

AMIBES NON-ARCHIMEDIENNES

Exposés aux journées X-UPS, Palaiseau Avril 2008

Bernard TEISSIER

1 INTRODUCTION

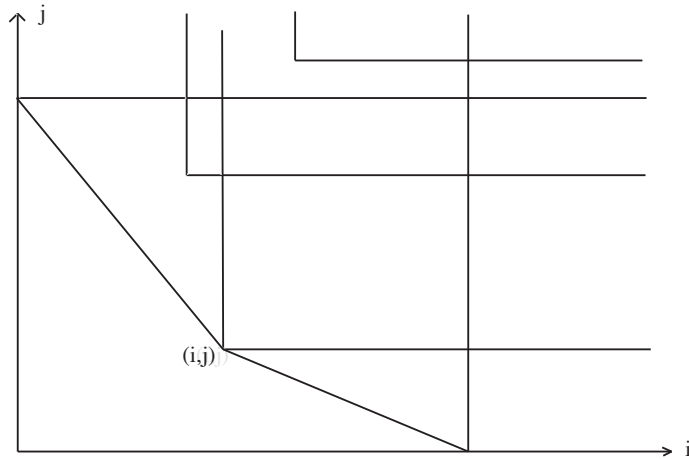
Soit k un corps. Une équation, ou un système d'équations polynomiales en n variables, à coefficients dans k , encode un sous-ensemble de l'espace affine $\mathbf{A}^n(k)$, l'ensemble des points dont les coordonnées annulent tous les polynômes du système. Ce sous-espace a sa géométrie, et ses propriétés topologiques par exemple si k est \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Les équations ont aussi leur géométrie, qui est essentiellement manifestée par la disposition dans le réseau entier \mathbf{N}^n des exposants qui y apparaissent et aussi par des informations qualitatives sur les coefficients.

Bien que la géométrie algébrique moderne ait pour une part écarté l'utilisation de la description des variétés algébriques par des équations au profit d'invariants intrinsèques comme les plurigenres, le diviseur canonique, le groupe de Picard, etc. à partir desquels on tente de décrire les propriétés géométriques, cela reste un problème lancinant de relier la géométrie d'un espace à celle de ses équations, tout en sachant que cette dernière dépend des coordonnées choisies ainsi que du choix de générateurs d'un idéal et que la géométrie, c'est ce qui est indépendant du codage!.

Même lorsque $n = 1$, relier le nombre et la position (dans \mathbf{R} ou \mathbf{C}) des zéros d'un polynôme à la distribution des exposants et à la taille des coefficients a donné naissance à beaucoup de belles mathématiques, par exemple le théorème fondamental de l'algèbre et la règle de Descartes et le Bezoutien qui permettent d'estimer ou de compter le nombre de racines réelles, etc.

Lorsque $n = 2$, Newton a montré qu'une bonne idée pour utiliser les exposants d'un polynôme en deux variables $\sum_{i,j} a_{i,j} x_1^i x_2^j$ est de considérer l'enveloppe convexe dans \mathbf{R}^2 de l'ensemble des points de coordonnées (i, j) correspondant aux monômes qui apparaissent dans le polynôme.

Plus précisément, cherchant à résoudre au voisinage de 0 une équation polynomiale $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ par des séries $y(x)$ même dans le cas où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, Newton et l'idée de regarder l'enveloppe convexe $\text{Conv}\left(\bigcup((i, j) + \mathbf{R}_+^2)\right)$ de la réunion des quadrants positifs issus de chacun des points (i, j) correspondant aux exposants des termes du polynôme. Sa frontière est un polygone et Newton montra que les solutions de l'équation sont des séries en x à exposants fractionnaires, dont les exposants initiaux sont nécessairement les opposés de pentes de côtés du polygone.



Cette idée est l'ancêtre des résultats présentés ici. Les références fondamentales pour les amibes non-archimédiennes sont [4] et [12], et [8] est une très bonne introduction générale à la géométrie tropicale.

Après un examen trop rapide je n'ai pas trouvé dans la littérature les points suivants de la présentation faite ici, qui à mon avis la rendent plus naturelle: la *définition* de la transformée de Legendre (à deux signes - près) comme restriction de la fonction d'appui de l'épigraphe (mais le lien est presque explicite dans la présentation du Théorème de Fenchel donnée dans [2], Chap. 1, et sans doute aussi dans l'article original de Fenchel [6] et dans les travaux de J-J. Moreau comme [13]), la présentation des ensembles polyédraux rationnels dans \mathbf{R}^n comme sections par un hyperplan horizontal d'un éventail "presque" rationnel dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ et corrélativement le lien entre les poids sur les complexes polyédraux rationnels et la fonction d'appui dont ledit éventail définit le lieu de non-linéarité.

2 QUELQUES RAPPELS

Soit K un corps; une valeur absolue (ou norme) sur K est la donnée d'une application $a \mapsto |a|$ de K dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ satisfaisant les conditions:

1. $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$
2. $|ab| = |a||b|$ pour $a, b \in K$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Une valeur absolue s'étend aux extensions algébriques L de K au moyen de la formule $|a| = |\mathrm{N}_{L/K}(a)|^{1/d}$ si a est dans l'extension L de K et d est le degré de l'extension, $\mathrm{N}_{L/K}$ l'application norme de L dans K .

Ainsi, une norme sur K s'étend à une clôture algébrique \overline{K} et donne naissance pour tout entier n à une application

$$\mathrm{Log}: (\overline{K}^*)^n \rightarrow \mathbf{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \dots, \log|x_n|).$$

Ici il faut penser pour tout corps L à $(L^*)^n$ comme l'espace affine $\mathbf{A}^n(L)$ privé de la réunion des hyperplans de coordonnées.

Un sous-espace algébrique (fermé) de $(L^*)^n$ correspond à un idéal de l'algèbre $L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$. Un sous espace algébrique Z de l'espace affine L^n défini par un idéal I de l'anneau de polynômes $L[x_1, \dots, x_n]$ induit un sous ensemble algébrique $Z \cap (L^*)^n$ de $(L^*)^n$ dont l'idéal dans $L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ est l'idéal engendré par I via l'injection naturelle $L[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$.

Revenons à notre corps normé \overline{K} .

Definition 2.1. Soit X un sous-ensemble algébrique de $(\overline{K}^*)^n$. L'amibe $\mathcal{A}(X)$ de X est la fermeture dans \mathbf{R}^n de $\mathrm{Log}(X)$.

Nous supposerons dans toute la suite que X n'est pas $(\overline{K}^*)^n$ tout entier. Par exemple si $K = \mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle, comme l'application Log est continue et propre, l'amibe est exactement l'image de X .

Si l'on s'intéresse aux solutions d'un système donné d'équations algébriques, il est judicieux de les chercher à coordonnées dans un corps algébriquement clos, car c'est là que l'on en voit le plus, et comme de plus on les cherche par des méthodes d'approximations successives relativement à une valeur absolue, il est également judicieux de se placer dans un corps complet pour celle-ci car c'est là que l'on pourra en construire le plus. Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposerons le corps K algébriquement clos et complet pour la valeur absolue considérée.

Nous allons nous intéresser particulièrement au cas où la valeur absolue est *non archimédienne* c'est à dire que la troisième inégalité ci-dessus est remplacée par l'inégalité plus forte

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

On parlera alors d'amibes non archimédiennes. L'intérêt de considérer les amibes non-archimédiennes est multiple: d'abord il est très utile en théorie

des nombres de faire de la géométrie algébrique sur des extensions algébriques du corps \mathbf{Q} des rationnels munies de la valeur absolue qui étend la valeur absolue p -adique $|a|_p = p^{-\nu_p(a)}$ de \mathbf{Q} , ce qui nous amène à travailler sur le complété C_p pour cette valeur absolue de la clôture algébrique du complété p -adique \mathbf{Q}_p de \mathbf{Q} . Si l'on étend la notation \mathbf{Q}_p en écrivant $|\cdot|_\infty$ pour la valeur absolue usuelle de \mathbf{Q} et $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ alors $\mathbf{C} = C_\infty$.

Toute sous-variété fermée de $(\mathbf{Q}^*)^n$ a donc une amibe pour chaque nombre premier p et une amibe à l'infini, qui est son amibe complexe.

Ensuite, il est très utile en général d'avoir de l'information sur les valeurs absolues des solutions de systèmes d'équations, et c'est bien de cela qu'il s'agit ici. Enfin, comme nous le verrons, les amibes non-archimédiennes apparaissent comme limites d'amibes correspondant à des valeurs absolues archimédiennes.

Il est souvent commode de voir les valeurs absolues non archimédiennes comme des valuations à valeurs réelles. Rappelons qu'une valuation à valeurs réelles sur un corps, ou valuation de rang un, est une application $\nu: K \rightarrow \mathbf{R} \cup \infty$ satisfaisant les conditions suivantes:

1. $\nu(a) = \infty$ si et seulement si $a = 0$
2. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ pour $a, b \in K$
3. $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$

La formule

$$\nu(a) = -\log|a|$$

permet d'établir une bijection entre valeurs absolues non archimédiennes et valuations de rang un sur K . Le corps K est complet pour la valuation s'il l'est pour la valeur absolue correspondante. Le langage des valuations est plus naturel dans le cas où, étant donné un corps "de base" k on prend pour K le corps $k((t))$ des séries de Laurent en une indéterminée $\sum_{i=m}^{\infty} c_i t^i$, $c_i \in k$. L'ordre en t d'une telle série est une valuation sur K , qui prend ses valeurs dans le groupe $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ et prend la valeur 0 sur k .

Notons que cela induit une différence de notation par rapport aux textes de Brugallé et Itenberg: un terme "grand" dans un polynôme est un terme de petite valuation; c'est pourquoi nous trouverons des "min" et pas des "max".

Si le corps k est algébriquement clos et de caractéristique zéro, le corps des séries de Newton-Puiseux

$$\overline{k((t))} = \bigcup_{n \geq 1} k((t^{1/n}))$$

est algébriquement clos et est donc une clôture algébrique de K . C'est une conséquence essentielle du résultat de Newton rappelé au début. Il est de plus complet pour la valuation qui étend celle de K et qui prend ses valeurs dans le groupe $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

En général, le groupe des valeurs que prend une valuation de rang un définie sur un corps algébriquement clos est *divisible* en ce sens que si $g \in G$, pour tout

$n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ il existe $h \in G$ tel que $nh = g$ (pensez à l'équation $X^n = a$) et donc, si la valuation est non triviale, il contient \mathbf{Q} et est dense dans \mathbf{R} .

Ce qui précède est un cas particulier d'une construction générale. Soit G un groupe abélien totalement ordonné. On peut définir le corps $k((t^G))$ des séries de Laurent à exposants dans G ; c'est l'ensemble des applications $c: G \rightarrow k$ dont le support $\text{supp}(c) = \{g \in G / c(g) \neq 0\}$ est *bien ordonné*. On peut penser aux éléments de $k((t^G))$ comme à des séries $\sum c(g)t^g$. Cette hypothèse sur le support suffit pour la définition de l'addition et surtout de la multiplication des séries, ainsi que l'existence d'un inverse parce que la réunion de deux sous-ensembles bien ordonnés de G est un ensemble bien ordonné et que d'après un théorème de B. Neumann (voir [15]), le semigroupe engendré par un sous-ensemble bien ordonné est bien ordonné.

En effet il faut en particulier montrer que si l'ensemble des exposants de la série F est bien ordonné, il en est de même pour celui de $(1 + F)^{-1} = 1 - F + F^2 + \dots + (-1)^i F^i + \dots$ dont les exposants appartiennent tous au semigroupe engendré par les exposants de F .

Si G est un groupe abélien totalement ordonné (en particulier si c'est un sous-groupe de \mathbf{R}) qui est divisible, et si k est algébriquement clos, alors $k((t^G))$ est algébriquement clos (voir [17]). Un des intérêts de cette construction est que le corps des séries de Puiseux n'est algébriquement clos que si le corps algébriquement clos k est de caractéristique zéro. Cela est dû au fait que les exposants apparaissant dans une série de Puiseux donnée ont, par définition, un dénominateur commun alors que sur un corps de caractéristique positive, des équations algébriques à coefficients dans $k((t))$ n'ont pas nécessairement pour solutions de telles séries.

Par exemple, étant donné un nombre premier p , posant $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, l'équation

$$x^p - t^{p-1}(1+x) = 0$$

à coefficients dans $\mathbf{F}_p((t))$ a pour solution

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} t^{1-\frac{1}{p^i}}$$

qui n'est pas du tout une série de Puiseux mais a un ensemble bien ordonné d'exposants rationnels et est donc un élément de $\mathbf{F}_p((t^{\mathbf{Q}}))$.

Ainsi, lorsque le corps de base k est algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, pour travailler dans un corps algébriquement clos il est judicieux de choisir le corps $k((t^{\mathbf{Q}}))$ ou même $k((t^{\mathbf{R}}))$. Ce n'est que récemment que K. Kedlaya a décrit la clôture algébrique de $k((t))$ lorsque k est de caractéristique positive (voir [10]).

Les corps comme $k((t^{\mathbf{Q}}))$ ou $k((t^{\mathbf{R}}))$ sont parfois appelés corps de séries transfinies, parce qu'ils contiennent des séries dont les ensembles d'exposants peuvent représenter des ordinaux $> \omega$, par exemple $\sum_{i=1}^{\infty} t^{1-\frac{1}{p^i}} + \sum_{j=1}^{\infty} t^{2-\frac{1}{q^j}}$ où p, q sont deux nombres premiers.

Nous considérerons, sauf mention expresse du contraire, des séries dont les ensembles d'exposants sont des ensembles bien ordonnés de nombres réels. Le plus petit de ces exposants existe donc et l'application qui à chaque série associe son plus petit exposant est une valuation de rang un. C'est toujours cette valuation que nous prendrons. Etant donné un corps K de séries, séries de Puiseux ou éléments de $k((t^{\mathbf{Q}}))$ ou plus généralement de $k((t^G))$, et un sous-espace algébrique fermé X de $(K^*)^n$, la donnée d'un "point de X à valeurs dans K " est la donnée de séries $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de K satisfaisant les équations qui définissent X et dont aucune n'est la série nulle. Notons $X(K)$ l'ensemble des points de X à valeurs dans K .

On peut définir l'application $\nu: X(K) \rightarrow \mathbf{R}^n$ associée à la valuation t -adique qui à chaque solution associe $(\nu(x_1(t)), \dots, \nu(x_n(t)))$.

L'amibe de $X(K)$ est alors l'adhérence dans \mathbf{R}^n de $\nu(X)$:

$$\mathcal{A}(X(K)) = \overline{-\nu(X(K))}.$$

On nomme aussi $\overline{\nu(X(K))}$ la *variété tropicale* associée à $X(K)$ et on la note $\mathcal{T}(X(K))$. Dans la suite, si le corps K est fixé, nous écrirons seulement $\mathcal{A}(X)$, $\mathcal{T}(X)$ etc.

Remarquons que nous aurions pu tenir exactement le même discours en prenant pour K le corps C_p complété de la clôture algébrique du corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques. L'amibe de $X \subset (C_p^*)^n$ est alors l'ensemble des valuations p -adiques des solutions à coordonnées dans C_p des équations définissant X .

La théorie des amibes non-archimédiennes repose sur le fait que dans tous les cas de ce type ces ensembles de valuations ont, comme sous-ensembles de \mathbf{R}^n muni du réseau entier, une structure géométrique très précise de complexe polyédral rationnel qui peut être reliée à celle des exposants des équations définissant X et à la taille des coefficients, et contient de l'information sur la géométrie de X .

Par ailleurs, on peut généraliser un peu le concept de valuation en définissant les valuations pour les anneaux commutatifs unitaires.

Une valuation (de rang un) ν sur un tel anneau A est la donnée d'une application $\nu: A \rightarrow \mathbf{R} \cup \infty$ satisfaisant les conditions suivantes:

1. $\nu(a) = \infty$ si $a = 0$
2. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ pour $a, b \in A$
3. $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$

L'ensemble des éléments de valuation infinie est un idéal premier \mathfrak{p} de A , et la valuation ν induit une valuation sur l'anneau quotient A/\mathfrak{p} qui ne prend plus la valeur ∞ qu'en 0 et s'étend à son corps de fractions par $\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$. Inversement, la donnée d'un idéal premier de A et d'une valuation du corps de fractions de A/\mathfrak{p} donne une valuation de A au sens ci-dessus.

Soit I l'idéal de $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ définissant un sous-espace $X \subseteq (K^*)^n$. Posons $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/I$; c'est l'anneau des fonctions algébriques sur X .

Notons $\mathcal{W}(A/K)$ l'ensemble de toutes les valuations de A qui étendent la valuation ν de K . Parmi ces valuations il y a celles qui proviennent de l'évaluation en un point $x \in X(K)$: Notons ω_x la valuation de A qui à $f \in A$ associe $\nu(f(x)) \in \mathbf{R}$. Si l'on pense à K comme $k((t^G))$ avec k algébriquement clos et $G \subset \mathbf{R}$ divisible, comme plus haut, la considération de fonctions comme $f = x_i - \sum_{j=\nu(x_i)}^k a_j t^{\alpha_j} \in A$ permet de vérifier que $\omega_x = \omega_y$ implique $x = y$, et que nous avons donc un plongement naturel

$$\iota: X(K) \hookrightarrow \mathcal{W}(A/K).$$

Par ailleurs on peut, suivant Bieri-Groves (voir [3]), définir une application naturelle

$$\beta: \mathcal{W}(A/K) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

par $\beta(\omega) = (\omega(x_1), \dots, \omega(x_n))$.

Remarquons que la composition $\beta \circ \iota$ coïncide avec l'application $\nu: X(K) \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie plus haut. Cependant $\mathcal{W}(A/K)$ est un ensemble beaucoup plus gros que $X(K)$; Si $X = (K^*)^n$, donc $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ il contient en particulier les valuations suivantes, que nous retrouverons plus bas: Soit $w \in \mathbf{R}^n$; à tout élément $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ associons $\min_{\alpha} (\nu(a_{\alpha}) + \langle w, \alpha \rangle)$. C'est une valuation sur A , qui n'est pas de la forme ω_x . En effet si elle l'était, on aurait $w = (\nu(x_1), \dots, \nu(x_n))$, mais alors il est facile de fabriquer des binômes $f = x^m - \lambda x^n \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ tels que $\nu(\lambda) = \langle m, w \rangle - \langle n, w \rangle$ et que $w_x(f)$ soit plus grand que la valuation de chacun des deux termes.

Remarque 2.2. On peut aussi définir une valuation comme l'opposé d'une valuation définie comme ci-dessus, ce qui revient à remplacer la troisième condition par:

$$\nu(a + b) \leq \max(\nu(a), \nu(b)).$$

C'est le choix fait dans [8]. Cela évite l'apparition du signe moins dans la définition de l'amibe non archimédienne. J'ai préféré garder la définition classique des valuations.

3 POLYEDRES DE NEWTON

Essayons de décrire les amibes non archimédiennes de sous-espaces de $(K^*)^n$. Un terme unique $\lambda x^m = \lambda x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ de $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ définit l'ensemble vide dans $(K^*)^n$. L'équation la plus simple pour un sous espace algébrique non vide X de $(K^*)^n$ est un binôme

$$x^a - \lambda x^b = 0, \lambda \in K.$$

L'image par ν est contenue dans l'hyperplan de \mathbf{R}^n

$$\sum_{i=1}^n a_i \nu(x_i) = \sum_{i=1}^n b_i \nu(x_i) + \nu(\lambda).$$

Comme les valeurs de ν sont denses dans \mathbf{R} , on voit que l'adhérence de $\mathcal{T}(X)$ est l'hyperplan tout entier.

On peut avoir l'impression que connaître les amibes des binômes n'est pas un grand progrès, mais c'est ici qu'intervient la superbe remarque de Newton: si une somme de termes non nuls est nulle dans un corps valué, alors la valuation minimale des termes de la somme doit être atteinte au moins deux fois! C'est cela qui est à l'origine du caractère linéaire des amibes non-archimédiennes.

Commençons par le classique polyèdre de Newton.

Il faut commencer par se donner un réseau M dans $\check{\mathbf{R}}^n$ (pour des raisons de compatibilité de notation avec la section précédente, nous commençons dans un espace dual). On prend pour M le groupe multiplicatif des monômes de $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Le plus simple est donc de penser à un élément m de M comme à un monôme x^m . Nous noterons $\check{\mathbf{R}}^n$ le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Dans $\check{\mathbf{R}}^n$, notre réseau M apparaît comme le réseau des points entiers, c'est-à-dire à coordonnées entières. Nous aurons aussi à faire intervenir le réseau dual $N = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z})$ qui apparaît dans l'espace vectoriel dual \mathbf{R}^n comme le réseau des formes linéaires à coefficients entiers. Etant donné un polynôme de Laurent $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ on peut considérer l'ensemble $E(f) \subset \mathbf{Z}^n$ des exposants des monômes apparaissant dans f . On peut, comme on l'a vu plus haut, définir une valuation sur $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ au moyen d'une forme linéaire $w \in \mathbf{R}^n$ sur $\check{\mathbf{R}}^n$. Dans le cas où la valuation ν est nulle sur tous les coefficients a_α de f , par exemple si la valuation ν de K est triviale, cela donne

$$\nu_w\left(\sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha\right) = \min_{\alpha \in E} \langle w, \alpha \rangle.$$

On voit que le comportement de f vis à vis de toutes les valuations ν_w ne dépend que de l'enveloppe convexe dans $\check{\mathbf{R}}^n$ de l'ensemble E des exposants de f , ce qui est l'équivalent du fait que l'enveloppe convexe de E est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent. C'est cette enveloppe convexe Δ_f que l'on appelle le *polyèdre de Newton* de f , terminologie qui n'est pas vraiment compatible avec le polygône de Newton vu en dimension 2, qui est une frontière. C'est un polytope (=polyèdre convexe) compact à sommets entiers, ce que l'on appelle en Anglais un "Lattice polytope".

4 FONCTION D'APPUI ET TRANSFORMATION DE LEGENDRE

Soit $E \subset \check{\mathbf{R}}^n$ un sous-ensemble non vide. On peut définir la *fonction d'appui* de E par

$$H_E(w) = \inf_{x \in E} \langle w, x \rangle.$$

Son ensemble de définition est le sous-ensemble de l'espace dual \mathbf{R}^n constitué des formes linéaires dont les valeurs sur E sont bornées inférieurement. Si E est borné la fonction H_E est définie sur \mathbf{R}^n tout entier. Nous nous intéresserons au

cas où E est fermé dans \mathbf{R}^n et le minimum, lorsqu'il existe, est atteint. Note: La valuation ν_w que nous venons de voir est donc une fonction d'appui. Cette fonction est semi-continue supérieurement comme infimum de fonctions semi-continues supérieurement et est positivement homogène; on $H_E(\lambda w) = \lambda H_E(w)$ pour $\lambda > 0$. On dit aussi que c'est une *jauge*. De plus, elle est concave: elle satisfait l'inégalité

$$H_E(w + w') \geq H_E(w) + H_E(w').$$

Il en résulte que l'ensemble des w où elle est définie est un sous-ensemble convexe de \mathbf{R}^n .

Par ailleurs, rappelons qu'un demi-espace de $\check{\mathbf{R}}^n$ est l'ensemble des points de la forme $\{x | \langle w, x \rangle \geq c\}$ avec $w \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$. L'ensemble

$$\langle E \rangle = \{x \in \check{\mathbf{R}}^n | \langle w, x \rangle \geq H_E(w) \forall w \in \mathbf{R}^n\}$$

est l'intersection de tous les demi-espaces de $\check{\mathbf{R}}^n$ contenant E ; c'est donc le plus petit sous-ensemble convexe contenant E : l'enveloppe convexe de E . Cela vaut même si E n'est pas borné.

Ainsi:

La fonction d'appui d'un sous-ensemble de $\check{\mathbf{R}}^n$ détermine entièrement son enveloppe convexe et est entièrement déterminée par celle-ci.

Remarquons aussi que l'effet d'une translation sur E par un vecteur y de $\check{\mathbf{R}}^n$ est l'addition d'une forme linéaire:

$$H_{E+y}(w) = H_E(w) + \langle w, y \rangle,$$

et les formes linéaires sont les fonctions d'appui des points.

Plus généralement l'addition de Minkowski des convexes, définie par $E + F = \{x + y, x \in E, y \in F\}$ correspond à l'addition des fonctions d'appui. Notons que le polyèdre de Newton d'un produit est la somme de Minkowski des polyèdres de Newton des facteurs.

La fonction d'appui a été introduite par Minkowski; elle permet pour de nombreux problèmes de remplacer l'étude d'ensembles convexes de $\check{\mathbf{R}}^n$ par celle de fonctions sur \mathbf{R}^n .

Soit maintenant une fonction $x \mapsto f(x)$ définie sur un intervalle I de $\check{\mathbf{R}}$ que l'on suppose fermé. On suppose aussi que si I n'est pas borné $f(x)$ tend vers $+\infty$ avec $|x|$. Supposons que la fonction f est bornée inférieurement. Considérons le sous-ensemble (parfois appelé Epigraphe de f) $E(f) = \{(x, y) | x \in I, y \geq f(x)\}$ de $\check{\mathbf{R}}^2$. Supposons que cet épigraphe est fermé dans $\check{\mathbf{R}}^2$, ce qui équivaut à dire que la fonction f est semi-continue inférieurement, et étudions sa fonction d'appui $H_{E(f)}$. Celle-ci est définie dans le demi-espace $q \geq 0$ de l'espace \mathbf{R}^2 des formes linéaires $px + qy$ sur $\check{\mathbf{R}}^2$. En restriction à la droite $q = 1$, la fonction d'appui vaut:

$$H_{E(f)}|_{q=1} = \min_{(x,y)|y \geq f(x)}(px + y) = \min_x(px + f(x)) = -L_f(-p)$$

où $L_f(p) = \max_x(px - f(x))$ est la transformée de Legendre de la fonction $f(x)$. L'homogénéité de la fonction d'appui fait que la transformée de Legendre est une donnée équivalente à celle de la fonction d'appui de l'épigraphe de la fonction $f(x)$: c'est l'opposé de la restriction de cette fonction d'appui à la droite $q = 1$ évalué en $-p$.

C'est donc une fonction convexe puisque les fonctions d'appui sont concaves, qui est définie pour tout p si l'intervalle de définition de f est compact. La fonction $L_f(p)$ est bornée inférieurement puisque $L_f(p) \geq px - f(x)$ et elle est aussi semi-continue inférieurement puisque les fonctions d'appui sont semi-continues supérieurement. Si l'on calcule sa transformée de Legendre $L_{L_f}(x) = \max_p(xp - L_f(p))$ on trouve la fonction f^{conv} dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe de l'épigraphe $E(f)$ de f . Si la fonction f est convexe, la transformation de Legendre est une dualité: on a $L_{L_f} = f$. Utilisant le fait que le minimum, ou le maximum, par rapport à x est invariant par $x \mapsto -x$, on vérifie sans peine que $-L_f(-p)$ possède les mêmes propriétés.

L'interprétation au moyen de fonctions d'appui permet de définir une transformation de Legendre pour une "fonction" qui n'est définie que pour un ensemble fini de points: Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des points de \mathbf{R} et attribuons leur des valeurs réelles $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$. Considérons l'épigraphe généralisé $E(\alpha, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^k \{(\alpha_i, t_i) \mid t_i \geq \epsilon_i\} \subset \mathbf{R}^2$. Il définit une transformée de Legendre par restriction à $q = 1$ de sa fonction d'appui. La transformée de Legendre de cette transformée est la fonction convexe dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe de $E(\alpha, \epsilon)$.

Remarquons que lorsque P est un polytope, sa fonction d'appui est en fait l'infimum d'un nombre fini de formes linéaires correspondant à ses sommets. Lorsque P est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points entiers de \mathbf{R}^n , par exemple si P est un polyèdre de Newton, ces formes linéaires sont à coefficients entiers.

Dans le cas d'un polytope, la fonction H_P est donc convexe et linéaire par morceaux sur \mathbf{R}^n . On peut décrire les "morceaux" comme ceci: A chaque $w \in \mathbf{R}^n$ associons le sous-ensemble P_w du polyèdre de Newton tel que

$$u_0 \in P_w \Leftrightarrow \min_{u \in P} (\langle w, u \rangle) = w(u_0).$$

Géométriquement, lorsque c croît depuis $-\infty$, les hyperplans $w = c$ de $\tilde{\mathbf{R}}^n$ finissent par toucher P pour $c = H_P(w)$ et P_w est le lieu de contact, qui est une face du polytope P . Les régions de \mathbf{R}^n dans lesquelles H_P est linéaire sont des classes d'équivalence pour la relation $w \sim w' \Leftrightarrow P_w = P_{w'}$. Ce sont des cônes convexes polyédraux, qui sont rationnels si P est entier, dont la réunion est \mathbf{R}^n . L'intersection de deux de ces cônes est une face de chacun d'eux (leurs intérieurs sont disjoints) et chaque face d'un de ces cônes appartient à la collection. Ils forment ce que l'on appelle un *éventail* de \mathbf{R}^n . Il est facile de vérifier que la dimension de chaque cône est égale à la codimension dans $\tilde{\mathbf{R}}^n$ de la face qui lui correspond, et que la correspondance faces-cônes renverse les inclusions.

L'éventail ainsi construit est souvent appelé *éventail dual* du polyèdre P . C'est exactement le lieu des coins de la fonction d'appui du polytope.

Plus précisément, étant donné $w \in \mathbf{R}^n$, convenons de dire que l'hyperplan d'équation $w(m) = 0$ est *parallèle* à un hyperplan d'appui du polytope $P \subset \mathbf{R}^n$ le long de P' si un des hyperplans affines $w(m) = c$ contient la face P' et si P est alors contenu dans le demi-espace $w(m) - c \geq 0$. Le sous-ensemble $\sigma(P') = \{ \text{hyperplan d'appui le long de } P' \}$ est contenu dans le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n formé des hyperplans contenant P' et y est un cône convexe d'intérieur non vide.

L'application

$$P' \mapsto \sigma(P')$$

est une bijection de l'ensemble des faces de P sur l'ensemble des cônes de l'éventail dual de P . Cette bijection renverse les inclusions et on a $\dim(\sigma(P')) = n - \dim(P')$.

Cette correspondance s'appelle la dualité polytope-éventail.

Souvenons nous que:

La dualité polytope-éventail établit une bijection entre les sommets du polyèdre de Newton et les cônes de dimension n de l'éventail dual

Remarquons aussi que ces cônes de dimension n sont les adhérences des composantes connexes du complémentaire de la réunion des cônes de dimension $\leq n - 1$ de l'éventail.

Si le polytope P est entier, l'éventail est *rationnel*, ce qui signifie que les hyperplans délimitant les cônes de dimension n sont à coefficients rationnels (entiers si l'on veut) ou de manière équivalente que chacun des cônes de l'éventail est le cône positivement engendré par un nombre fini de vecteurs entiers, que l'on peut prendre primitifs, c'est à dire tels que leurs coordonnées soient premières entre elles. Nous verrons plus bas des éventails qui ne sont que "partiellement" rationnels.

Remarquons enfin que l'éventail ne détermine pas le polytope, même à translation près; en fait sa donnée équivaut à celle des *directions* des faces. Pour reconstituer le polytope il faut connaître les valeurs de la fonction d'appui, et pas seulement son lieu des coins.

La dualité donne une bijection

$$\{\text{convexes}\}/(\text{translation}) \leftrightarrow \{\text{jauges concaves}\}/(\text{addition d'une forme linéaire})$$

dans laquelle les polytopes (resp. polytopes entiers) à translation près (resp. à translation entière près) correspondent aux jauges linéaires sur les cônes d'un éventail (resp. d'un éventail rationnel) à une forme linéaire (resp. linéaire et entière) près.

Lorsque l'on part d'un polytope, par construction, *la réunion des cônes de dimension $n - 1$ de l'éventail est en effet le lieu des coins de la fonction H_P , ou encore son lieu de non-différentiabilité*; comme on l'a vu dans les exposés d'Ilya Itenberg, c'est aussi le lieu des coins du polynôme tropical associé à f ; c'est donc dans ce cas particulier où les coefficients du polynôme f sont de valuation nulle l'ensemble sous-jacent à la variété tropicale associée à f .

Nous allons définir ci-dessous cette variété tropicale sans faire l'hypothèse que les coefficients a_α de f sont de valuation nulle.

Faisons auparavant l'observation suivante:

Étant donné un polytope P , si nous nous proposons de construire sa fonction d'appui à une fonction linéaire près, nous avons besoin seulement des données suivantes:

Pour deux cônes de dimension n de l'éventail dual de P qui ont en commun une face F de dimension $n - 1$, et qui correspondent donc aux fonctions linéaires $\langle w, \alpha \rangle$ et $\langle w, \beta \rangle$ où α et β sont deux sommets de P liés par une arête $[\alpha\beta]$ dont le dual est la face commune des deux cônes, il faut se donner une orientation sur l'arête, qui détermine dans quel sens on traverse la face commune aux deux cônes, ou si l'on préfère une co-orientation de l'hyperplan support de cette face commune, c'est à dire un des deux demi-espaces qu'il définit. Disons que l'orientation va de α à β . On peut alors associer à cette face commune le vecteur $c_F = \beta - \alpha$ de \mathbf{R}^n . Cette construction fonctionne même si le polytope P n'est pas à sommets entiers ou si l'éventail n'est pas rationnel.

Si P est entier, on peut définir en outre le poids $e(\alpha, \beta)$ qui est la longueur entière du vecteur $\beta - \alpha$, c'est à dire l'entier positif tel que $\frac{\beta - \alpha}{e(\alpha, \beta)}$ soit un vecteur entier primitif. Si P n'est pas entier, on obtient encore un poids, qui n'est plus nécessairement entier.

Si maintenant on considère les faces $(F_i)_{i \in S}$ de codimension un ayant en commun une face G de codimension deux, elles correspondent par dualité à des arêtes de P formant le bord d'une face de dimension 2 de P . Choisir une orientation de ce bord donne des co-orientations cohérentes aux faces F_i et une relation, dite d'équilibre:

$$\sum_{i \in S} c_{F_i} = 0$$

qui correspond simplement au fait que la somme orientée des vecteurs $\beta_j - \alpha_j$ formant le bord d'une face de dimension 2 de P est nulle.

Il faut remarquer aussi que ces deux tels vecteurs, vus comme fonctions linéaires sur l'espace dual, coïncident sur l'intersection des deux hyperplans qui leur sont duaux. La donnée d'une application $F \mapsto c_F$ de l'ensemble des faces de codimension un de l'éventail vers les vecteurs de \mathbf{R}^N satisfaisant les relations d'équilibre permet de reconstruire la fonction d'appui à une fonction linéaire près: on fixe une fonction linéaire ℓ_0 dans l'un des cônes de dimension maximale, disons σ_0 , et on choisit pour toute face de codimension deux une orientation sur l'ensemble des faces de codimension un la contenant.

Cela fait, partant du cône choisi au départ, on ajoute à ℓ_0 , à chaque traversée d'une face commune F à σ_0 et à un cône de dimension n jouxtant σ_0 , la fonction linéaire $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ déterminée par le vecteur c_F . On continue ainsi pour les voisins des cônes jouxtant σ_0 , et on obtient ainsi des fonctions linéaires sur tous les cônes de dimension n qui coïncident sur les faces de dimension inférieure. La condition d'équilibre assure que la fonction obtenue dans un cône ne dépend pas du chemin suivi pour y arriver à partir de σ_0 .

Nous avons bien construit une fonction $H(\ell_0, \sigma_0)$ sur $\check{\mathbf{R}}^n$, linéaire sur chaque cône de l'éventail et déterminée par le choix de ℓ_0 sur σ_0 . Cette fonction est concave parce que au passage d'un cône à un cône adjacent elle se comporte

comme la fonction d'appui d'un segment, et la condition d'équilibre assure que cette propriété se globalise.

Si l'on remplace ℓ_0 par une autre fonction linéaire ℓ'_0 la fonction $H(\ell_0, \sigma_0)$ devient $H(\ell_0, \sigma_0) + \ell'_0 - \ell_0$ et si l'on choisit un autre cône σ'_0 la fonction $H(\ell_0, \sigma_0)$ est modifiée par l'addition de l'unique fonction linéaire sur \mathbf{R}^n qui sur σ'_0 coïncide avec $\ell_0 - H(\ell_0, \sigma_0)$.

Selon ce que nous avons vu plus haut, la donnée de la fonction d'appui à une fonction linéaire (resp. linéaire et entière) près équivaut à celle du polyèdre P à translation (resp. à translation entière) près.

Pour traiter le cas général, il faut généraliser la fonction d'appui et la notion d'éventail.

Ce qui généralise la fonction d'appui est la *tropicalisation* du polynôme $\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x]$, sur laquelle nous reviendrons plus tard, et ce qui généralise l'éventail est un *ensemble polyédral rationnel*, que nous allons définir maintenant et dont nous verrons qu'il est en fait très proche d'un éventail en dimension $n+1$.

5 COMPLEXES POLYEDRAUX RATIONNELS

Un sous-ensemble $T \subset \mathbf{R}^n$ est appelé *complexe polyédral rationnel* s'il peut être présenté comme réunion de de sous-ensembles fermés appelés cellules possédant les propriétés suivantes:

1. Chaque cellule est un polyèdre convexe fermé dans \mathbf{R}^n (non nécessairement borné). Sa dimension est par convention celle de son enveloppe affine.
2. L'enveloppe affine de chaque cellule est de pente rationnelle (l'espace vectoriel qui lui est parallèle est rationnel: son équation est à coefficients rationnels).
3. la frontière (dans son enveloppe affine) de chaque cellule de dimension k est une union de cellules de dimension $k - 1$.
4. Les intérieurs (dans leur enveloppe affine) des cellules sont disjoints.

Remarquons que les cônes d'un éventail rationnel de dimension n constituent un complexe polyédral rationnel.

Un *poids* sur un complexe polyédral est la donnée d'un entier naturel $e(F)$ pour chaque cellule F de dimension $n-1$. Si nous nous sommes donnés un poids, nous pouvons attacher à chaque cellule F de dimension $n-1$ une application

$$\pm c_F: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$$

définie au signe près par les propriétés suivantes:

1. Le noyau de c_F est parallèle à F ,
2. $\frac{1}{e(F)} c_F: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$ est un covecteur entier primitif.

Lorsque $n = 2$ le poids $e(F)$ est la longueur entière qui apparaît dans les exposés d'Erwan Brugallé et Ilia Itenberg.

Si l'on choisit une co-orientation de F , c'est à dire un des deux demi-espaces déterminés par son enveloppe affine, on peut fixer le choix du signe de c_F en demandant que le demi-espace $c_F > 0$ rencontre le demi-espace choisi. On dira enfin qu'un complexe polyédral rationnel est *équilibré* si la condition suivante est réalisée:

Soit G une cellule de dimension $n-2$ et soient F_1, \dots, F_s les cellules de dimension $n-1$ qui lui sont adjacentes. Un choix d'orientation autour de G détermine des co-orientations cohérentes des F_j , donc les signes des c_{F_j} . La condition d'équilibre est alors:

$$\sum_{j=1}^s c_{F_j} = 0,$$

et on remarque qu'elle est indépendante du choix de l'orientation autour de G .

Exemple fondamental Soient E un sous-ensemble fini du réseau entier $M \subset \check{\mathbf{R}}^n$ et ν une application de E dans \mathbf{R} . Par exemple on peut et doit penser à un polynôme non nul $\sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$ et à l'application $\alpha \mapsto \nu(a_\alpha)$, que nous noterons parfois $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$.

Considérons la "transformée de Legendre" de ν (en fait, comme dans le cas des fonctions d'une variable, c'est l'opposé de la transformée de Legendre de ν évaluée en $-w$):

$$L_\nu: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}; \quad w \mapsto \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha))$$

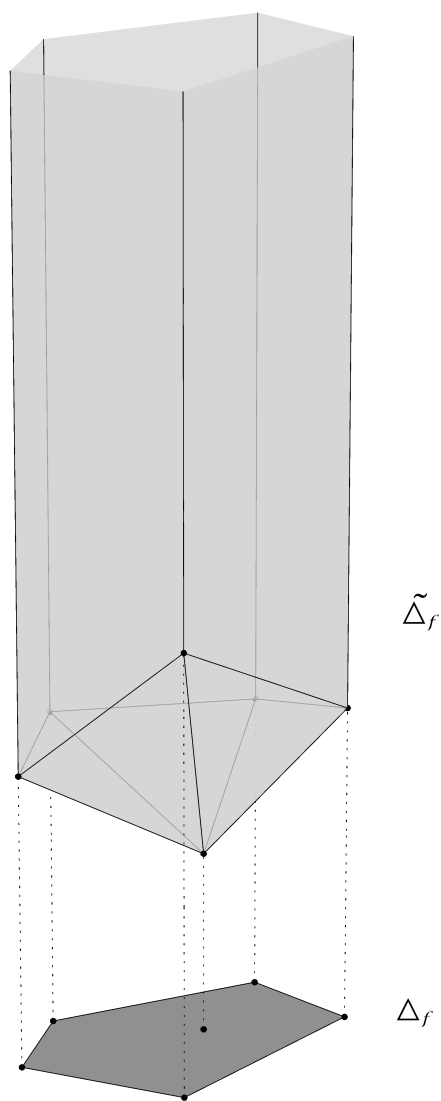
Dans le cas où (E, ν) provient d'un polynôme de Laurent non nul $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, cette fonction linéaire par morceaux est souvent appelée la *tropicalisation* de f et parfois notée $\text{Trop}(f)$ ou f^τ . C'est bien la tropicalisation au sens vu dans les exposés de Brugallé et Itenberg.

Proposition 5.1. (voir [4], Th. 2.1.1) *Le lieu des coins, ou lieu de non-lissité $\Sigma(E, \nu)$, de la fonction L_ν est un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré, qui est vide si f est un monôme, et purement de dimension $n-1$ sinon.*

Remarquons que si ν est la restriction à E d'une fonction linéaire sur $\check{\mathbf{R}}^n$, alors le lieu des coins de L_ν est à translation près la réunion des cônes de dimension $\leq n-1$ de l'éventail associé à l'enveloppe convexe Δ de E .

Donnons ici une première idée de la démonstration, qui sera complétée plus bas dans la preuve de la Proposition 5.3: dans $\check{\mathbf{R}}^{n+1}$ on considère l'enveloppe convexe $\tilde{\Delta}_\nu$ de l'ensemble $\tilde{E}_\nu = \{(\alpha, z) \in \check{\mathbf{R}}^n \times \check{\mathbf{R}}, \alpha \in E, z \geq \nu(\alpha)\}$ (une sorte d'épigraphe de la fonction ν); c'est un ensemble convexe qui n'a qu'un nombre fini de faces compactes.

En voici un schéma, aimablement créé en Mathematica par Maryvonne Teissier:



Les projections dans $\tilde{\mathbf{R}}^n$ de ces faces déterminent une subdivision de l'enveloppe convexe Δ de E par des polytopes entiers Δ_s . La frontière inférieure de $\tilde{\Delta}_\nu$ est le graphe d'une fonction convexe sur Δ qui a même transformée de Legendre que ν et est linéaire sur chaque Δ_s . Comme nous le verrons plus bas, cela permet de déterminer le lieu des coins de L_ν et de vérifier que c'est bien un complexe polyédral rationnel, puisque les Δ_s sont des polytopes entiers.

De plus on peut attribuer un poids à chaque face F de dimension $n - 1$ de $\Sigma(E, \nu)$ en se souvenant qu'elle est définie comme coin entre deux fonctions affines dont la différence est à coefficients entiers; on choisit cette différence pour covecteur c_F , et pour poids l'entier $e(F)$ tel que $\frac{1}{e(F)}c_F$ soit primitif. Alors: Avec ces données, $\Sigma(E, \nu)$ est un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré. C'est cela qu'on appelle aujourd'hui une "variété tropicale", en fait ici une hypersurface tropicale. Ce complexe ne dépend que de la fonction linéaire par morceaux L_ν , qui elle même ne dépend que des valuations des coefficients du polynôme. Dans le cas de la dimension un, on retrouve ce qu'ont défini Brugallé et Itenberg.

L'intérêt de ces données supplémentaires est que inversement, comme nous le verrons plus bas, étant donné un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré, il détermine un polytope entier Δ unique à translation près, et une fonction ν qui n'est pas entièrement déterminée mais dont la transformée de Legendre est déterminée à une constante près. En d'autres termes, étant donnée une hypersurface tropicale pondérée équilibrée on trouve ainsi toute une famille de polynômes dont la tropicalisation est cette hypersurface, mais avec une ambiguïté contrôlée. Ceci est essentiellement le contenu de la Proposition 2.4 de [12], auquel on renvoie pour plus de détails.

Cette détermination du polyèdre de Newton et de la fonction ν à équivalence de transformées de Legendre près donne un sens précis à ce que j'appelais "géométrie de l'équation" dans l'introduction.

En effet un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré détermine une classe de polynômes ayant tous même polyèdre de Newton (à translation entière près) et dont les valuations des coefficients sont assez bien connues, au moins dans leurs positions relatives, et on peut appeler cela une "classe géométrique" de polynômes. Notons qu'une translation entière du polyèdre de Newton correspond à la multiplication du polynôme f par un monôme en x_1, \dots, x_n , qui ne change pas le lieu des zéros dans $(K^*)^n$, et que de même une translation de $\tilde{\Delta}_f$ dans la direction verticale correspond à la multiplication du polynôme f par une puissance de t , qui n'affecte pas non plus les solutions dans $(K^*)^n$.

Avant de pouvoir énoncer le résultat principal, il nous faut définir la *forme initiale* d'un polynôme $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ par rapport à un "poids" $w \in \mathbf{R}^n$. C'est la somme des termes de plus petit "poids total" $L(w) = \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha))$, c'est à dire

$$\text{in}_w(f) = \sum_{\alpha \in E / \langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha) = L(w)} a_\alpha x^\alpha.$$

Théorème 5.2. (Voir [4], [9], [11], [12], [16], [20]) Soit K un corps algébriquement clos complet pour une valuation ν à valeurs réelles. Soit $X \subset (K^*)^n$ une hypersurface définie par un polynôme de Laurent $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$ avec $a_\alpha \in K$. Posons $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/(f)$. Alors:

A) Les sous-ensembles suivants de \mathbf{R}^n coïncident:

1. L'adhérence de $\nu(X)$ dans \mathbf{R}^n .
2. L'ensemble des $w \in \mathbf{R}^n$ tels que $\text{in}_w(f)$ ne se réduise pas à un monôme.
3. Le lieu des coins de la fonction $w \mapsto \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(a_\alpha))$
4. Dans le cas où X est irréductible, l'image de l'application $\beta: \mathcal{W}(A/K) \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie dans la section précédente.

B) L'ensemble $\mathcal{T}(X)$ ainsi défini est un complexe polyédral rationnel de dimension $n - 1$.

De plus:

Proposition 5.3. A) L'ensemble $\mathcal{T}(X)$ est l'intersection avec $\mathbf{R}^n \times \{1\}$ de la réunion des cônes de dimension $\leq n$ de l'éventail $\tilde{\Sigma}_\nu$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dual du polyèdre $\tilde{\Delta}_\nu$ défini plus haut.

B) La donnée d'une pondération équilibrée de l'ensemble $\mathcal{T}(X)$ équivaut à la donnée d'une jauge sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ qui est concave, linéaire dans chacun des cônes de $\tilde{\Sigma}_\nu$ et définie à une forme linéaire près dont les coefficients dans $\check{\mathbf{R}}^n$ sont entiers. Cette donnée équivaut aussi à la donnée d'un polyèdre de la forme $\tilde{\Delta}_f$ qui est bien défini modulo une translation de $\check{\mathbf{R}}^n \times \check{\mathbf{R}}$ dont la projection dans $\check{\mathbf{R}}^n$ appartient au réseau entier.

Donnons maintenant quelques indications de démonstration.

Puisque le lieu des coins est fermé, pour prouver que $\nu(X)$ est contenu dans l'ensemble du 2) il suffit de prouver que tout point de $\nu(X)$ est dans cet ensemble. Soit donc $x \in X$ tel que $w = \nu(x) = (\nu(x_1), \dots, \nu(x_n))$ et $f(x) = 0$. Les termes de plus bas degré de la série $f(x)$ sont de la forme $\text{in}_w f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ où \bar{x}_i est la forme initiale de $x_i(t)$ par rapport à t . Ces termes doivent s'annuler identiquement, ce qui impose que $\text{in}_w f$ ne se réduise pas à un monôme. Cela montre aussi que w appartient à l'ensemble défini en 3). C'est la version moderne de l'idée de Newton. Le même argument démontre aussi que l'ensemble de 4) est contenu dans celui de 2).

L'inclusion inverse est un peu plus délicate (voir [16]): supposons que w appartient à l'intersection de l'ensemble de 2) avec $(\nu(K^*))^n \subset \mathbf{R}^n$, qui est dense dans cet ensemble puisque $\nu(K^*)$ est dense dans \mathbf{R} . La forme initiale $\text{in}_w f$ n'est pas un monôme mais peut avoir un monôme en facteur. Divisons par ce facteur éventuel et choisissons une variable, disons x_1 , qui apparaît effectivement dans le résultat qui, rappelons le, a au moins deux termes. Fixons pour $i \geq 2$ des $\bar{x}_i \in K^*$ de la forme $\xi_i t^{w_i}$, $\xi_i \in k$, ce qui est possible puisque $w_i \in \nu(K^*)$. Alors l'équation $\text{in}_w f(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$ est un polynôme en x_1 à coefficients dans K ayant au moins deux termes et dont le terme constant est non nul, au moins

après division par une puissance convenable de t . Puisque K est algébriquement clos, cette équation a une solution \bar{x}_1 dans K^* qui, par l'homogénéité de la forme initiale, a pour valuation w_1 . Si l'on choisit maintenant des séries $\tilde{x}_i \in K^*$ ayant \bar{x}_i pour forme initiale, le même argument appliqué à $f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ montre l'existence d'une solution $x_1 \in K^*$ dont la forme initiale est \bar{x}_1 , ce qui prouve que le point w est dans $\nu(X)$. La fin de la preuve du résultat concernant l'application β sort du cadre de cet exposé.

La partie B) du Théorème résulte de la Proposition 5.1 au prix d'une généralisation à notre cas pas entièrement rationnel de la construction de la fonction d'appui à partir d'une pondération, qui est laissée au lecteur après lecture de la preuve de la Proposition 5.3 ci-dessous.

Pour prouver la Proposition 5.3, on remarque que si $a_\alpha = \xi_\alpha t^{\epsilon_\alpha} + \dots$, avec $\xi_\alpha \in k^*$, la variété tropicale du polynôme $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$ est la même que celle du polynôme $\tilde{f} = \sum_{\alpha \in E} \xi_\alpha t^{\epsilon_\alpha} x^\alpha$. Mais on peut considérer ce dernier comme un polynôme en x et t , à ceci près que les exposants de t ne sont pas entiers. Cependant, comme il a été expliqué plus haut on peut construire dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ le lieu des coins associé, qui est l'éventail dual du polyèdre $\tilde{\Delta}_f$. Le support de cet éventail est le demi-plan $w_{n+1} \geq 0$, où w_{n+1} est la coordonnée duale de l'exposant de t .

Nous avons vu plus haut que les cônes de dimension maximale $n + 1$ de cet éventail, c'est-à-dire les composantes connexes du complémentaire de la réunion $\tilde{\mathcal{T}}(X)$ des cônes de dimension $\leq n$, sont en bijection, par dualité, avec les sommets de $\tilde{\Delta}_f$. La variété tropicale de f est la partie de $\tilde{\mathcal{T}}(X)$ où le poids de t vaut 1, puisque nous ne l'autorisons pas à prendre une autre valeur. C'est donc bien l'intersection de l'éventail précédent avec l'hyperplan $w_{n+1} = 1$, qui préserve les composantes connexes puisque l'on intersecte des cônes convexes. Il reste à vérifier que l'intersection de cet éventail avec l'hyperplan $w_{n+1} = 1$ est bien un complexe polyédral rationnel: que ce soit un complexe polyédral résulte aussitôt des définitions. La rationalité résulte du fait que les projections dans \mathbf{R}^n des arêtes de $\tilde{\Delta}_f$, qui par dualité donnent les hyperplans de l'éventail, sont des droites rationnelles.

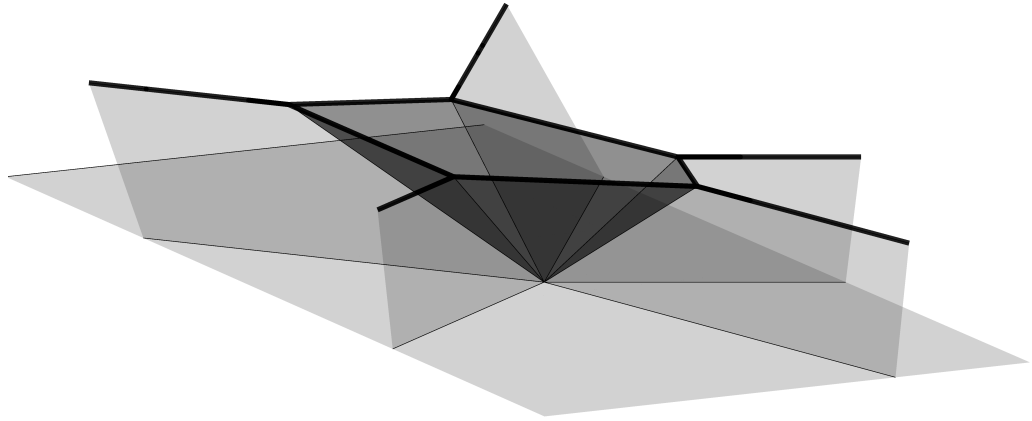
En effet cela implique que l'hyperplan de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dual de cette arête joignant par exemple (p, ϵ_p) et (q, ϵ_q) avec $p, q \in \mathbf{Z}^n$ a pour équation

$$\sum_{i=1}^n w_i(p_i - q_i) + w_{n+1}(\epsilon_p - \epsilon_q) = 0.$$

Sa non-rationalité éventuelle provient du coefficient $\epsilon_p - \epsilon_q$. Lorsque l'on fait $w_{n+1} = 1$ ce coefficient devient un terme constant et il reste bien un hyperplan à pente rationnelle. Enfin, on peut remarquer que les composantes connexes compactes du complémentaire de $\mathcal{T}(X)$ correspondent aux sommets de \tilde{N}_f qui se projettent à l'intérieur du polyèdre de Newton Δ_f de f . En effet, ces composantes non compactes correspondent aux cônes de l'éventail dual de $\tilde{\Delta}_f$ qui rencontrent l'hyperplan $w_{n+1} = 0$. Par dualité, ce sont ceux qui contiennent un point correspondant à un hyperplan de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dont l'équation est indépendante

de t . Un tel hyperplan "vertical" touche $\tilde{\Delta}_f$ en un point qui se projette sur la frontière de Δ_f . \square

Retenons que en particulier *une hypersurface tropicale est l'intersection avec l'hyperplan $w_{n+1} = 1$ de la réunion des cônes de dimension $\leq n$ d'un éventail de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ayant pour support $w_{n+1} \geq 0$ et ayant exactement les propriétés de rationalité qui font que cette intersection est un complexe polyédral **rational**.*



Le schéma précédent, aussi créé en Mathematica par Maryvonne Teissier, illustre la Proposition 5.3 et représente une partie de l'éventail dual de $\tilde{\Delta}_f$ et de l'ensemble sous-jacent à l'hypersurface tropicale correspondant au polyèdre $\tilde{\Delta}_f$ du schéma précédent. Les 5 sommets de la cellule compacte correspondent aux vecteurs duaux pour la dualité convexe (ou si l'on préfère aux vecteurs normaux rentrants) aux faces compactes du bord de $\tilde{\Delta}_f$. Notez que la plupart des dessins apparaissant dans les exposés de Brugallé et Itenberg correspondent au cas où Δ_f est un simplexe standard, et par conséquent l'hypersurface tropicale n'a que trois directions asymptotiques, correspondant aux normales aux côtés du simplexe.

L'hypersurface tropicale est donc bien la variante de l'éventail dual où la lettre t joue un rôle particulier de deux manières: d'une part on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe lorsque t devient arbitrairement petit, ce que reflète la construction de $\tilde{\Delta}_f$, et d'autre part t est un paramètre et non une variable, ce qui fait que l'on ne peut varier son poids; c'est ce qu'exprime la condition $w_{n+1} = 1$.

De plus les poids sur l'hypersurface tropicale sont la donnée nécessaire pour reconstruire à une forme linéaire -dont tous les coefficients sauf peut-être celui de w_{n+1} sont entiers- près la fonction d'appui de l'épigraphe de l'application $\Delta_f \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\alpha \mapsto \nu(a_\alpha)$.

Il faut ajouter qu'étendre tout ce qui précède au cas où X est un sous-espace de $(K^*)^n$ de codimension > 1 défini par un idéal I de $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ est un sujet de recherche actif. Il est établi que la variété tropicale $\mathcal{T}(X)$ est un complexe polyédral rationnel de dimension égale à celle de X et qu'il est l'intersection d'hypersurfaces tropicales correspondant à un système fini de générateurs de I . Ce système n'est pas du tout unique, mais il doit satisfaire des conditions assez fortes. En particulier il ne suffit même pas que *pour tout* w les w -formes initiales de ces générateurs engendrent l'idéal des w -formes initiales de tous les éléments de I . Je renvoie à [19] et [1] pour des précisions.

6 Un peu d'analyse

Il y a une jolie interprétation des composantes connexes de $\mathbf{R}^n - \mathcal{T}(X)$, qui est la version non-archimédienne due à Kapranov d'un résultat de Passare dans le cas des amibes complexes, répondant à une question de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski: Notons toujours $\nu: (K^*)^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'application valuation. Alors pour chaque composante connexe U de $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$, $\nu^{-1}(U)$ est le domaine de convergence d'une série représentant $\frac{1}{f}$ et qui s'écrit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha_s} x^{-\alpha_s} \left(1 + \sum_{\beta} b_{\beta} x^{\beta} \right)$$

où α_s est le sommet de $\tilde{\Delta}_f$ correspondant à la composante connexe U . Les raisons de convergence sont différentes selon que U est une composante compacte ou pas.

Etant donnée une série de Laurent

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} b_\alpha x^\alpha \in K((x_1, \dots, x_n))$$

nous dirons qu'elle converge en $x \in (K^*)^n$ si, posant $w = \nu(x) \in \mathbf{R}^n$, pour tout nombre réel $A > 0$ l'ensemble des α tels que $\nu(b_\alpha) + \langle w, \alpha \rangle \leq A$ est fini. En d'autres termes la valuation de $b_\alpha x^\alpha$ tend vers l'infini (sa valeur absolue tend vers 0) lorsque $|\alpha|$ tend vers l'infini.

Si $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ définit une hypersurface $X \subset (K^*)^n$ et si $w_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$, le minimum $\langle w_0, \alpha \rangle + \nu(a_\alpha)$ est atteint une seule fois, disons en α_0 et l'on peut écrire

$$f = a_{\alpha_0} x^{\alpha_0} \left(1 + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha_0}} x^{\alpha - \alpha_0} \right), \quad a_{\alpha_0} \in K^*$$

avec $\nu\left(\frac{a_\alpha}{a_{\alpha_0}}\right) + \langle w_0, \alpha - \alpha_0 \rangle > 0$. Posant $h = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha_0}} x^{\alpha - \alpha_0}$, on voit que l'on peut écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{x^{-\alpha_0}}{a_{\alpha_0}} (1 + h + \dots + (-1)^j h^j + \dots)$$

et la construction montre clairement que cette dernière série converge tant que w_0 reste dans la même composante connexe de $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$ et cesse de converger lorsque w_0 atteint $\mathcal{T}(X)$.

7 Amibes non archimédiennes et amibes classiques

Le but de cette section est de comparer l'amibe non archimédienne d'un polynôme

$$f(v; x) = \sum_{\alpha} a_\alpha(v) x^\alpha \in \mathbf{C}[v][x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}],$$

et en particulier celle d'un polynôme de Viro (ou polynôme de patchworking)

$$\sum_{\alpha} d_\alpha v^{\nu(\alpha)} x^\alpha \in \mathbf{C}((v^{\mathbf{Q}}))[x_1, \dots, x_n], \quad d_\alpha \in \mathbf{C},$$

puisque si $\nu(\alpha) \in \mathbf{Q}$ pour tout α , on se ramène facilement au cas d'un polynôme en v par un changement de variable $v \mapsto v^q$.

L'équation $f(v; x) = 0$ est ici considérée comme définissant une famille à un paramètre de variétés $X(v) \subset (\mathbf{C}^*)^n$ et on veut étudier la limite lorsque $|v|$ tend vers l'infini des amibes classiques, convenablement renormalisées, des fibres $X(v)$.

Pour définir l'amibe non archimédienne de $f(v; x)$, considérons l'injection $\mathbf{C}[v] \subset \mathbf{C}((t))$ déterminée par $v \mapsto \frac{1}{t}$. Elle nous permet de considérer $\mathbf{C}[v]$ comme un sous-anneau du corps valué algébriquement clos K des séries de Puiseux en t étudié dans la section 2 et donc de définir l'amibe non archimédienne de $f(v, x)$.

Rappelons ici que l'amibe classique d'une sous-variété $X \subset \mathbf{C}^n$ est l'image par l'application

$$\text{Log}: (\mathbf{C}^*)^n \rightarrow \mathbf{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \dots, \log|x_n|)$$

de l'intersection $X \cap (\mathbf{C}^*)^n$.

Dans le cas qui nous occupe, nous définissons la famille d'amibes complexes associées aux variétés $X(v)$ pour $v \neq 0$ par

$$\mathcal{A}_v(X(v)) = \text{Log}_{|v|}(X(v) \cap (\mathbf{C}^*)^n),$$

où $\text{Log}_{|v|}$ désigne l'application définie par le logarithme en base $|v|$ des modules des coordonnées.

Ceci revient à normaliser en faisant sur l'amibe complexe usuelle de $X(v)$ une homothétie de rapport $\frac{1}{\log|v|}$.

rappelons également la définition de la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles fermés A, B de \mathbf{R}^n :

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\},$$

où $d(a, B)$ est la distance euclidienne dans \mathbf{R}^n entre le point a et l'ensemble B .

Theorem 7.1. (Mikhalkin, [12], Cor. 6.4, Rullgård, [18]; voir aussi [8], Th. 1.4) *Lorsque $|v|$ tend vers l'infini, les amibes $\mathcal{A}_v(X(v))$ convergent pour la distance de Hausdorff vers l'amibe non archimédienne $\mathcal{A}(X) = -\mathcal{T}(X)$.*

Démonstration: Faisons le changement de variables indiqué au début de la section et considérons notre polynôme comme un élément de $K[x_1, \dots, x_n]$, que nous notons désormais $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t)x^{\alpha}$. Soit z un point de $X(t) = X(\frac{1}{v})$, et posons $u = \text{Log}_t(z) \in \mathbf{R}^n$. Posons par ailleurs, pour $t \neq 0$ et tout exposant α , $e_{\alpha}(t) = \log_{|t|}|a_{\alpha}(t)|$.

Alors pour tout exposant α_0 de notre polynôme, notant M le nombre des monômes en x apparaissant dans le polynôme f , le point $u \in \mathbf{R}^n$ satisfait pour tout $t \neq 0$ les inégalités:

$$e_{\alpha_0}(t) + \langle u, \alpha_0 \rangle \leq \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle u, \alpha \rangle) + \log_t M,$$

où α_0 parcourt les exposants de notre polynôme. En effet puisque $z \in X(t)$, on a pour tout α_0 l'égalité $a_{\alpha_0} z^{\alpha_0} = -\sum_{\alpha \neq \alpha_0} a_{\alpha} z^{\alpha}$, d'où l'inégalité $|a_{\alpha_0} z^{\alpha_0}| \leq M \max_{\alpha \neq \alpha_0} (|a_{\alpha} z^{\alpha}|)$, et le résultat en prenant le logarithme en base t .

Cela signifie que l'amibe renormalisée est contenue pour tout $t \neq 0$ dans la région de \mathbf{R}^n définie par les inégalités

$$(*) \quad e_{\alpha_0}(t) + \langle w, \alpha_0 \rangle \leq \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle w, \alpha \rangle) + \log_t M.$$

Souvenons nous maintenant que nous nous intéressons à l'image par l'application $\text{Log}_{|v|} = -\text{Log}_{|t|}$ et que l'amibe non archimédienne est l'adhérence de $-\nu(X)$,

ce qui nous incite à changer le signe de w . Si nous relisons ces inégalités sous la forme

$$-e_{\alpha_0}(t) + \langle -w, \alpha_0 \rangle \geq \min_{\alpha \neq \alpha_0} (-e_{\alpha}(t) + \langle -w, \alpha \rangle) - \log_t M,$$

nous voyons qu'à la limite lorsque t tend vers 0 nous obtenons un système d'inégalités qui est satisfait par $-w$ si et seulement si $-w \in \mathcal{T}(X)$. La formule donnant la distance d'un point à un hyperplan, jointe au fait que lorsque t tend vers 0, par construction $e_{\alpha}(t)$ tend vers $\nu(c_{\alpha}(t))$, montre que cette région est un voisinage de notre amibe non archimédienne $-\mathcal{T}(X)$ dont tous les points sont à distance uniformément bornée de celle-ci, cette distance tendant vers 0 avec t . Cela implique que la limite des amibes complexes normalisées $\mathcal{A}(t)$ existe et est contenue dans $-\mathcal{T}(X)$.

Pour montrer que la limite est toute l'amibe non-archimédienne, il suffit de montrer qu'un ensemble dense de points de celle-ci peut être obtenue comme limite de points des amibes complexes renormalisées. Or par construction les images par l'application ν des solutions de $f(t; x) = 0$ sont denses dans $\mathcal{T}(X)$. Soit donc $(-\rho_1, \dots, -\rho_n)$ un tel point de $\mathcal{T}(X)$. Cela signifie qu'il existe des séries de Puiseux convergentes $x_i(t) = a_{\rho_i} t^{\rho_i} + \dots = a_{\rho_i} t^{\rho_i} (1 + s_i(t))$, où $s_i(t)$ est une série à exposants positifs s'annulant pour $t = 0$, qui sont solutions de $f(t; x) = 0$. L'image par $\text{Log}_{|v|}$ du point de coordonnées $x_i(t)$ est donc un point de l'amibe complexe renormalisée. Or les coordonnées de cette image sont de la forme $-\rho_i + \log_{|v|} |a_{\rho_i}| + \log_{|v|} |1 + s_i(\frac{1}{v})|$ et tendent vers $-\rho_i$ lorsque $|v|$ tend vers $+\infty$ puisque les termes dont on prend le logarithme sont bornés. \square

On peut maintenant comme Mikhalkin dans [12] remarquer que chaque composante connexe du complémentaire de l'ensemble défini par les inégalités (*) est définie par une inégalité

$$e_{\alpha_0}(t) + \langle w, \alpha_0 \rangle > \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle w, \alpha \rangle) + \log_t M.$$

C'est un ensemble convexe, et chaque composant connexe du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_v(X(v))$ est contenue dans une telle composante. En s'appuyant sur les résultats de Forsberg, Passare et Tsikh ([7]), on peut montrer que deux composantes connexes distinctes du complémentaire de $\mathcal{A}_v(X(v))$ appartiennent à des composantes différentes du complémentaire de l'ensemble défini par (*) et donc finalement à deux composantes connexes différentes du complémentaire de l'amibe non archimédienne, correspondant à deux sommets distincts de $\tilde{\Delta}_f$. Il y a donc aussi une bijection entre les composantes connexes du complémentaire de l'amibe classique et les sommets de $\tilde{\Delta}_f$. Je renvoie à la première partie de [11] pour un exposé de la vision analytique des travaux de Passare, Ronkin, et Rullgård.

Il serait d'ailleurs intéressant de déterminer s'il est possible de définir des fonctions sur les amibes complexes normalisées, dans l'esprit de ces travaux ou ressemblant par exemple à des fonctions de la courbure du bord, et convergeant lorsque v tend vers l'infini vers les poids des faces de dimension $n - 1$ de l'hypersurface tropicale.

Cela préciserait le lien entre celle-ci et la géométrie de X . que manifeste le résultat précédent. Par ailleurs Mikhalkin ([12], section 5) a donné une méthode de reconstruction sous certaines hypothèses et à difféomorphisme près d'une hypersurface projective à partir de l'hypersurface tropicale associée.

References

- [1] T. Bogart, A. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, R. Thomas, *Computing tropical varieties*, Journal of Symbolic Computation 42 (2007) 54-73.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] R. Bieri, J.R.J. Groves, *The geometry of the set of characters induced by valuations*, J. Reine Angew. Math., 347, (1984), 168-195.
- [4] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind, *Non-Archimedean amoebas and Tropical varieties*, Lecture Notes in Math 1853, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [5] C. Favre and M. Jonsson, *The valuative tree*, Lecture Notes in Math 1853, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [6] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canadian J. Math. 1, (1949). 73-77.
- [7] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas*, Adv. Math, **151**, (2000), 45-70.
- [8] Itenberg, Ilia; G. Mikhalkin, Grigory; Shustin, Eugenii, *Tropical algebraic geometry*. Oberwolfach Seminars, 35. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. viii+103 pp.
- [9] A. N. Jensen, H. Markwig, T. Markwig, *An algorithm for lifting points in a tropical variety*, Collect. Math. 59 (2008), 129-165, e-print arXiv:0705.2441 (longer version).
- [10] K. Kedlaya, *The algebraic closure of the power series field in positive characteristic*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 363 - 395.
- [11] Mikhalkin, Grigory *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*. in: Different faces of geometry, 257-300, Int. Math. Ser. (N. Y.), 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- [12] G. Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, Topology. 43 (2004), No. 12, 3461 - 3470.
- [13] J-J. Moreau, *Etude locale d'une fonctionnelle convexe*, Universit de Montpellier, Montpellier 1963 25 pp.

- [14] S. MacLane and O. Schilling, *Zero-dimensional branches of rank 1 on algebraic varieties*, Annals of Math. 40 (1939), 507 - 520.
- [15] B.H. Neumann, *On ordered division rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949), 202-252.
- [16] S. Payne, *Fibers of tropicalization*, arXiv math.AG 07051732.
- [17] P. Ribenboim, *Fields: Algebraically closed and others*, Manuscripta Math.,75, (1992) 115-150.
- [18] H. Rullgård, *Polynomial amoebas and convexity*, Prépublication, Université de Stockholm, 2001.
- [19] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, *First steps in tropical Geometry*, in: Idempotent mathematics and mathematical physics, 289–317, Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [20] D. Speyer, B. Sturmfels, *The tropical Grassmannian*. Adv. Geom. 4 (2004), no. 3, 389–411.
- [21] B. Teissier, *Valuations, deformations, and toric geometry*, Proceedings of the Saskatoon Conference and Workshop on valuation theory (second volume), F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall, editors, Fields Institute Communications, 33, 2003, 361 - 459.
- [22] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra Volume II*, D. Van Nostrand, Princeton, 1960.