X$. On dit qu'un idéal $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est réellement réel si $\forall f \in \mathcal{O}_{X,x}$ on a l'inégalité :*

$$\theta(f,I) = \tilde{\theta}(f,I)\ .$$

On a montré dans [B-R] (proposition II.3) que si X est normal et I principal, I est réellement réel si et seulement si $\sqrt{I}$ est un idéal réel, et donné des conditions suffisantes dans le cas où I est engendré par une suite régulière.

3.6. — Une désingularisation à la Hironaka d'un idéal $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est par définition un morphisme $\pi : X' \to U$ (où U est un voisinage convenable de x dans X) ayant les propriétés suivantes :

a) π est propre et surjectif.

b) X' est lisse et $I\mathcal{O}_{X'}$ est un diviseur à croisements normaux (on considère par abus de langage I comme un idéal de $\mathcal{O}_U$).

c) π est composé d'une suite d'éclatements de sous-variétés lisses.

Soit $\widetilde{X}$ un complexifié de X ; nous noterons $\tilde{\pi} : \widetilde{X}' \to \widetilde{U}$ le morphisme analytique complexe propre obtenu en faisant éclater les sous-variétés lisses complexifiées des sous-variétés lisses que l'on fait éclater pour obtenir le morphisme π ; si $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est un idéal, nous poserons $\widetilde{I} = I\mathcal{O}_{\widetilde{X},x}$ (avec $\mathcal{O}_{\widetilde{X},x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$).

On a alors le théorème suivant :

3.7. Théorème. — *Soit $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ un idéal ; supposons qu'il existe une désingularisation à la Hironaka de I : $X' \xrightarrow{\pi} U$ telle que l'on ait :*

$$\widetilde{I}\mathcal{O}_{\widetilde{X}'} \xrightarrow{\sim} I\mathcal{O}_{X'} \bigotimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{\widetilde{X}'} .$$

Alors l'idéal I est réellement réel.

3.8. Exemples.

a) Soient $X = \mathbb{R}^2$, x l'origine de $\mathbb{R}^2$, $I = (x^2 + y^2) \subset \mathbb{R}\{x, y\}$, et $\pi : X' \to X$ l'éclatement de l'origine.

Si V désigne la carte de l'éclatement π avec coordonnées x' et y' définies par $\begin{cases} x = x' \\ y = x'y' \end{cases}$, on a

$$I\Gamma(X', V) = (x'^2)$$

d'où

$$I\Gamma(X', V) \bigotimes_{\Gamma(X',V)} \Gamma(\widetilde{X}', \widetilde{V}) = (x'^2)$$

alors que

$$\widetilde{I}\Gamma(\widetilde{X}', \widetilde{V}) = \big(x'^2(y' + i)(y' - i)\big),$$

ce qui montre que la désingularisation π ne satisfait pas à l'hypothèse du théorème 3.7 (il est d'ailleurs immédiat de voir que I n'est pas réellement réel).

b) L'idéal $I = (x^2 + y^2, y^5) \subset \mathbb{R}\{x, y\}$ n'est pas non plus réellement réel (car $\theta(y, I) = 2$ et $\tilde{\theta}(y, I) = 5$) bien que contrairement à l'exemple précédent $\sqrt{I}$ soit réel (on a en effet $\sqrt{I} = (x, y)$).

c) En revanche, l'idéal $I = (x^4, y^4) \subset \mathbb{R}\{x, y\}$ est réellement réel : une désingularisation satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.7 est fournie par l'éclatement de l'origine ; on peut remarquer que pourtant I ne satisfait au critère de la proposition II.5 de [B-R].

Démonstration du théorème 3.7. — Soit $\pi : X' \to X$ une désingularisation de I satisfaisant aux hypothèses de 3.7 ; supposons que I soit engendré par $(g_1, \ldots, g_p)(g_i \in \mathcal{O}_{X,x})$.

Il est clair qu'il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est telle qu'il existe un voisinage V de x et une constante C avec $|f(y)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq p} |g_i(y)|$ $\forall y \in V$, f est entier sur I (cf. S. 1.1).

Supposons donc que $|f(y)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq p} |g_i(y)|$; on en déduit $f\mathcal{O}_{X'} \subset I\mathcal{O}_{X'}$ par le théorème 2.1 ; on a donc

$$f\mathcal{O}_{\widetilde{X}'} \in I\mathcal{O}_{X'} \bigotimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{\widetilde{X}'}$$

d'où

$$f\mathcal{O}_{\widetilde{X}'} \in \tilde{I}\mathcal{O}_{\widetilde{X}'}$$

à cause de l'hypothèse ; ceci implique que f est entier sur $\widetilde{I}$ dans $\mathcal{O}_{\widetilde{X},x}$ (théorème S. 2.1) d'où immédiatement que f est entier sur I dans $\mathcal{O}_{X,x}$. C.Q.F.D.

Références

[B-R] Bochnack-Risler. — *Sur les exposants de Łojasiewicz*, Comment. Mat. Helvetici **50**, 1975.

[H] Hironaka h. — *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Cours à l'Instituto Mat. L. Tonelli de l'Université de Pise, 1973.

[M] Milnor j. — *Singular points of complex hypersurfaces*,.

[R] Risler j.j. — *Le théorème des zéros en géométrie algébrique et analytique réelles*, Bull. Soc. Math. France , 1976.

20 ans après

Ce texte est destiné à développer certains aspects de la théorie et à présenter les travaux liés à la clôture intégrale des idéaux qui sont venus à notre connaissance depuis l'époque du séminaire, ce qui n'exclut pas qu'ils aient été écrits bien avant! Nous ne prétendons nullement être exhaustifs, et demandons l'indulgence pour nos omissions.

plan

A) Algèbre

1)$\overline{I}$

2) $\overline{\nu}$

3)$\overline{gr}$

4) Gabrielov, Izumi, Spivakovsky

5) Multiplicités .. et multiplicités de modules (polygones)

6) Ouvertures (Briançon -Skoda, tight closure...)

B) Géométrie

1) Interpretation transcendantale; saturation Lipschiptizienne, Böger) le cas réel; clôture semi-intégrale.

2) exposant de Łojasiewicz

3) Interpretation géométrique du $\overline{gr}$

4) Gabrielov, Izumi, Spivakovsky (géom)

5) Interpretation de la multiplicite par auto-intersection, Multiplicités polaires, spécialisation, etc..

6) Ouvertures (Morales, Sally , systèmes linéaires et factorisation, résolution...)

§ 1: Clôture int'egrale

La notion de clôture intégrale d'un idéal a été introduite par Prüfer ([]) en 1932 pour des raisons arithmétiques liées à l'étude des anneaux de Dedekind. En 1935 Krull ([]) en étudie un avatar, dont le § [] du séminaire est la traduction analytique; étant donnés un anneau intègre A et un idéal J de A, notons K le corps des fractions de A et v_A l'ensemble des valuations v de K dont l'anneau A_v contient A. Krull note J_b l'idéal $\cap_{v \in v_A} J.A_v$ et vérifie que l'opération $J \mapsto J_b$ vérifie les propriétés que nous connaissons pour la clôture intégrale. C'est probablement Zariski qui a remarqué l' égalité $\overline{J} = J_b$. Ce point de vue valuatif sera repris et développé par Zariski d'un point de vue géométrique et par Rees d'un point de vue algébrique dans les années 50 (voir ci-dessous). En 1937, Zariski utilise la dépendance intégrale pour fonder algébriquement le concept de point infiniment voisin à la Max Nœther dans le cas du plan. Il appelle "complets" les idéaux intégralement clos, par référence à la correspondence entre ceux-ci et les systèmes linéaires complets. En particulier, Zariski introduit une classe d'idéaux intégralement clos de l'anneau des polynomes $k[x, y]$ sur un corps k, les v-idéaux, pour lesquels un théorème de décomposition unique en produit (ou factorisation) est valable. Le développement de ces idées jouera par la suite un rôle important dans l'étude des singularités rationnelles (voir l'excellent article [] de Lipman).

Dans [], Northcott et Rees ont introduit le concept de *réduction* d'un idéal: J est une réduction de J' si l'on a $J \subset J'$ et $\overline{J} = \overline{J'}$. Une de leurs motivations était de donner une définition algébrique du choix de paramètres génériques dans un idéal; Samuel avait en effet montré dans [], introduisant à cette occasion le concept d'élément superficiel, que pour tout idéal $\mathbf{q}$ primaire pour l'idéal maximal d'un anneau local de dimension d ayant un corps de représentants infini k, un sous-idéal de $\mathbf{q}$ engendré par d combinaisons linéaires assez générales à coefficients dans k de générateurs de $\mathbf{q}$ a la même multiplicité que $\mathbf{q}$. En fait le point est qu'un tel idéal est une réduction de $\mathbf{q}$.

L'exemple des idéaux engendrés par des monômes dans une algèbre de polynomes A un idéal I engendré par des monômes dans une algèbre de polynomes correspond une région $E(I)$ du quadrant positif $\mathbf{R}_+^d$ de $\mathbf{R}^d$ qui est la réunion des quadrants translatés $m_i + \mathbf{R}_+^d$ où les m_i sont les points représentant les monômes qui engendrent l'idéal. Un polynome appartient à l'idéal exactement lorsque tous les monômes le constituant sont représentés par des points de cette région. Il n'est pas difficile de vérifier que la clôture intégralede l'idéal est encore un idéal engendré par des monômes et est représentée par l'enveloppe convexe de $E(I)$, dont la frontière est un *polyèdre de Newton* .

Il résulte du théorème de Caratheodory

§ 2 Le $\overline{\nu}$ Après 1950, Samuel introduit l'étude asymptotique des puissance d'idéaux sous divers aspects. Notant, pour un élement $x \in A$, $\nu_J(x)$ l'entier ν tel que l'on ait $x \in J^\nu \setminus J^{\nu+1}$, il définit dans [] la fonction

$$\overline{\nu}_J(x) = lim_{n\to\infty}\frac{\nu_J(x^n)}{n}.$$

Les notations sont celles de Rees ([]). De même, Samuel définit léquivalence asymptotique de deux idéaux ainsi: on a $J \sim J'$ s'il existe deux suites d'entiers $v(n)$ et $w(n)$ telles que $lim_{n\to\infty}n^{-1}v(n) = lim_{n\to\infty}n^{-1}w(n) = 1$ et que pour tout n on ait

$$J'^{w(n)} \subset J \subset J'^{v(n)}$$

Il démontre que $\sim$ est une relation déquivalence et que la classe déquivalence de tout idéal J contient un plus grand élément J_s qu'il appelle *clôture asymptotique* de J. Samuel pose aussi deux questions, qui seront résolues par Rees ([]) et Nagata ([]) (et, pour la première, par nous dans le cadre analytique dans l'ignorance des résultats de Rees et Nagata):

a) Le nombre $\overline{\nu}_J(x)$ est-il rationnel?

b) Pour un anneau A réduit, existe-t-il un nombre $t(J)$ tel que pour tout $x \neq 0$ on ait

$$0 \leq \overline{\nu}_J(x) - \nu_J(x) \leq t(J) \ ?$$

En 1954, Muhly démontre les égalités $J_s = J_b = \overline{J}$ lorsque A est un anneau intègre nœthérien.

Développements en algèbre commutative

A partir de 1955 Rees entreprend, avec Northcott, l'étude systématique de la dépendance intégrale sous les différents aspects que nous venons de voir, du point de vue de l'algèbre commutative, c'est à dire en dégageant les bons concepts algébriques et les conditions de finitude les meilleures permettant de démontrer sous une forme plus générale les résultats d'origine géométrique. En particulier il démontre dans [] l'équivalent algébrique du résultat du § [] pour tous les anneaux nœthériens, et donc la rationnalité de $\overline{\nu}$. Plus précisément:

Théorème (Rees): soient A un anneau nœthérien et J un idéal de A.

Il existe un nombre fini de valuations $v_1, \ldots, v_k$ de l'anneau total de fractions de A_{red}, non négatives sur A et telles que:

a) On a $v_i(x)=\infty$ si et seulement si x appartient à un idéal premier minimal de A, qui dépend de i.

b) On a l'égalité

$$\overline{\nu}_J(x)=min_i\frac{v_i(x)}{v_i(J)} \quad \text{où} \quad v(J)=min_{y\in J}v(y).$$

c) Pour tout entier n, on a $x\in\overline{J^n}$ si et seulement si $\overline{\nu}_J(x)\geq n$,

d) Un système minimal de telles valuations est unique.

(Pour une généralisation, voir l'article [] de Szpiro).

C'est à cette occasion que Rees introduit l'*anneau de Rees* associé à (A,J):

$$\mathcal{P}(J)=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}J^nv^{-n}\subset A[v,v^{-1}] \quad \text{où } J^n=A \text{ si } n\leq 0$$

associé à un idéal J de A. Cet anneau lui permettra, ici et dans ses travaux ultérieurs, de "faire des éclatements" sans sortir du cadre de l'algèbre commutative.

Rees prouve aussi l'existence d'une borne uniforme pour $\overline{\nu}(x)-\nu(x)$ dans le cas des anneaux que l'on appelle aujourd'hui de dimension pure.

Comme l'a remarqué Izumi dans [], une démonstration de l'existence d'un nombre réel positif $b(J)$ tel que pour tout x on ait

$$\overline{\nu}_J(x)-\nu_J(x)\leq b(J)$$

est implicitement donnée dans le séminaire. En fait, ce résultat est dans le cadre analytique un corollaire facile du fait prouvé dans le séminaire que pour tout entier q l'algèbre graduée $\overline{\mathcal{P}^{\frac{1}{q}}}=\bigoplus_{p\in\mathbf{N}}\overline{J^{\frac{p}{q}}}$ est la fermeture intégrale dans $A[T^{\frac{1}{q}}]$ de l'algèbre de Rees $\mathcal{P}(J)$. Cette égalité implique en effet, puisque en Géométrie algébrique les anneaux sont de Nagata, que $\overline{\mathcal{P}^{\frac{1}{q}}}$ est un $\mathcal{P}(J)$-module de type fini, et donc qu'il existe un entier k_0 tel que pour $p>k_0q$ on ait

$$\overline{I^{\frac{p}{q}}}=I^k\overline{I^{\frac{p-kq}{q}}}$$

d'où résulte l'inégalité

§ 3 Le $\overline{gr}_IA$

§ 4 Gabrielov, Izumi,

En [], Izumi a prouvé un résultat que Rees interprète ainsi dans []:

Soient A un anneau local nœthérien dont le complété est intègre, v et w deux valuations de A appartenant à un système minimal de valuations associé comme ci-dessus à un idéal J de A. Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\in A\setminus\{0\}$ on ait $v(x)\leq w(x)$. Il en déduit la borne uniforme pour $\overline{\nu}_J(x)-\nu_J(x)$. Nous reviendrons sur ces travaux d'Izumi et de Rees à propos des travaux de Spivakovsky.

§ 5 Multiplicités

Northcott et Rees observent que plus généralement, si $\mathbf{q}$ est primaire pour l'id'eal maximal et si $\mathbf{q}'$ est une réduction de $\mathbf{q}$, alors $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$ ont a la même multiplicité au sens de Samuel (*cf* 1.18). En 1960 Rees prouve la réciproque, bien plus difficile:

Théorème (Rees, []): Soit A un anneau local nœthérien formellement e dimension pure. Si $\mathbf{q}'\subset\mathbf{q}$ sont deux idéaux primaires de A ayant même multiplicité, ils ont même clôture intégrale. Cette interprétation numérique du concept de réduction a ouvert la voie à l'utilisation de la dépendance intégrale donner un sens géométrique à des invariants numériques des singularités, c'est à dire de leurs anneaux locaux (*cf* Cargese et voir plus bas).

C'est pour étudier certains de ces invariants numériques que Risler et Teissier, inspirés par un article de Bhattacharya ([]) introduisent ([]) les multiplicités mixtes, que l'on peut définir au moyen de la Proposition suivante:

Soient $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$ des idéaux d'un anneau local nœthérien A de dimension d, primaires pour l'idéal maximal.

a) Etant donnés des entiers positifs $n_1, \ldots, l_r$, on a pour la multiplicité de l'idéal produit $\mathbf{q}_1^{n_1} \cdots \mathbf{q}_r^{n_r}$ la formule:

$$e(\mathbf{q}_1^{n_1} \cdots \mathbf{q}_r^{n_r}) = \sum_{|\alpha|=d} \frac{d!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} e(\mathbf{q}_1^{[\alpha_1]}, \ldots, \mathbf{q}_r^{[\alpha_r]}) n_1^{\alpha_1} \cdots n_r^{\alpha_r}.$$

b) L'entier $e(\mathbf{q}_1^{[\alpha_1]}, \ldots, \mathbf{q}_r^{[\alpha_r]})$, appelé *multiplicité mixte* d'ordre $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ des idéaus $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$, est aussi égal à l'infimum des multiplicités des idéaux $(f_1, \ldots, f_d)A$ où les α_1 premiers éléments f_i appartiennent à $\mathbf{q}_1$, les α_2 suivants à $\mathbf{q}_2$, ..., les α_r derniers à $\mathbf{q}_r$.

Dans le cas où $r = 2$, cela se réduit à

$$e(q_1^{n_1} \mathbf{q}_2^{n_2}) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} e(\mathbf{q}_1^{[i]}, \mathbf{q}_2^{[d-i]}) n_1^i n_2^{d-i}.$$

Plus récemment, Rees a généralisé dans [] le concept de réduction en introduisant la *réduction conjointe* de plusieurs idéaux non nécéssairement primaires et a pu ainsi définir, sous certaines hypothès (essentiellement que la somme des idéaux soit primaire), les multiplicités mixtes pour des familles d'idéaux non nécéssairement primaires. Il a aussi dans [] donné une algébrisation du concept de "système générique de k éléments s'un idéal, qui est très utile dans l'étude des multiplicités mixtes.

Un lien entre les multiplicités mixtes et la théorie de la dépendance intégrale est fourni par les résultats suivants valable pour des idéaux primaires $\mathbf{q}_i$ d'un anneau local nœthérien A :

a) Les multiplicités mixtes $e(\mathbf{q}_1^{[\alpha_1]}, \ldots, \mathbf{q}_r^{[\alpha_r]})$ ne dépendent que de la clôture intégraledes idéaux $\mathbf{q}_i$.

b) Dans le cas $r = 2$, supposons A formellement équidimensionnel de dimension d et posons $e_i = e(\mathbf{q}_1^{[i]}, \mathbf{q}_2^{[d-i]})$;

Théorème (Teissier [], Rees et Sharp [], Katz [])

i) On a les inégalités

$$e_{i-1}^2 \leq e_i e_{i+1} \text{ pour } 0 \leq i \leq d.$$

Ces inégalités impliquent l'inégalité "à la Minkowski:

$$e(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)^{1/d} \leq e(\mathbf{q}_1)^{1/d} + e(\mathbf{q}_2)^{1/d}.$$

ii) On a l'égalité de clôture intégrales $\overline{\mathbf{q}_1} = \overline{\mathbf{q}_2}$ si et seulement si on a les égalités

$$e_0 = e_0 = \cdots = e_d.$$

En particulier, on a égalité dans línégalité à la Minkowski si et seulement si il existe des entiers r et s tels que l'on ait

$$\overline{\mathbf{q}_1^r} = \overline{\mathbf{q}_2^s}.$$

Puisque l'on a $e_0 = e(\mathbf{q}_2)$ et $e_d = e(\mathbf{q}_1)$, et que si $\mathbf{q}_1 \subset \mathbf{q}'_1$ on a $e(\mathbf{q}_1^{[i]}, \mathbf{q}_2^{[d-i]}) \leq e({\mathbf{q}'}_1^{[i]}, \mathbf{q}_2^{[d-i]})$, ces résultats impliquent aussitôt le théorème de Rees.

L'analogie formelle avec la théorie des volumes mixtes des corps convexes et l'inégalité de Brünn-Minkowski provient du dictionnaire issu de la représentation d'un monôme en d variables par un point entier de $\mathbf{R}^d$ déjm̀entionné au § 1. Si l'idéal engendré par les monômes est primaire pour l'idéal maximal $(X_1, \ldots, X_d)$, sa multiplicité est Cette correspondance, qui est un aspect de la théorie des variétés de Demazure ou variétés toriques, transporte le théorème de Rees sur l'énoncé suivant:

Etant donnés deux convexes fermés de volume fini K_1 et K_2 dans $\mathbf{R}^d$, si l'on a $K_1 \subset K_2$ et $\mathrm{vol}K_1 = \mathrm{vol}K_2$, on a $K_1 = K_2$, et l'énoncé sur les multiplicités mixtes ci-dessus est transporté sur le résultat suivant dû à A.D. Alexandrov et W. Fenchel (inégalités de Fenchel-Alexandrov) en 1936-37:

Définissant la somme de Minkowski de deux convexes compacts de $\mathbf{R}^d$ par $K_1+K_2 = \{x+y\};\ x \in K_1\ , y \in K_2$ et leurs volumes mixtes $v_i = \mathrm{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$par l'égalité

$$\mathrm{vol}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \mathrm{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]}) \lambda_1^i \lambda_2^{d-i} \quad \text{pour } \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0,$$

on a les inégalités

$$v_{i-1}^2 \geq v_i v_{i-2} \ \text{ pour } 0 \leq i \leq d$$

et les convexes K_1 et K_2 sont égaux à translation près si et seulement si on a les égalités

$$v_0 = v_1 = \cdots = v_d.$$

§ L'inégalité de Łojasiewicz

On a déjà discuté dans le Séminaire du rapport entre le $\overline{\nu}$ et l'inégalité de Łojasiewicz. Nous allons montrer que ce dictionnaire est efficace en l'utilisant pour démontrer un des résultats célèbres de la théorie des inégalités de Łojasiewicz, dû à celui-ci:

Théorème: Soit $f(x_1, \ldots, x_n$ une fonction analytique réelle définie dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$ et telle que $f(0) = 0$. Il existe un nombre réel θ , $0 < \theta\ < 1$, une constante $C > 0$ et un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tels que l'on ait pour tout $x \in U$ l'inégalité:

$$|\mathrm{grad} f(x)| \geq C |f(x)|^{\theta}.$$

Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver la même inégalité pour la fonction complexifiée de f, que nous noterons encore f. Remarquons aussi que le point est l'inégalité $\theta < 1$; le reste se déduit sans travail du théorème des zéros de Hilbert et de l'interprétation par le $\overline{\nu}$. Nous allons utiliser le mode de calcul du $\overline{\nu}$ donné au § []. Soit W un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ où f converge, choisissons y des coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ et considérons l'éclatement

$$\pi: Z \to W$$

de l'idéal jacobien

$$j(f)\mathcal{O}_W = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\mathcal{O}_W$$

et le morphisme

$$\overline{\pi}: \overline{Z} \to Z \to W$$

composé de π et de la normalisation $n: \overline{Z} \to Z$.

Puisque l'espace $\overline{Z}$ est normal, son lieu singulier est de codimension ≥ 2, et puisque l'image inverse par $\overline{\pi}$ de l'idéal $j(f)\mathcal{O}_W$, c'et à dire l'idéal de $\mathcal{O}_{\overline{Z}}$ engendré par les $(\frac{\partial f}{\partial z_1} \circ \overline{\pi}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}) \circ \overline{\pi}$ est par construction localement principal et engendré en tout point de $\overline{Z}$ par l'un des $\frac{\partial f}{\partial z_j} \circ \overline{\pi}$, cet idéal définit un sous-espace D de codimension 1 dans $\overline{Z}$, qu i n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles si nous avons pris la précaution de choisir le voisinage W relativement compact, puisque le morphisme $\overline{\pi}$ est propre.

Soit $D_{red} = \bigcup_i D_i$ la décomposition ensembliste de D en composantes irréductibles. Celles-ci sont de codimension 1 et donc chacune contient un ouvert analytique dense V_i n chaque point z duquel on a ceci:

1) L'espace $\overline{Z}$ est non singulier en z ainsi que l'ensemble analytique D_{red} sous-jacent à l'espace analytique D, et D_{red} est donc défini au voisinage de D par une équation $v = 0$, où v est une coordonnée locale sur $\overline{Z}$ en z.

2) Choisissons des coordonnées locales $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sur D en z; alors $v, b_1, \ldots, b_{n-1}$ est un système de coordonnées locales sur $\overline{Z}$ en z et l'on a une écriture

$(f \circ \overline{\pi})_z = Av^{\mu_i}$, où $A \in \mathbf{C}\{v, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ avec $A(0, \ldots, 0) \neq 0$ et $\mu_i > 0$ puisque f s'annule là où toutes ses dérivées s'annulent.

3) L'idéal $(j(f)\mathcal{O}_{\overline{Z}})_z$ est engendré par un des germes $(\frac{\partial f}{\partial z_j} \circ \overline{\pi})_z$, disons $(\frac{\partial f}{\partial z_1} \circ \overline{\pi})_z$, et l'on a

$(\frac{\partial f}{\partial z_1} \circ \overline{\pi})_z = Bv^{\nu_i}$ où $B \in \mathbf{C}\{v, b_1, \ldots, b_{n-1}\} et B(0, \ldots, 0) \neq 0$.

Remarquons que puisque D_i est irréductible, les entiers μ_i, ν_i ne dépendent pas du point $z \in V_i$ choisi. La règle de Leibniz donne:

$$\frac{\partial f \circ \overline{\pi}}{\partial v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \circ \overline{\pi})_z \frac{\partial z_j \circ \overline{\pi}}{v} = v^{\mu_i - 1}(\mu_i A + v\frac{\partial A}{\partial v}).$$

On en déduit aussitôt l'inégalité

$$\mu_i - 1 \geq \nu_i$$

Cela donne, posant $\theta = \sup_i \frac{\nu_i}{\mu_i} = \frac{1}{\overline{\nu}_{j(f)}(f)}$, l'inégalité $\theta < 1$ et d'autre part par les méthodes du Chap [] du séminaire, il vient en posant $\theta = \frac{p}{q}$ $f^p \in \overline{j(f)^q}$, ce qui équivaut à $|f(z)|^p \leq C'|\mathrm{grad} f(z)|^q$ pour z assez proche de 0 et donc au résultat cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] P.B. Bhattacharya, The Hilbert function of two ideals, Proc. Camb. Phil. Soc., 53 (1957), 568–575.

[Bö1] E. Böger, Einige Bemerkungen zur theorie der ganzalgebraischen Abhängigkeit in Idealen, Math. Ann., 185 (1970), 303–308.

[Br] G.W. Brumfiel, real valuation rings and ideals, Springer L.N.M., No. 959, 1981.

[F] A. Fekak, Interpretation algébrique de l'exposant de Łojasiewicz, C.R.A.S. Paris, t. 310, Série 1, 1990, 193-196.

[G1] T. Gaffney, Integral closure of modules and Whitney equisingularity, *Invent. Math,* 107, 1992, 301-322.

[G 2] T. Gaffney, Polar multiplicities and equisingularity of map-germs, *Topology,*Vol. 32, No.1, 1993, 185-223.

[I 1] S. Izumi; A measure of integrity for local analytic algebras, Publ. R.I.M.S., Kyoto University, 21, 719–735, 1979.

[I 2] S. Izumi; Gabrielov's rank condition is equivalent to an inequality of reduced orders, *Math. Annalen,* **276** (1986), 81–87.

[Ka] D. Katz, Note on multiplicity, Proc. A.M.S., **104**No. 4, Dec. 1988, 1021-1026.

[K] W. Krull

[N] D.G. Northcott,*Lessons on Rings, Modules, and Multiplicities* University Press, Cambridge,1968.

[N-R] D.G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145–158.

[R] D. Rees, Degree functions in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc., 57 (1961), 1-7.

[R] D. Rees, A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, Proc. Camb. Phil. Soc., 57 (1961), 8–17.

[R] D. Rees, Local birational Geometry, Actas del Coloquio internacional sobre Geometría algebraica, Madrid, Sept. 1965.

[R] D. Rees, Hilbert functions and pseudo-rational local rings of dimension two, J. London Math. Soc. (2), 24 (1981), 467-479.

[R] D. Rees, Rings associated with ideals and analytic spread, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1981), 89, 423-432.

[R] D. Rees, Multiplicities, Hilbert functions and degree functions, *Commutative Algebra-Durham 1981* London Math. Soc. Lectures Notes 72 (Ed. R.Y. Sharp, University Press, Cambridge 1983), pp 170-178.

[R] D. Rees, Generalizations of reductions and mixed multiplicities, J. London Math. Soc., (2), 29 (1984), 397-414.

[R-S] D. Rees and R.Y. Sharp, On a Theorem of B. Teissier on multiplicities of ideals in local rings, J. London Math. Soc., (2), 18 (1978), 449-463.

[S] M. Spivakovsky: Valuations in function fields of surfaces

[S] Mark Spivakovsky: On the structure of valuations centered in a local domain.

[V] J.K. Verma, Rees algebras of contracted ideals in two-dimensional local rings, Journ. of Algebra, 141, N0. 1 (1991), 1-10.

[V] J.K. Verma, Joint reductions of complete ideals, Nagoya Math. J., 118, 1990, 155-163.

[V] J.K. Verma, Joint reductions and Rees algebras, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 109 (1991), 335-342.

[V] J.K. Verma, Multigraded Rees algebras and mixed multiplicities, Journ. of Pure and Applied Algebra, 77 (1992), 219-228.