

Variétés polaires

I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces

B. Teissier

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S.,
Route de Saclay, F-91128 Palaiseau, France

*«Dans l'éclatement de l'univers que nous éprouvons,
Prodige ! les morceaux qui s'abattent sont vivants.»*

René Char. Les Matinaux

Introduction

On trouvera ici un premier aperçu sur certains invariants discrets des singularités analytiques complexes, invariants dont la totalité se laisse représenter par un «grand polygone de Newton» (cf. § 6) que l'on peut associer à chaque singularité. [Mais qui, pour une courbe plane, n'est pas du tout son polygone de Newton au sens usuel.]

Bien que la raison originelle d'introduire ces invariants soit technique (cf. théorème 4 ci-dessous), il s'est avéré a posteriori que certains d'entre eux apparaissent de façon très naturelle dans divers problèmes et en particulier, pour une singularité isolée d'hypersurface $f(z_0, \dots, z_n) = 0$, on peut lire sur le polygone de Newton mentionné ci-dessus les taux d'évanescence des différents points critiques quadratiques d'une morsification $t = f + a z_0$ générique de f , en fonction du paramètre de morsification a . On peut aussi lire sur ce polygone le plus petit entier N tel que toute fonction g dont le développement de Taylor ne diffère de celui de f que par des termes d'ordre $\geq N + 1$ soit topologiquement (ou équisingulièrement) équivalente à f (cf. théorème 8 ci-dessous) et on peut encore y lire divers exposants de Łojasiewicz, ainsi que la suite μ^* des nombres de Milnor des sections planes génériques de notre hypersurface. Par ailleurs, d'une part ce «grand polygone de Newton» est un invariant d'équisingularité (cf. théorème 6') et d'autre part, on dispose de premiers indices sur la façon dont il décrit la géométrie de la singularité; on peut par exemple caractériser en termes de ce polygone les singularités isolées d'hypersurfaces équivalentes (pour une certaine relation d'équisingularité) à des singularités du type de Pham-Brieskorn: $z_0^{N_0+1} + \dots + z_n^{N_n+1} = 0$. Enfin, ce polygone est très «calculable».

La construction est ici entièrement présentée dans le cas particulier des singu-

larités isolées d'hypersurfaces, qui est plus simple de ce point de vue et permet déjà de présenter les idées principales. Dans un prochain travail j'étendrai la théorie au cas général et là, les variétés polaires autres que les courbes joueront leur vrai rôle.

Je ne parle pas ici de la filtration de l'homologie évanescence relative décrite, comme il est expliqué dans [I.E.P.] 3.6.4, par les invariants $\{e_q/m_q\}$ étudiés ici. J'espère revenir sur ce sujet et renvoie le lecteur, en attendant, à [I.E.P.] ou, pour le lien avec la monodromie, à [L] après avoir lu le théorème 6'' ci-dessous. Sauf pour la terminologie, je n'utilise d'ailleurs pas ici l'identité constatée par Lê Dũng Tráng et moi entre la courbe Γ qui me servait d'intermédiaire essentiel de calcul dans [C.E.W.] chap. II, § 1, et la courbe polaire, dont l'usage était prôné par Thom dans l'étude de la monodromie relative. Mon but ici, comme dans [C.E.W.], est la construction algébrique d'invariants de la géométrie «à équisingularité près», et non d'invariants de nature topologique ou cohomologique. Bien sûr, le lien entre les deux points de vue présenterait un grand intérêt, et en particulier un lien précis entre les invariants introduits ici et la monodromie; de plus, cette étude algébrique s'est trouvée fort encouragée par son raccord avec le point de vue de Thom, et de nombreuses discussions avec lui. Je l'en remercie beaucoup.

Je remercie vivement Michel Merle dont le beau résultat pour les courbes planes, cité au § 5, m'a conforté dans mon optimisme concernant l'intérêt des $\{e_q/m_q\}$. D'ailleurs, ce résultat, joint au théorème 9 ci-dessous, montre comment l'on peut, à partir du polygone de Newton d'une section plane générique du discriminant de la déformation miniverselle d'un germe de courbe plane irréductible, reconstruire explicitement la courbe à équisingularité près: si l'on veut, c'est un exemple de «reconstruction du centre organisateur» au sens de la théorie des catastrophes de Thom (voir [T] et [T₄]).

Une partie de ce travail a été effectuée à Harvard en Avril et Septembre 1974, avec l'aide du NSF GP 362-69.

§ 1. Introduction des invariants (e_q, m_q)

Soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0, f \in \mathcal{O}_{n+1} \simeq \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$, une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Soit U un voisinage de 0 assez petit pour que f converge, et que je me permettrai de plus de rétrécir arbitrairement plus bas, et enfin soit $\pi: Z \rightarrow U$ l'éclatement de l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \cdot \mathcal{O}_U$, idéal qui sera noté $\mathcal{J}(f)$.

La description de Z comme adhérence dans $U \times \mathbb{P}^n$ du graphe du morphisme $U - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ défini par $(z_0, \dots, z_n) \rightsquigarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} : \dots : \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$ [qui est bien défini hors de 0 parce que $f=0$ est à singularité isolée] nous fournit un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^n \\ \pi \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

où G est la restriction à Z de la projection $U \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$. J'appellerai G le *morphisme de Gauss* associé à f .

1.1. *Proposition-définition.* Pour tout entier $1 \leq i \leq n$ et tout i -plan $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, considérons l'ensemble F_H des points de \mathbb{P}^n correspondant à des hyperplans de \mathbb{C}^{n+1} contenant H ; F_H est un sous-espace linéaire de dimension $n-i$ de \mathbb{P}^n . Considérons d'autre part l'ensemble S_H^0 des points p de $U - \{0\}$ tels que l'hyperplan tangent en p à l'hypersurface de niveau de f passant par p , définie par $f(z) - f(p) = 0$, contienne (en direction) H , alors, on a, d'après la description ci-dessus :

$$\pi_*(G^{-1}(F_H)) = \bar{S}_H^0$$

(fermeture de S_H^0 dans U). Ce sous-espace analytique fermé de U sera appelé *variété polaire* associée à f et H , et noté S_H .

1.2. **Théorème 1.** *Pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe un ouvert de Zariski dense $V^{(i)}$ de la grassmannienne des i -plans de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ tel que si $H \in V^{(i)}$, S_H soit une intersection complète à singularité isolée, de dimension $\dim_0 S_H = n + 1 - i$, et de multiplicité à l'origine $m_0(S_H) = \mu^{(i)}$ où $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}(X_0, 0)$ est le nombre de Milnor de l'intersection de $(X_0, 0)$ avec un i -plan général de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. En fait, on a même, si $H \in V^{(i)}$: $\mu(X_0 \cap H) = m_0(S_H) = (S_H, H)_0 = \mu^{(i)}$, où $(\ , \)_0$ désigne la multiplicité d'intersection en 0.*

Preuve. La première assertion est une conséquence du théorème de Bertini; pour l'énoncé sur la multiplicité, voir [C. E. W.] chap. I, § 2, après avoir remarqué que la variété polaire relative à $H: z_0 = \dots = z_i = 0$ a pour équations :

$$\frac{\partial f}{\partial z_{i+1}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0.$$

1.3. Considérons maintenant la normalisation $n: \bar{Z} \rightarrow Z$ de Z , et soit $D \subset \bar{Z}$ le diviseur exceptionnel du morphisme composé («éclatement normalisé») $\bar{\pi}: \bar{Z} \xrightarrow{n} Z \xrightarrow{\pi} U$.

D est le sous-espace de \bar{Z} défini par l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ qui est inversible,

puisque'il est l'image réciproque par n de $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \cdot \mathcal{O}_Z$ qui est inversible par

la propriété fondamentale des éclatements. A chaque composante irréductible D_i de D est associée une fonction d'ordre v_{D_i} sur \mathcal{O}_{n+1} comme suit: étant donné $h \in \mathcal{O}_{n+1}$, $v_{D_i}(h)$ est l'ordre avec lequel s'annule $\bar{\pi}^*(h) = h \circ \bar{\pi}$ le long de D_i , au voisinage d'un point général de D_i . Ceci a un sens, puisqu'il existe, par les propriétés des diviseurs sur les espaces normaux, un ouvert analytique dense et connexe (puisque D_i est irréductible) de D_i en chaque point duquel $(D_i)_{\text{red}}$ et \bar{Z} sont lisses.

Pour un idéal I de \mathcal{O}_{n+1} on posera

$$v_{D_i}(I) = \min_{h \in I} v_{D_i}(h).$$

Par ailleurs, il existe un ouvert de Zariski dense W du \mathbb{P}^n des directions d'hyperplans de \mathbb{C}^{n+1} , tel que le nombre l des composantes irréductibles de la *courbe polaire* S_H soit indépendant de $H \in W$, et que de plus, écrivant la décomposition

de S_H en ses composantes irréductibles $S_H = \bigcup_{q=1}^l \Gamma_q$, la suite des multiplicités en 0, $(m_0(\Gamma_q); 1 \leq q \leq l)$ et la suite des multiplicités d'intersection $((\Gamma_q, X_0)_0; 1 \leq q \leq l)$ soient également indépendantes de $H \in W$. De plus, on a $(\Gamma_q, X_0)_0 \geq m_0(\Gamma_q)$, ce qui permet de définir des entiers positifs e_q et m_q par: $m_q = m_0(\Gamma_q)$, $e_q + m_q = (\Gamma_q, X_0)_0$. La preuve de toutes ces assertions se trouve en fait dans la démonstration du théorème 2 ci-dessous, mais en attendant, faisons l'importante:

1.4. *Remarque.* On a :

$$\sum_{q=1}^l e_q = \mu^{(n+1)}(X_0, 0),$$

$$\sum_{q=1}^l m_q = \mu^{(n)}(X_0, 0).$$

La preuve est fournie par le calcul de ([C.E.W.] chap. II, § 1, 1.2), et 1.2.

Le résultat qui explique l'ubiquité des $\left(\frac{e_q}{m_q}\right)$ dont nous parlerons plus bas est:

1.5. **Théorème 2.** *Pour un germe d'hypersurface à singularité isolée, avec les notations introduites en 1.3, on a: L'ensemble de couples d'entiers $\{(e_q, m_q)\}_{\text{red}}$ est égal à l'ensemble de couples d'entiers $\{(v_{D_i}(\mathcal{J}(f)), v_{D_i}(\mathcal{m}))\}_{\text{red}}$, où le suffixe red signifie que chaque couple d'entiers est écrit une seule fois, même si le calcul par composantes irréductibles le fournit plusieurs fois, $\mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \cdot \mathcal{O}_{n+1}$, et \mathcal{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O}_{n+1} .*

Démonstration. Le morphisme de Gauss G fait de Z une famille des courbes polaires, paramétrée par \mathbb{P}^n et au-dessus d'un ouvert de Zariski de \mathbb{P}^n , cette famille de courbes a une résolution simultanée, cf. $[T_1]$, fournie par $\bar{Z} \rightarrow Z$. Ceci montre que chaque composante irréductible d'une courbe polaire assez générale est l'image dans $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ d'un germe de courbe non singulière dans \bar{Z} , transverse au diviseur exceptionnel D , et passant par un point général d'une des composantes irréductibles de D , que l'on peut donc utiliser pour calculer v_{D_i} . Le théorème 2 se ramène alors à un calcul élémentaire.

1.6. **Corollaire 1.** *La suite $(e_q, m_q)_{\text{red}}$ ne dépend que de la fermeture intégrale de l'idéal $\mathcal{J}(f)$, et est donc invariant du type analytique de $(X_0, 0)$ (voir [C.E.W.], chap. I, 1.1). En effet, $\mathcal{J}(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}} = \overline{\mathcal{J}(f)} \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ (cf. [H]).*

1.7. **Corollaire 2.** *Le plus petit exposant θ_1 (resp. θ_2) tel qu'il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^{n+1} et une constante C_1 (resp. C_2) tels que l'on ait l'inégalité de Łojasiewicz $|\text{grad } f(z)| \geq C_1 |f(z)|^{\theta_1}$ (resp. $|\text{grad } f(z)| \geq C_2 |z|^{\theta_2}$) vaut $\theta_1 = \frac{\eta}{1+\eta}$, $\theta_2 = \eta$, où $\eta = \text{Sup} \left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\}$.*

Démonstration (cf. [L.T.]). Les inégalités sur U équivalent à des inégalités sur \bar{Z} puisque $\bar{\pi}$ est un morphisme propre. Or, \bar{Z} est un espace normal et $\mathcal{J}(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ est inversible; sur \bar{Z} dire que $|\text{grad } f \circ \bar{\pi}| \geq C |f \circ \bar{\pi}|^{p/q}$ se traduit par une inclusion $(f \circ \bar{\pi})^p \in (\mathcal{J}(f) \circ \bar{\pi})^q$ puisque sur \bar{Z} une fonction méromorphe bornée est holomorphe.

Ceci équivaut encore, puisque sur un espace normal le lieu polaire d'une fonction méromorphe est de codimension 1 ou vide, à dire que $p \cdot v_{D_i}(f) \geq q \cdot v_{D_i}(f')$ pour tout i , et l'on voit que $\frac{1}{\theta} = \frac{q}{p} = \min \left(\frac{v_{D_i}(f)}{v_{D_i}(f')} \right)$ donne le meilleur exposant θ possible, et donc $\theta_1 = \max \left(\frac{v_{D_i}(f)}{v_{D_i}(f')} \right) = \max \left(\frac{e_q}{e_q + m_q} \right) = \frac{\eta}{\eta + 1}$ d'après le théorème 2. On procède de même pour θ_2 . [Le fait que $v_{D_i}(f) = v_{D_i}(m) + v_{D_i}(f')$ résulte du calcul fait en [C.E.W.], chap. II, 1.2 et de l'argument démontrant le théorème 2.]

§ 2. Les (e_q, m_q) et l'opération de Thom-Sebastiani

Soient $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ et $g(w_0, \dots, w_m) = 0$ des équations pour deux germes d'hypersurfaces à singularité isolée $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et $(X_1, 0) \subset (\mathbb{C}^{m+1}, 0)$. Il importe de remarquer que le type analytique de l'hypersurface de $(\mathbb{C}^{m+n+2}, 0)$ définie par $f(z_0, \dots, z_n) + g(w_0, \dots, w_m) = 0$ (addition de Thom-Sebastiani) ne dépend pas seulement du type analytique de $(X_0, 0)$ et de $(X_1, 0)$, mais dépend en général du choix des équations f et g , i.e. du choix du générateur de l'idéal définissant $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et $(X_1, 0) \subset (\mathbb{C}^{m+1}, 0)$. En effet, si f n'est pas quasi-homogène, soit $U(z_0, \dots, z_n)$ une unité; l'hypersurface $U(z)f(z) + g(w) = 0$ ne sera pas en général analytiquement isomorphe à $f(z) + g(w) = 0$ au voisinage de 0. Cependant, j'ai introduit dans [I.E.P.] une relation d'équivalence sur l'ensemble des germes d'hypersurfaces:

Définition. $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et $(X'_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ sont (c)-cosécantes si il existe une famille à un paramètre de germes d'hypersurfaces dont une fibre est isomorphe à $(X_0, 0)$, une autre fibre est isomorphe à $(X'_0, 0)$ et qui satisfait en chaque point la condition (c) que voici: une famille de germes d'hypersurfaces $X \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1}$, définie par $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ où on suppose que les singularités parcourent $\mathbb{D} \times \{0\}$, i.e. $F(0, 0, t) \equiv 0$, $\frac{\partial F}{\partial z_i}(0, \dots, 0, t) \equiv 0$, satisfait la condition (c) en 0 si l'on a:

$$(c) \quad \overline{\frac{\partial F}{\partial t} \in (z_0, \dots, z_n)} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) \quad (\text{dans } \mathbb{C} \{z_0, \dots, z_n, t\}),$$

la barre désignant toujours la clôture intégrale des idéaux. On peut montrer assez facilement que deux germes d'hypersurfaces à singularité isolée (c)-cosécants ont même type topologique, ainsi que toutes leurs sections planes génériques (cf. [I.E.P.] § 2). Réciproquement, une déformation conservant le type topologique des fibres et de leurs sections planes génériques est une (c)-cosécance (cf. loc. cit. et appendice).

2.1. Théorème 3. *La classe de (c)-cosécance d'une hypersurface définie par $f(z_0, \dots, z_n) + g(w_0, \dots, w_m) = 0$ ne dépend que de la classe de (c)-cosécance de $(X_0, 0)$ et $(X_1, 0)$, hypersurfaces définies par $f = 0$ et $g = 0$ respectivement.*

La démonstration est un exercice facile sur la (c)-cosécance, et laissée au lecteur.

Nous noterons $[X_0]$ la classe de (c)-cosécance et nous venons donc de définir une opération que nous noterons : $[X_0], [X_1] \mapsto [X_0] \perp [X_1]$. Remarquons que deux hypersurfaces à singularité isolée (c)-cosécantes sont reliées par une famille d'hypersurfaces à μ^* constant ([I. E. P.] 2.6) et ont donc même suite μ^* des nombres de Milnor des sections planes génériques de toutes dimensions passant par l'origine ([C. E. W.]). On peut se demander si l'on peut calculer la suite μ^* de $[X_0] \perp [X_1]$ à partir de celle de $[X_0]$ et celle de $[X_1]$. Nous sommes encouragés par le fait que $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, w_0, \dots, w_m\}/j(f+g) = \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}/j(f) \otimes \mathbb{C}\{w_0, \dots, w_m\}/j(g)$ et donc $\mu^{(m+n+2)}([X_0] \perp [X_1]) = \mu^{(n+1)}(X_0) \cdot \mu^{(m+1)}(X_1)$.

Le résultat que voici est la raison originelle de l'introduction des invariants (e_q, m_q) .

2.2. Théorème 4. Soit $(e_q, m_q)_{q \in I}$ (resp. $(f_{q'}, n_{q'})_{q' \in I'}$) la suite des invariants associés (§ 1) aux composantes irréductibles des courbes polaires générales de $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ (resp. $g(w_0, \dots, w_m) = 0$). On a :

$$\mu^{(m+n+1)}([X_0] \perp [X_1]) = \sum_{(q, q') \in I \times I'} \min(e_q \cdot n_{q'}, f_{q'} \cdot m_q).$$

[I (resp. I') est l'ensemble des composantes irréductibles de la courbe polaire générale de f (resp. g).]

Démonstration. Choisissons les coordonnées (z_0, \dots, z_n) et (w_0, \dots, w_m) de telle façon que $z_0 = 0$ (resp. $w_0 = 0$) définisse une section hyperplane générique pour X_0 (resp. X_1). (Ici «générique» a un sens bien précis : un hyperplan est générique si son intersection avec l'hypersurface a pour nombre de Milnor le nombre de Milnor d'une section hyperplane générique, cf. [C. E. W.] chap. II, 1.6.)

Nous allons calculer la multiplicité de la courbe polaire de l'hypersurface $f(z_0, \dots, z_n) + g(w_0, \dots, w_m) = 0$ par rapport à un hyperplan de \mathbb{C}^{m+n+2} d'équation : $(1-\lambda)z_0 + \lambda w_0 = 0$. Cette courbe polaire a pour équations

$$\Gamma_\lambda \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = \frac{\partial g}{\partial w_1} = \dots = \frac{\partial g}{\partial w_m} = 0 \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial z_0} - (1-\lambda) \frac{\partial g}{\partial w_0} = 0 \end{cases}$$

comme on le voit en la décrivant comme adhérence de l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{m+n+2} - \{0\}$ où l'hyperplan tangent à l'hypersurface de niveau de $f+g$ est parallèle à l'hyperplan $(1-\lambda)z_0 + \lambda w_0 = 0$.

On peut remarquer que lorsque λ varie, ces équations nous décrivent un système linéaire de courbes tracé sur la surface définie par le premier paquet d'équations, et cette surface n'est autre que $S = S_{H_0} \times S_{H_1}$ où S_{H_0} (resp. S_{H_1}) est la courbe polaire de f (resp. g) par rapport à l'hyperplan $z_0 = 0$ (resp. $w_0 = 0$). Or, pour calculer la multiplicité à l'origine de Γ_λ , nous pouvons prendre une résolution des singularités de S , disons $p: S' \rightarrow S$, et calculer la somme des multiplicités de l'image réciproque par p de l'idéal maximal de S , restreinte sur la courbe de S' définie par $\left(\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0} - (1-\lambda) \frac{\partial g}{\partial w_0}\right) \circ p$, aux points de $p^{-1}(0)$, pourvu que l'inter-

section de F_λ avec le lieu singulier de S soit réduite à $\{0\}$. En effet, dans ce cas, le morphisme $p^{-1}(F_\lambda) \rightarrow F_\lambda$ est biméromorphe, et on peut appliquer la formule de projection biméromorphe pour le calcul des multiplicités (dans le cas d'une courbe, cette formule est bien classique, cf. [Se]). Ici, notre surface S a une résolution des singularités toute trouvée: la normalisation $p: \bar{S} = \bar{S}_{H_0} \times \bar{S}_{H_1} \rightarrow S_{H_0} \times S_{H_1} = S$, puisque \bar{S}_{H_0} (resp. \bar{S}_{H_1}) est une courbe normale, donc non singulière. En fait \bar{S}_{H_0} est union disjointe des normalisations des composantes irréductibles de S_{H_0} , et de même pour \bar{S}_{H_1} . Ainsi, $|p^{-1}(0)|$ est en bijection avec $I \times I'$ (où I (resp. I') est l'ensemble des composantes irréductibles de S_{H_0} (resp. S_{H_1})). L'algèbre analytique de \bar{S} en un de ces points est $\mathbb{C}\{t_q, u_{q'}\}$, où $(q, q') \in I \times I'$ et le morphisme $\bar{S} \rightarrow S$ est décrit en disant que F_q (resp. $F_{q'}$) est donné dans \mathbb{C}^{n+1} (resp. \mathbb{C}^{m+1}) pour une représentation paramétrique $z_i(t_q)$ ($0 \leq i \leq n$) (resp. $w_j(u_{q'})$, $0 \leq j \leq m$) et on a donc ainsi un morphisme $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{n+m+2}$ dont l'image est la composante irréductible $F_q \times F_{q'}$ de S . Il nous faut maintenant calculer la multiplicité de la restriction à la courbe de \mathbb{C}^2 (coordonnées $t_q, u_{q'}$) définie par $(1-\lambda) \frac{\partial f}{\partial z_0}(z(t_q)) - \lambda \frac{\partial g}{\partial w_0}(w(u_{q'})) = 0$ de l'idéal engendré par les $(z_i(t_q), w_j(u_{q'}))$. Or, puisque nos hyperplans sont assez généraux, $(S_{H_0}, H_0)_0 = m_0(S_{H_0}) = \mu^{(m)}$ et de même pour S_{H_1} (voir [C.E.W.] chap. II, § 1), ce qui implique que nous pouvons écrire $z_0(t_q) = t_q^{m_q}$, $z_i(t_q) = \lambda_i t_q^{k_i, q} + \dots$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $k_i, q \geq m_q$, et de même $w_0(u_{q'}) = \mu_j u_{q'}^{l_j, q'}$, $w_j(u_{q'}) = \mu_j u_{q'}^{l_j, q'} + \dots$, avec $l_j, q' \geq n_{q'}$. Par ailleurs, le calcul de ([C.E.W.] chap. II, 1.2) montre que $\frac{\partial f}{\partial z_0}(z_0(t_q), \dots, z_n(t_q)) = \zeta \cdot t_q^{e_q} + \dots$, avec $\zeta \in \mathbb{C}^*$ et $\frac{\partial g}{\partial w_0}(w_0(u_{q'}), \dots, w_m(u_{q'})) = \xi \cdot u_{q'}^{f_{q'}} + \dots$ avec $\xi \in \mathbb{C}^*$, où les e_q, m_q sont bien sûr ceux qui ont été définis au § 1. Finalement, nous avons à calculer la multiplicité de la restriction de l'idéal de $\mathbb{C}\{t_q, u_{q'}\}$ engendré par $(t_q^{m_q}, u_{q'}^{n_{q'}})$ à la courbe d'équation

$$(1-\lambda)(\zeta \cdot t_q^{e_q} + \dots) - \lambda(\xi \cdot u_{q'}^{f_{q'}} + \dots) = 0.$$

Ceci peut aussi se calculer comme multiplicité d'intersection avec cette dernière courbe de la courbe définie par une combinaison linéaire générale de $t_q^{m_q}, u_{q'}^{n_{q'}}$, c'est-à-dire $\mu \cdot t_q^{m_q} - (1-\mu) \cdot u_{q'}^{n_{q'}} = 0$. Cette dernière courbe n'est pas nécessairement réduite. Cependant on peut paramétrer la courbe réduite sous-jacente et appliquer le calcul de ([C.E.W.] chap. II, 1.2) pour trouver que la multiplicité d'intersection cherchée est $\min(e_q \cdot n_{q'}, f_{q'} \cdot m_q)$, tant que $\lambda \neq 0, 1$. Arrivés ici nous avons donc montré

$$m_0(F_\lambda) = \sum_{(q, q') \in I \times I'} \min(e_q \cdot n_{q'}, f_{q'} \cdot m_q)$$

tant que $z_0=0$ et $w_0=0$ sont des hyperplans génériques pour X_0 et X_1 , et que $\lambda \neq 0, 1$.

Or les hyperplans de \mathbb{C}^{m+n+2} forment un \mathbb{IP}^{m+n+1} dans lequel on trouve un \mathbb{IP}^n (resp. \mathbb{IP}^m) formé des hyperplans dont l'équation ne dépend que des variables z_i (resp. w_j). Puisque les hyperplans génériques pour X_1 (resp. X_2) forment un ouvert de Zariski dense de \mathbb{IP}^n (resp. \mathbb{IP}^m) nous venons en fait de calculer la multiplicité de la courbe polaire associée à une direction d'hyperplan de \mathbb{C}^{m+n+2}

correspondant à un point $H \in \mathbb{P}^{m+n+1}$ n'appartenant ni à \mathbb{P}^n ni à \mathbb{P}^m , et tel que l'unique droite \mathbb{P}^1 qui contient H et rencontre \mathbb{P}^n et \mathbb{P}^m rencontre ces derniers en un point de l'ouvert de Zariski dense des directions génériques. L'ensemble des tels points H contient évidemment un ouvert de Zariski dense de \mathbb{P}^{m+n+1} , qui rencontre donc l'ouvert du théorème 1, ce qui montre que $m_0(\Gamma_2)$ est bien égal au nombre de Milnor d'une section hyperplane générique de $f(z_0, \dots, z_n) + g(w_0, \dots, w_m) = 0$, et démontre ainsi le théorème 4. Notons immédiatement :

2.3. *Remarque.* Nous avons en fait, au cours de la démonstration précédente, montré que l'on pouvait calculer les invariants (e_q/m_q) de $[X_0] \perp [X_1]$ et en fait, en notant E_r, M_r ces invariants

$$\left\{ \frac{E_r}{M_r} \right\}_{\text{red}} = \left\{ \max \left(\frac{e_q}{m_q}, \frac{f'_q}{n_{q'}} \right) \right\}_{\text{red}}.$$

Notons aussi que quand $g = w_0^k$, il nous faut admettre que la courbe polaire est \mathbb{C} tout entier, mais le calcul précédent s'applique encore et nous donne :

$$\mu^{(n+1)}(f(z_0, \dots, z_n) + w_0^k) = \sum_{q \in I} \min(e_q, (k-1) \cdot m_q).$$

Remarque. Le théorème 4 nous montre que l'on ne peut pas espérer exprimer $\mu^{(m+n+1)}([X_0] \perp [Y_1])$ à partir seulement de $\mu^*(X_0)$ et $\mu^*(X_1)$ en général. En fait :

2.4. **Corollaire.** *Pour $f(z_0, \dots, z_n) = 0, g(w_0, \dots, w_m) = 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu^{(m+n+1)}([X_0] \perp [X_1]) = \mu^{(n+1)}(X_0) \cdot \mu^{(m)}(X_1).$

(ii) $\max_{q \in I} \left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\} \leq \min_{q' \in I'} \left\{ \frac{f_{q'}}{n_{q'}} \right\}.$

(iii) *Toute section hyperplane $w_0 = 0$ générique pour $g(w_0, \dots, w_m) = 0$ est générique pour $f + g = 0$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que puisque $\sum e_q = \mu^{(n+1)}(X_0), \sum m_q = \mu^{(m)}(X_0)$, etc. ..., on a l'égalité (i) si et seulement si $\min(e_q \cdot n_{q'}, f_{q'} \cdot m_q) = e_q \cdot n_{q'}$ quels que soient q, q' , c'est-à-dire $e_q \cdot n_{q'} \leq f_{q'} \cdot m_q$ quels soient q, q' .

L'équivalence de (i) et (iii) provient de ce que le nombre de Milnor de $f(z_0, \dots, z_n) + g(w_0, w_1, \dots, w_m) = 0$ vaut $\mu^{(n+1)}(X_0) \cdot \mu(X_1 \cap H)$ où H est l'hyperplan $w_0 = 0$.

Pour pouvoir donner des corollaires du théorème 4, souvenons-nous du :

Théorème 5 (voir Appendice). *Pour un germe d'hypersurface $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$ à singularité isolée, toutes les sections hyperplanes $X \cap H$ telles que $\mu(X \cap H) = \mu^{(N)}(X)$ (nombre de Milnor d'une section hyperplane générique) sont (c)-cosécantes, et donc ont même suite μ^* (et même type topologique, ainsi que toutes leurs sections planes génériques).*

Nous pouvons obtenir du théorème 4 des corollaires affirmant que deux hypersurfaces sont (c)-cosécantes, et donc ont même type topologique, en les faisant apparaître comme deux sections hyperplanes génériques d'une même hypersurface : par exemple le corollaire 2.6 ci-dessous :

2.5. Corollaire (répondant à une question de Thom). *Tout germe d'hypersurface à singularité isolée est section hyperplane générique d'une hypersurface à singularité isolée.*

Démonstration. Soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ une équation pour notre germe d'hypersurface. Considérons l'hypersurface à singularité isolée définie par $f(z_0, \dots, z_n) + w_0^{N+1} = 0$.

Dès que $N \geq \text{Sup} \left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\}$, $w_0 = 0$ est une section hyperplane générique de $f(z_0, \dots, z_n) + w_0^{N+1} = 0$.

2.6. Corollaire (Condition pour que l'on puisse, à équisingularité près, séparer une variable). *Soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0, 0)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_0, 0)$ soit (c)-cosécante à une hypersurface du type « plan multiple », i.e. ayant une équation du type $f'(z_1, \dots, z_n) + z_0^{N+1} = 0$, et telle que de plus $z_0 = 0$ en soit une section générique, est que tous les e_q/m_q soient égaux à un même entier N .*

Démonstration. Supposons $\{e_q/m_q\}_{\text{red}} = \{N\}$, et considérons $f(z_0, \dots, z_n) + w_0^{N+1}$. D'après le théorème 4 et son corollaire 2.3, pourvu que $z_0 = 0$ soit générique pour $f(z_0, \dots, z_n)$, les sections hyperplanes $w_0 = 0$ et $z_0 = 0$ sont toutes deux génériques (je rappelle que ceci signifie qu'elles ont toutes deux pour nombre de Milnor le nombre de Milnor d'une section hyperplane générique de $f(z_0, \dots, z_n) + w_0^{N+1} = 0$). D'après le théorème 5, les deux hypersurfaces d'équations

$$f(0, z_1, \dots, z_n) + w_0^{N+1} = 0 \quad \text{et} \quad f(z_0, \dots, z_n) = 0$$

sont donc (c)-cosécantes, ce qui montre que la condition est suffisante. La réciproque donne l'occasion d'énoncer :

Théorème 6. *La suite $\left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\}_{\text{red}}$ (ou « red » signifie que chaque rationnel est écrit une seule fois) est un invariant de (c)-cosécance, i.e. est constante dans une déformation (c)-équisingulière, ou à « μ^* constant ».*

Démonstration. Soit $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ une équation pour une famille d'hypersurfaces à singularité isolée, (c)-équisingulière le long de $0 \times \mathbb{C}$ (défini par $z_0 = \dots = z_n = 0$), c'est-à-dire vérifiant $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{\mathcal{S} \cdot \mathcal{J}}$ dans $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\}$, où

$$\mathcal{S} = (z_0, \dots, z_n) \cdot \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) \cdot \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\}.$$

Nous voulons montrer que toutes les fibres ont, pour t assez petit, même suite $\left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\}_{\text{red}}$. La semi-continuité analytique du nombre de Milnor ([I.E.P.] § 2) permet de vérifier qu'il existe un ouvert de Zariski U du \mathbb{P}^n des hyperplans de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ contenant $0 \times \mathbb{C}$, tel que si $H \in U$, l'hyperplan $H_t = H \times \{t\}$ de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ soit générique pour $X_t \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \{t\}$ pour tout t assez petit. La (c)-équisingularité étant équivalente à la constance de $\mu^*(X_t, 0)$, nous avons donc, si $H \in U$,

$\mu^{(n)}(X_t \cap H_t, 0) = \mu^{(n)}(X_0 \cap H_0, 0)$ pour tout t . Choisissons les coordonnées z_0, \dots, z_n de telle façon que l'hyperplan $z_0 = 0$ soit dans U , et considérons la surface Σ de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ d'équations

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(z_0, \dots, z_n, t) = \dots = \frac{\partial F}{\partial z_n}(z_0, \dots, z_n, t) = 0,$$

qui n'est autre que la famille des courbes polaires S_{H_t} .

Projetons maintenant $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ par le morphisme $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ défini par: $v \circ \psi = \frac{\partial F}{\partial z_0}, u \circ \psi = z_0, t \circ \psi = t$.

La restriction de ψ à Σ est un morphisme fini, dont on peut vérifier que l'image est une surface $\Sigma_0 = \psi_*(\Sigma) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ (non nécessairement réduite a priori, mais qui en fait le sera, et en tous cas cela n'a pas d'importance pour notre construction). Or, pour chaque valeur de t , nous disposons d'une *paramétrisation* de Σ_t , donc de $\Sigma_{0,t}$, et nous pouvons donc, en appliquant la construction du polygone de Newton dans les coordonnées u, v à chaque $\Sigma_{0,t}$, vérifier les faits suivants grâce au fait que les (e_q^0, m_q^0) (resp. (e_r^t, m_r^t)) sont les « premières paires de Puiseux » des paramétrisations des branches de $\Sigma_{0,0}$ (resp. $\Sigma_{0,t}$).

1) Les invariants $(e_r^t, m_r^t)_{r \in R}$ des fibres (X_t) , $t \neq 0$, sont indépendants de $t \neq 0$ assez petit (par équisingularité générique des familles de courbes du point de vue de la résolution simultanée), et les quotients $(e_r^t/m_r^t)^{-1}$ sont les valeurs absolues des pentes des côtés du polygone de Newton de la courbe $\Sigma_{0,t}$ dans les coordonnées (u, v) ($t \neq 0$). ($\Sigma_{0,t} = \Sigma_0 \cap (\mathbb{C}^2 \times \{t\}$) bien sûr.)

2) Les quotients $(e_q^0/m_q^0)^{-1}$ sont les valeurs absolues des pentes des côtés du polygone de Newton de la courbe spéciale $\Sigma_{0,0}$ dans les coordonnées (u, v) .

Par ailleurs, puisque $\mu^{(n+1)}$ et $\mu^{(n)}$ sont constants par hypothèse, d'après 1.4 nous avons

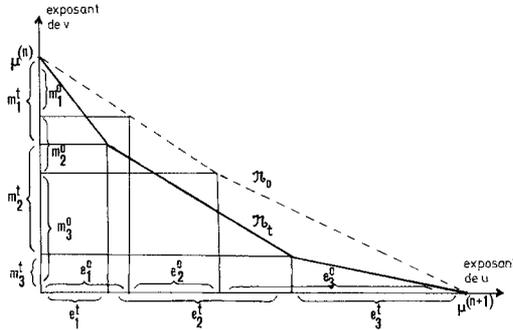
$$\sum_r e_r^t = \sum_q e_q^0 = \mu^{(n+1)}$$

$$\sum_r m_r^t = \sum_q m_q^0 = \mu^{(n)}$$

et de plus, le polygone de Newton \mathfrak{N}_0 de $\Sigma_{0,0}$ est au-dessus du polygone de Newton \mathfrak{N}_t de $\Sigma_{0,t}$ ($t \neq 0$) d'après la définition du polygone de Newton comme enveloppe convexe de l'ensemble des indices (i, j) (dans \mathbb{N}^2) des coefficients non nuls de monômes $u^i v^j$ dans l'équation de $\Sigma_{0,t}$, et le fait qu'aucun monôme ne peut apparaître quand t s'annule.

La situation peut être résumée en disant que l'on a a priori une configuration de polygones de Newton comme celle-ci, pour $\Sigma_{0,t}$ (traits gras) et $\Sigma_{0,0}$ (pointillés). On a bien sûr ordonné les quotients e/m par ordre croissant, par la convexité du polygone de Newton.

On peut remarquer que, à cause de cette convexité, $\min(e_i^0 m_j^0, e_j^0 m_i^0)$ par exemple, si $i \neq j$, est la surface de l'unique rectangle ayant un côté vertical de longueur m_i^0 ou m_j^0 , et un côté horizontal de longueur e_i^0 ou e_j^0 , apparaissant dans le dessin, et situé *sous* le polygone de Newton \mathfrak{N}_0 . Par ailleurs, $e_i^0 m_i^0$ est le double de la surface d'un triangle ayant pour hypoténuse le i -ème côté du polygone de Newton et situé sous celui-ci. Ceci va nous servir ci-dessous.



Maintenant remarquons que si $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ est (c)-équisingulière, il en est de même de $F(z_0, \dots, z_n, t) + F(w_0, \dots, w_n, t) = 0$ comme on le vérifie immédiatement, et donc en particulier ([I. E. P.] § 2) le nombre de Milnor d'une section hyperplane générique des fibres de cette famille «double» de notre famille originelle est constant. Or, d'après le calcul de 2.2 (théorème 4) ceci implique que

$$\sum_{(q, q') \in I \times I} \min(e_q^0 \cdot m_{q'}^0, e_{q'}^0 \cdot m_q^0) = \sum_{(r, r') \in R \times R} \min(e_r^t \cdot m_{r'}^t, e_{r'}^t \cdot m_r^t)$$

et on peut reconnaître dans le terme de gauche (resp. celui de droite) le double de la surface contenue entre le polygone de Newton \mathfrak{N}_0 (resp. \mathfrak{N}_t) et les axes du \mathbb{N}^2 dans lequel nous avons tracé nos polygones. Nous avons donc deux polygones de Newton, dont l'un est au-dessus de l'autre, et qui enferment la même surface: ils sont égaux, ce qui démontre le théorème 6, et en fait un peu mieux, car l'invariance du polygone de Newton est un résultat plus précis que l'énoncé du théorème; nous venons en fait de montrer:

Théorème 6'. *Le polygone de Newton de la projection dans \mathbb{C}^2 (muni des coordonnées u, v) par $v = \frac{\partial f}{\partial z_0}$, $u = z_0$ de la courbe polaire de $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ relative à une direction d'hyperplan $z_0 = 0$ générique, est un invariant de (c)-équisingularité, et les valeurs absolues des pentes de ses côtés sont les $(e_q/m_q)^{-1}$.*

Remarque 1 (d'après [C. E. W.] chap. II, 1.2). A des termes d'ordre élevé près, f se comporte sur la courbe polaire comme $z_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0}$, et nous aurions pu aussi bien projeter \mathbb{C}^{n+1} dans \mathbb{C}^2 par $v = f(z_0, \dots, z_n)$, $u = z_0$. Le sous-espace critique de cette projection est la courbe polaire, et l'image de celle-ci est une courbe appelée par Thom le diagramme de Cerf de f . En fait, nous pouvons montrer en appliquant l'argument ci-dessus aux $e_q + m_q/m_q$:

Théorème 6''. *Le polygone de Newton du diagramme de Cerf de f relatif à une direction générale d'hyperplan est un invariant de (c)-équisingularité, et les valeurs absolues des pentes de ses côtés sont les $(e_q + m_q/m_q)^{-1}$ (car $e_q + m_q$ est la valuation de f sur la q -ième composante de la courbe polaire).*

Remarque 2. Bien que cela n'apparaisse pas immédiatement sur la démonstration précédente, il est bien probable que l'on peut remplacer la condition de (c)-équisingularité (i.e. $\mu^*(X_t, 0)$ constant, après I.E.P. § 2) par la condition plus faible: $\mu^{(n+1)}(X_t, 0)$ et $\mu^{(n)}(X_t, 0)$ constants, ou bien $\mu^{(n+1)}(X_t, 0) + \mu^{(n)}(X_t, 0)$ constant, ce qui revient au même puisque chaque $\mu^{(i)}(X_t, 0)$ est semi-continu, comme on le vérifie facilement.

Remarque 3. Le polygone de Newton d'un germe de courbe plane dépend bien sûr des coordonnées que l'on choisit pour développer son équation en série. J'insiste ici sur le fait que l'on a écrit $v = f, u = z_0$ et calculé le polygone de Newton du discriminant de ce morphisme $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dans les coordonnées (u, v) .

Remarque 4. La preuve du théorème 6 nous montre, par l'argument utilisant la surface sous le polygone de Newton, que si $F(z_0, \dots, z_n, t) + F(w_0, \dots, w_n, t) = 0$ vérifie « $\mu^{(2n+2)}$ et $\mu^{(2n+1)}$ constants», $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ vérifie «polygone constant» et en particulier « $\mu^{(n+1)}$ et $\mu^{(n)}$ constants».

Remarque 5. On connaît des familles de surfaces à singularité isolée, à $\mu^{(3)}$ constant mais $\mu^{(2)}$ non constant, et où le $\text{Sup}\{e_q/m_q\}$ reste constant bien que $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ change: dans l'exemple trouvé par Briançon et Speder:

$$Z^5 + tZY^6 + XY^7 + X^{15} = 0$$

on peut vérifier à l'aide de 2.3 que pour la fibre spéciale $Z^5 + XY^7 + X^{15}$, $\{e_q^0/m_q^0\}_{\text{red}} = \{7, 14\}$ et pour $t \neq 0$, $\{e_r^t/m_r^t\}_{\text{red}} = \{14\}$.

Question. La constance du nombre de Milnor dans une famille d'hypersurfaces à singularité isolée implique-t-elle la constance du $\text{Sup}\{e_q/m_q\}$? (ou, ce qui est équivalent, la constance des exposants de Łojasiewicz de 1.7). Il résulte en tous cas de [C.E.W.] chap. II ou de l'argument de polygone de Newton que si $\mu^{(n+1)}$ est constant, $\text{Sup}\{e_q^0/m_q^0\} \leq \text{Sup}\{e_r^t/m_r^t\}$.

Achevons enfin la preuve du corollaire 2.6: si $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ est (c)-cosécante à une hypersurface $g(z_1, \dots, z_n) + z_0^{N_0+1} = 0$ telle que $z_0 = 0$ soit une section générale, d'après le théorème 4, la suite $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ de cette dernière hypersurface est réduite à $\{N\}$, donc aussi celle de $f = 0$.

Comme on peut, grâce aux théorèmes 5 et 6 définir la suite $\{e_q/m_q\}^{(i)}$ de l'intersection de $(X_0, 0)$ par un i -plan général de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, nous voyons que nous pouvons énoncer en fait, par «récurrence descendante»:

2.7. Corollaire. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une singularité isolée d'hypersurface soit (c)-cosécante à une singularité du type de Pham-Brieskorn i.e. $z_0^{N_0+1} + z_1^{N_1+1} + \dots + z_n^{N_n+1} = 0$ est que pour chaque $i, 1 \leq i \leq n+1$, la suite $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}^{(i)}$ se réduise à un entier N_{i-1} , et alors nécessairement, $N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_n$.

Remarque. Il résulte du théorème 6'' que le polygone de Newton du diagramme de Cerf de $(X_0, 0)$ ne dépend que de la classe de (c)-cosécance $[X_0]$ de $(X_0, 0)$, et en particulier les $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ ne dépendent que de $[X_0]$.

§ 3. Avatars des invariants $\{e_q/m_q\}$

Arrivés ici, nous avons attaché à toute singularité isolée d'hypersurface des invariants (e_q, m_q) ne dépendant que de la clôture intégrale dans \mathcal{O}_{n+1} de l'idéal jacobien $\bar{j}(f)$ de notre hypersurface, et tels que la suite de rationnels $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ ne dépende que de la classe de (c)-cosécance de notre hypersurface. Nous avons relié ces invariants d'une part au nombre de Milnor $\mu^{(n+1)}(X_0, 0)$ de l'hypersurface et à celui de sa section hyperplane générique (cf. 1.4) et d'autre part à des exposants de Łojasiewicz.

Je vais maintenant montrer que l'on peut calculer le plus petit entier N ayant la propriété que toute fonction $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ ayant même développement de Taylor jusqu'à l'ordre N inclus que notre fonction f définit, par $g=0$, un germe d'hypersurface (c)-cosécante à notre hypersurface $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ définie par $f=0$.

3.1. Théorème 7 (améliorant un résultat de Lê D.T. et C.P. Ramanujam [L.R] et de Risler [Ri]). Soient $f(z_0, \dots, z_n)=0$, $g(z_0, \dots, z_n)=0$ définissant des germes d'hypersurfaces à singularité isolée. Si l'on a un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres $\mathcal{O}_{n+1}/\bar{j}(f) \simeq \mathcal{O}_{n+1}/\bar{j}(g)$, les deux germes d'hypersurfaces sont (c)-cosécants (la barre désigne la fermeture intégrale des idéaux dans \mathcal{O}_{n+1}).

Démonstration. Au prix d'un automorphisme analytique, ne changeant pas la classe de (c)-cosécance, on peut supposer $\bar{j}(f) = \bar{j}(g) = \bar{j}$ dans \mathcal{O}_{n+1} . On considère alors la famille à un paramètre d'équation $F(z_0, \dots, z_n, v) = (1-v)f(z_0, \dots, z_n) + v g(z_0, \dots, z_n) = 0$. Pour chaque valeur de v , l'idéal

$$\mathcal{J}_v = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) = \left((1-v) \frac{\partial f}{\partial z_0} + v \frac{\partial g}{\partial z_0}, \dots, (1-v) \frac{\partial f}{\partial z_n} + v \frac{\partial g}{\partial z_n} \right)$$

est contenu dans \bar{j} et sa fermeture intégrale est égale à \bar{j} pour $v=0, 1$. Ainsi sa multiplicité est au moins $\mu^{(n+1)} = e(\bar{j})$, et est exactement $\mu^{(n+1)}$ pour $v=0, 1$. On en déduit qu'il existe un ensemble fini $S \subset \{v \in \mathbb{C} / |v| < 2\}$ tel que S ne contienne ni 0 ni 1, et que si $v \notin S$, on ait $\mathcal{J}_v = \bar{j}$ [ceci par un résultat de semi-continuité analytique des multiplicités, conséquence facile de la semi-continuité des longueurs, joint au théorème de Rees cité en [C.E.W.] chap. 0]. Puisque la suite $\mu^*(X_v)$ ne dépend que de \mathcal{J}_v , on en déduit l'existence d'un chemin analytique $v = v(\tau)$ joignant 0 à 1 dans $\{v \in \mathbb{C} / |v| < 2\}$ et évitant S , le long duquel on a

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial z_0} ((1-v(\tau_0))f + v(\tau_0)g), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} ((1-v(\tau_0))f + v(\tau_0)g) \right)} = \bar{j}$$

pour tout τ_0 , et qui est donc en particulier une déformation à μ^* constant reliant $f=0$ à $g=0$ (cf. [C.E.W.] chap. I, 2.10), donc une (c)-cosécance.

3.2. Proposition. Soient $f(z_0, \dots, z_n)=0$, $f \in \mathcal{O}_{n+1}$, définissant un germe d'hypersurface à singularité isolée et $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ les invariants associés en 1.5.

Pour un entier N , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $N \geq \text{Sup} \{e_q/m_q\}$,
- ii) $m^N \subset \bar{j}(f)$.

Démonstration. Après éclatement normalisé $\bar{Z} \rightarrow U$ de $j(f)$ dans un voisinage assez petit de 0 dans \mathbb{C}^{n+1} , comme en 1.1, on est ramené à montrer que la condition i) équivaut à : $m^N \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}} \subset j(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$, et maintenant $j(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ est un idéal inversible d'un espace normal, et l'appartenance d'un élément à $j(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$ se décide donc au voisinage d'un point général de chaque composante irréductible du diviseur correspondant, puisque le lieu polaire d'une fonction méromorphe sur un espace normal est soit de codimension 1, soit vide. Ainsi, il nous faut voir que i) équivaut à dire que $N \cdot v_{D_i}(m) \geq v_{D_i}(j(f))$ avec les notations de 1.2. Mais ceci résulte évidemment du théorème 2.

3.3. Théorème 8. *Soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0$, $f \in \mathcal{O}_{n+1}$, définissant un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Pour un entier N , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $N > \text{Sup} \{e_q/m_q\}$.

ii) *Toute fonction $g \in \mathcal{O}_{n+1}$ telle que $g - f \in m^{N+1}$ définit, par $g = 0$, un germe d'hypersurface ayant le même type topologique que $(X_0, 0)$.*

iii) *Toute fonction $g \in \mathcal{O}_{n+1}$ telle que $g - f \in m^{N+1}$ définit, par $g = 0$, un germe d'hypersurface (c)-cosécant à $(X_0, 0)$.*

Démonstration. Montrons d'abord i) \Rightarrow iii). Pour cela, notons que si $g = f + h$, $h \in \mathcal{M}^{N+1}$, nous avons $\frac{\partial g}{\partial z_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial h}{\partial z_i}$, et $\frac{\partial h}{\partial z_i} \in m^N$. D'après la proposition précédente (3.2), ceci montre que $j(g) \subset j(f)$. Mais la preuve de 3.2 nous montre aussi en fait que puisque $N m_q > e_q$, nous avons $j(g) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}} = j(f) \cdot \mathcal{O}_{\bar{Z}}$, c'est-à-dire $\overline{j(g)} = \overline{j(f)}$, parce que $v_{D_i} \left(\frac{\partial h}{\partial z_k} \right) > v_{D_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \right)$ pour tous i et k ; ceci donne iii) d'après 3.1.

Nous avons déjà vu iii) \Rightarrow ii) (§ 2), et il nous reste à montrer ii) \Rightarrow i). Pour cela considérons la famille à un paramètre d'hypersurfaces d'équation

$$F(z_0, \dots, z_n, v) = f(z_0, \dots, z_n) + v \cdot z_0^{N+1} = 0.$$

Les hypersurfaces fibres de cette famille sont des sections hyperplanes de l'hypersurface

$$f(z_0, \dots, z_n) + w_0^{N+1} = 0$$

et ii) implique que toutes ces fibres ont même type topologique, donc même nombre de Milnor ([C.E.W.] chap. I, 1.4), ce qui d'après le théorème 5 implique (si $z_0 = 0$ est générique) que toutes les fibres de notre famille ont même suite μ^* puisque $z_0 = w_0$ est toujours une section générique, ce qui implique à son tour ([I.E.P.] 2.6) que notre famille satisfait la condition (c) qui s'écrit ici :

$$z_0^{N+1} \in (z_0, \dots, z_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} + v(N+1)z_0^N, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right).$$

Or, nous pouvons restreindre cette relation de dépendance intégrale à la courbe définie par $v \equiv 0$, $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$, qui n'est autre que la courbe polaire S_H de

$(X_0, 0)$ correspondant à $z_0=0$. En normalisant (c'est-à-dire paramétrant) cette courbe, ce qui peut s'écrire comme nous savons: $S_H = \bigcup_q \Gamma_q$ où

$$\Gamma_q: \begin{cases} z_0 = t_q^{m_q} \\ \vdots \\ z_i = \lambda_i t_q^{k_{q,i}} + \dots \end{cases} \quad \text{avec } k_{q,i} \geq m_q,$$

il vient pour chaque q , en utilisant le critère valuatif de dépendance intégrale (cf. [C.E.W.] chap. 0, I.4.3, ou [H] lect. 7, ou [L.T] chap. I):

$$(N+1)m_q \geq e_q + m_q$$

ce qui nous donne en tous cas $N \geq e_q/m_q$ pour chaque q , et donc $N \geq \text{Sup}\{e_q/m_q\}$.

Mais supposons maintenant que l'inégalité ne soit pas stricte: il existe alors q tel que $N \cdot m_q = e_q$, et ceci entraîne qu'il existe une valeur v_0 de v telle que la valuation t_q -adique de $\frac{\partial f}{\partial z_0} + v_0(N+1)z_0^N$ soit strictement supérieure à $e_q = N m_q$, ce qui montrerait que

$$z_0^{N+1} \notin \overline{\langle z_0, \dots, z_n \rangle \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} + v_0(N+1)z_0^N, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)},$$

toujours en utilisant le critère valuatif de dépendance intégrale. Ceci montre que en fait $N > \text{Sup}\{e_q/m_q\}$ et achève la démonstration du théorème 8.

3.4. Corollaire (à la Kuiper-Kuo). Soit $f \in \mathcal{O}_{n+1}$ telle que $f=0$ définisse un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0, 0)$. Pour un entier N les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) $N > \theta_2$, où θ_2 est la borne inférieure des exposants θ tels qu'il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^{n+1} et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que $|\text{grad } f(z)| \geq C|z|^\theta \forall z \in U$.

ii) Toute fonction $g \in \mathcal{O}_{n+1}$, telle que $g-f \in \mathfrak{m}^{N+1}$ définit, par $g=0$, un germe d'hypersurface (c)-cosécant à $(X_0, 0)$.

Démonstration. Il suffit d'aboutir le corollaire 2 (1.7) au théorème 8 (3.3).

Remarquons que si $f=0$ et $g=0$ sont (c)-cosécantes, f et g ont même type topologique en tant que morphismes (cf. Appendice).

3.5. Les (e_q/m_q) comme «taux d'évanescence». Dans ([I.E.P.], 3.6.4) j'ai donné une interprétation des $\{e_q/m_q\}$ ou plus précisément des $\{((e_q/m_q)+1)^{-1}\}$ comme taux d'évanescence de la hauteur des cellules de gradient construisant l'«homologie évanescence relative» $H_n(X_t, X_t \cap H, \mathbb{C})$ où $X_t \subset B_\varepsilon$ est le sous-espace de $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| < \varepsilon\}$ défini par $f(z_0, \dots, z_n) = t$, et H est un hyperplan «assez général» $z_0=0$. Je vais donner ici une interprétation différente des $\{e_q/m_q\}$ comme taux d'évanescence, que je relierai ailleurs à la géométrie du discriminant de la déformation miniverselle de $(X_0, 0)$. Voici de quoi il s'agit: choisissons un hyperplan générique $z_0=0$. Je dis qu'alors la famille de fonctions $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $u = F_a(z_0, \dots, z_n) = f(z_0, \dots, z_n) + a z_0$ est une «morsification» de la fonction $u = F_0(z_0, \dots, z_n) = f(z_0, \dots, z_n)$, c'est-à-dire que pour tout a_0 assez petit non nul, la fonction F_{a_0} a comme points critiques exactement $\mu^{(n+1)}(X_0, 0)$ points critiques

quadratiques donnant des valeurs critiques distinctes, à l'intérieur d'une boule $B_\epsilon \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez petite. De plus, ces points critiques doivent tendre vers 0 quand $a \rightarrow 0$. Je vais montrer ici que les $\{e_q/m_q\}$ nous décrivent les différentes « vitesses » avec lesquelles ces points critiques tendent vers 0 quand $a \rightarrow 0$; cherchons en effet les points critiques de F_a : il sont les solutions de

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial z_0} &= \frac{\partial f}{\partial z_0} + a = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_a}{\partial z_i} &= \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

Le second paquet d'équations décrit précisément la courbe polaire S_H correspondant à f et $z_0=0$. Nos points critiques sont donc sur $S_H = \bigcup_q \Gamma_q$. Nous savons paramétrer chaque Γ_q par:

$$\Gamma_q \begin{cases} z_0(t_q) = t_q^{m_q} \\ \vdots \\ z_i(t_q) = \lambda_i \cdot t_q^{k_{q,i}} + \dots \end{cases} \quad \text{avec } k_{q,i} \geq m_q \quad (1 \leq i \leq n)$$

[voir preuve du théorème 4].

Par ailleurs, le calcul de ([C. E. W.] chap. II, 1.2) montre que $(\Gamma_q, X'_0)_0 = e_q$ où X'_0 est l'hypersurface définie par $\frac{\partial f}{\partial z_0} = 0$. Ceci signifie que $\frac{\partial f}{\partial z_0} \Big|_{\Gamma_q}$ admet un développement de Puiseux :

$$\frac{\partial f}{\partial z_0}(z_0(t_q), \dots, z_n(t_q)) = \zeta_q \cdot t_q^{e_q} + \dots \quad \text{avec } \zeta_q \in \mathbb{C}^*.$$

Puisque les coordonnées de nos points critiques annulent $\frac{\partial f}{\partial z_0}(z_0, \dots, z_n) + a$, nous voyons que la fonction $U = F_a(z_0, \dots, z_n) = f + a z_0$ a exactement e_q points critiques sur la q -ième composante irréductible Γ_q de S_H , dont les coordonnées sont données par la paramétrisation de Γ_q , où l'on a substitué $t_q = \left(-\frac{a}{\zeta_q}\right)^{1/e_q} + \dots$.

En d'autres termes, nous pouvons écrire un développement de Puiseux en fonction de a des coordonnées des e_q points critiques de F_a qui sont sur Γ_q :

$$\begin{aligned} z_0 &= \delta_{q,0} \cdot a^{m_q/e_q} + \dots & \delta_{q,0} &= \left(-\frac{1}{\zeta_q}\right)^{m_q/e_q} \in \mathbb{C}^* \\ &\vdots & & \\ z_i &= \delta_{q,i} \cdot a^{k_{q,i}/e_q} + \dots \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

et $k_{q,i} \geq m_q$. Il est licite de dire que les $\{m_q/e_q\}$ mesurent « la vitesse » avec laquelle les coordonnées de ces points critiques tendent vers 0 avec a . Un calcul analogue montre que, pour le calcul des valeurs critiques, on a :

$$u = F_a \Big|_{\Gamma_q} = (f + a z_0) \Big|_{\Gamma_q} = \gamma_q \cdot t_q^{e_q + m_q} + \dots$$

avec $\gamma_q \in \mathbb{C}^*$. En effet, nous avons déjà vu que $(X_0, \Gamma_q) = e_q + m_q$, et donc $f|_{\Gamma_q} = \beta_q \cdot t_q^{e_q + m_q} + \dots$ et $a z_0|_{\Gamma_q} = \zeta_q \cdot t_q^{e_q + m_q} + \dots$. Comme nous l'avons vu plus haut.

En dérivant par rapport à t_q , il vient (puisque $\frac{\partial f}{\partial z_i} \Big|_{\Gamma_q} \equiv 0$) que $\beta_q = \zeta_q \cdot \frac{m_q}{e_q + m_q}$, et donc $\beta_q + \zeta_q \in \mathbb{C}^*$, ce qui nous montre que

$$\begin{aligned} F_a|_{\Gamma_q} &= (\beta_q + \zeta_q) \cdot t_q^{e_q + m_q} + \dots && \text{avec } \beta_q + \zeta_q \in \mathbb{C}^*. \\ &= \alpha_q \cdot a^{e_q + m_q/e_q} + \dots && (\alpha_q \in \mathbb{C}^*). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré :

Théorème 9. Dans une morsification générique d'une fonction $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $f(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ à singularité isolée, l'ensemble des $\{(e_q/m_q)^{-1}\}_{\text{red}}$ coïncide avec l'ensemble des taux d'évanescence des points critiques de Morse vers l'origine en fonction du paramètre de morsification, et l'ensemble des $\left\{ \frac{(e_q/m_q) + 1}{e_q/m_q} \right\}_{\text{red}}$ coïncide avec l'ensemble des taux d'évanescence des valeurs critiques vers 0, en fonction du paramètre de morsification.

§ 4. Calcul des invariants (e_q/m_q)

Le moyen de calculer les invariants (e_q/m_q) est fourni bien sûr par le théorème 2, et le premier cas à étudier est celui d'un germe de courbe plane irréductible :

4.1. Calcul des (e_q/m_q) d'un germe de courbe plane. Le théorème de Merle.

Soit $f(z_0, z_1) = 0$ l'équation d'un germe irréductible de courbe plane $(X_0, 0)$. On sait ([Z]) que le type topologique (et d'ailleurs en fait la classe de (c)-coséance de $(X_0, 0)$) est déterminé par la donnée de la caractéristique $(n, \beta_1, \dots, \beta_g)$ de $(X_0, 0)$, où β_i est le i -ème exposant caractéristique de Puiseux, et n la multiplicité de $(X_0, 0)$. Par ailleurs, l'ensemble des valeurs que prend sur $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X_0, 0}$ la valuation (t)-adique de $\mathbb{C}\{t\}$ vu comme fermeture intégrale de \mathcal{O} dans son corps de fractions $(\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}\{t\})$ est un semi-groupe $\Gamma \subset \mathbb{N}$ dont la donnée équivaut aussi à la donnée de la classe de (c)-coséance de $(X_0, 0)$. (Voir [Z] et [C.E.W.] chap. II, § 3, [I.E.P.] § 2). En fait, si nous écrivons un système minimal de générateurs de Γ : $\Gamma = \langle \bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g \rangle$, il existe une formule reliant les β_i aux $\bar{\beta}_i$: $\bar{\beta}_0 = n$, et

$$[Z] \quad \bar{\beta}_i = n_{i-1} \bar{\beta}_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i \quad 1 \leq i \leq g$$

où les entiers n_i sont définis ainsi : on définit des entiers l_i par $l_i = \text{pgcd}(n, \beta_1, \dots, \beta_i) = \text{pgcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_i)$ et les n_i par $l_{i-1} = n_i \cdot l_i$. On peut alors énoncer :

4.2. **Théorème** (M. Merle [Me]). Pour un germe de courbe plane irréductible, la suite $\{(e_q/m_q) + 1\}_{\text{red}}$ coïncide avec $\left\{ \frac{\bar{\beta}_i}{n_1 \dots n_{i-1}} \right\}_{1 \leq i \leq g}$.

4.3. **Corollaire.** La donnée de la multiplicité n et de la suite $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ d'un germe de courbe irréductible $(X_0, 0)$ équivaut à la donnée de sa caractéristique $(n, \beta_0, \dots, \beta_g)$,

et aussi à la donnée de son semi-groupe $\Gamma = \langle \bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g \rangle$, et enfin à celle de son type topologique ou de sa classe de (\mathbf{c}) -cosécance, ou de sa classe d'équisingularité au sens de Zariski. De plus ces données peuvent être déduites par un calcul « explicite » de la donnée du type analytique de l'algèbre artinienne $\mathcal{O}_2/\bar{\mathcal{J}}(f)$ ou du type analytique de $\mathcal{O}_2/\bar{\mathcal{J}}(f)$, où $\mathcal{O}_2 = \mathbb{C}\{z_0, z_1\}$.

Démonstration. Tout d'abord n est le plus petit entier tel que $\bar{\mathcal{J}}(f) \subset m^{n-1}$ (resp. $\bar{\mathcal{J}}(f) \subset m^{n-1}$ puisque m^{n-1} est intégralement clos). Par ailleurs, connaissant n et les β_i , on en déduit les $\bar{\beta}_i$ par la formule citée ci-dessus — et donc les $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ grâce à 4.2 —.

Réciproquement, si nous définissons des entiers b_i par $\beta_i = \frac{b_i \cdot n}{n_1 \dots n_i} = b_i \cdot l_i$, la donnée des $\{e_q/m_q\}$ nous donne d'après 4.2 les $\left(\bar{\beta}_1, \frac{\bar{\beta}_2}{n_1}, \dots, \dots, \frac{\bar{\beta}_g}{n_1 \dots n_{g-1}} \right)$. Or $\bar{\beta}_1 = \frac{b_1}{n_1} \cdot n$ et $(b_1, n_1) = 1$. Connaissant n et $\bar{\beta}_1$, nous en déduisons n_1 , donc $\bar{\beta}_2$ et ainsi de proche en proche les n_i et les $\bar{\beta}_i$, donc finalement Γ , et aussi la caractéristique $(n, \beta_1, \dots, \beta_g)$, en inversant la formule donnée plus haut. J'ai déjà rappelé ici que deux branches planes sont (c) -cosécantes (branche = germe de courbe irréductible) si et seulement si elles ont même semi-groupe ou, ce qui est équivalent, même caractéristique. Enfin la construction des $\{e_q/m_q\}$ par l'éclatement normalisé de $\bar{\mathcal{J}}(f)$ qui est aussi celui de $\bar{\mathcal{J}}(f)$ (théorème 2) achève de démontrer 4.3.

4.4 Remarque. M. Ben Lichtin m'a communiqué le résultat suivant, dû à MM. Y.C. Lu, T.C. Kuo et S.H. Chang: Le degré de C^0 -suffisance en 0 (= le plus petit entier r tel que le r -jet soit C^0 -suffisant) d'un polynôme $P(z_0, z_1): (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $P(z_0, z_1) = 0$ soit réduit et analytiquement irréductible en 0 est donné par:

$$r = \left\lceil \frac{\mu + \beta_g - 1}{n} \right\rceil + 1$$

où μ est le nombre de Milnor de $(X_0, 0)$ défini par $P(z_0, z_1) = 0$. Ce degré de suffisance doit être, au vu du théorème 8 (3.3), le plus petit entier strictement plus grand que $\text{Sup}\{e_q/m_q\}$.

Le théorème de Merle va nous permettre de vérifier que, en effet, pour un germe de courbe plane irréductible:

$$\text{Sup} \left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\} = \frac{\mu + \beta_g - 1}{n}.$$

En effet, d'après le théorème de Merle, il s'agit de vérifier:

$$-1 + \frac{\bar{\beta}_g}{n_1 \dots n_{g-1}} = \frac{\mu + \beta_g - 1}{n}.$$

Or, l'on sait bien [cf. le cours de Zariski cité plus haut, p. 10] que $\mu = 2\delta = c$ conducteur de \mathcal{O} [défini par: $c - 1 \notin \Gamma$, $c + \mathbb{N} \subset \Gamma$] où $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, et que $\mu = n_g \cdot \bar{\beta}_g - \beta_g - (n - 1)$ d'après une formule donnée par Zariski dans son cours (p. 19).

Ceci fournit l'égalité demandée.

4.5. *Remarque.* M. Merle a aussi calculé les $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ d'un germe de courbe plane réduite, et vérifié que la suite des $\{e_q/m_q\}_{\text{red}}$ ne dépendait que des caractéristiques des branches et de leurs nombres d'intersection 2 à 2.

§ 5. Calcul des invariants $\{e_q/m_q\}$ (suite)

5.1. **Proposition.** Soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0$, $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée. Il existe un ouvert dense U de la variété des drapeaux de nationalité $(0, 1, 2, \dots, n+1)$ tel que si $(0=0, z_0=0, z_0=z_1=0, \dots, z_0=\dots=z_n=0)$ définissent un drapeau appartenant à U , on ait

$$\overline{\left(z_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, z_n \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)} = \overline{m \cdot j(f)}$$

égalité des clôtures intégrales d'idéaux dans $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ où $m = (z_0, \dots, z_n)$, $j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$.

Démonstration. Puisque l'idéal engendré par les $z_i \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i}$ est contenu dans $m \cdot j(f)$, il suffit d'après le théorème de Rees de montrer que les idéaux ont même multiplicité. Or, d'après ([C.E.W.], chap. I, 2.10), la multiplicité de $m \cdot j(f)$ est :

$$e(m \cdot j(f)) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \mu^{(i)}$$

et la multiplicité de l'idéal de gauche n'est autre que la multiplicité d'intersection de l'hypersurface $z_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0$ avec la « courbe superpolaire » définie par l'idéal $\left(z_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, z_n \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$. Or, si notre drapeau de plans est générique, nous avons

$$e\left(z_0, \dots, z_i, \frac{\partial f}{\partial z_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} = \mu^{(n-i)}$$

puisque c'est $(S_H \cdot H)_0$ (cf. 1.2). L'additivité des multiplicités d'intersection donne alors le résultat.

5.2. *Remarque 1.* J'ignore si le résultat de 5.1 reste vrai sans l'hypothèse de singularité isolée.

5.3. *Remarque 2.* Si l'on décompose la courbe définie par $z_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = z_n \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$ en ses composantes irréductibles Δ_k , on s'aperçoit que la suite des $\left\{ \frac{(\Delta_k, X''_0)_0}{m(\Delta_k)} \right\}_{\text{red}}$ où X''_0 désigne l'hypersurface $z_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0$ contient les $\{(e_q/m_q) + 1\}_{\text{red}}$ de $(X_0, 0)$

et qui plus est elle contient aussi l'ensemble des invariants $\{(e_q/m_q)+1\}_{red}^{(i)}$ de l'intersection de X_0 avec un i -plan général, ensemble d'invariants qui est bien défini d'après le théorème 5 et le théorème 6. Ce processus nous donne ainsi «dans le désordre» les invariants $\{e_q/m_q\}$ de X_0 et de ses sections planes générales. On peut se demander si la dimension «fait le tri» entre les e_q/m_q de X_0 et de ses sections, c'est-à-dire si, notant $\{e_q/m_q\}^{(n+1)}$ la suite associée à $(X_0, 0)$ et $\{e_q/m_q\}^{(n)}$ celle associée à une section hyperplane générale, on a l'inégalité :

$$\text{Inf}_{q \in I} \left\{ \frac{e_q}{m_q} \right\}^{(n+1)} \geq \text{Sup}_{q' \in I'} \left\{ \frac{e_{q'}}{m_{q'}} \right\}^{(n)} .$$

La réponse est négative, comme on peut le voir en calculant les invariants de $f(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0^2 - z_1^3)^2 + z_0^5 z_1 + (z_2^2 - z_3^3)^2 + z_2^5 z_3$ mais cependant j'ai prouvé dans [T₃] :

$$\frac{\sum e_q^{(n+1)}}{\sum m_q^{(n+1)}} \geq \frac{\sum e_q^{(n)}}{\sum m_q^{(n)}} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \frac{\mu^{(n+1)}}{\mu^{(n)}} \geq \frac{\mu^{(n)}}{\mu^{(n-1)}}$$

ceci correspond à une sorte de «convexité grossière» du grand polygone de Newton que l'on verra au § 6.

§ 6. Le grand polygone d'une singularité isolée d'hypersurface

6.1. Ce paragraphe va résumer graphiquement une partie des résultats précédents.

Examinons la construction suivante: soit $f(z_0, \dots, z_n) = 0$ définissant une singularité isolée d'hypersurface, construisons le polygone de Newton (dans les coordonnées (u, v)) de l'image par $v = \frac{\partial f}{\partial z_0}$, $u = z_0$ de la courbe polaire S_H associée à l'hyperplan $z_0 = 0$, supposé général. Ce polygone de Newton rencontre l'axe vertical au point de coordonnée $(0, \mu^{(n)})$ (où $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}(X_0, 0)$) (cf. preuve du théorème 6). De ce point, portons une ligne horizontale vers la gauche, sur une longueur égale à $\mu^{(n)}$, puis du point obtenu une ligne verticale sur une hauteur égale à $\mu^{(n-1)}$. Dans le secteur ainsi obtenu, nous pouvons tracer le polygone de Newton associé comme ci-dessus à $X_0 \cap H$, et itérer cette construction jusqu'au moment où nous traçons sur une verticale une hauteur égale à $\mu^{(0)} = 1$. On obtient ainsi d'une part un escalier gravissant une parallèle à la seconde bissectrice, et dont chaque marche a pour hauteur et pour largeur un des $\mu^{(i)}$, et d'autre part un grand polygone rencontrant le saillant de chaque marche.

Le théorème 6' exprime que si l'escalier est constant dans une déformation de singularités isolées d'hypersurfaces, le polygone tout entier est aussi constant. Les valeurs absolues des pentes des côtés de ce polygone sont bien sûr les $\{(e_q/m_q)^{-1}\}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n+1$) et l'on peut remarquer que la seule donnée du polygone détermine les $\mu^{(i)}$, puisque il est bien clair que l'on peut reconstituer la parallèle à la seconde bissectrice mentionnée ci-dessus, et donc aussi l'escalier compris entre le polygone et cette droite. Nous retiendrons donc que l'on peut associer à chaque singularité isolée d'hypersurface un tel «grand polygone» qui ne dépend

que de sa classe de (c)-cosécance et sur lequel on peut lire divers caractères de la singularité, dont les $\mu^{(i)}$, les degrés de (c)-suffisance des sections planes génériques (théorème 8) et au vu duquel on peut aussi décider si la singularité est (c)-cosécante à une singularité de Pham-Brieskorn (corollaire 2.7). En fait, après 5.1, le grand polygone de Newton peut être construit à partir de la seule donnée de la classe d'isomorphisme de l'algèbre artienne $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}/\overline{\mathcal{J}(f)}$.

D'après le théorème de Merle, le grand polygone de Newton d'un germe de courbe plane irréductible aura $g+1$ côtés, où g est le nombre d'exposants caractéristiques de Puiseux de la courbe. Les projections de ces côtés sur l'axe vertical auront pour longueurs: $(1, n_1-1, n_1(n_2-1), \dots, n_1 \dots n_{g-1}(n_g-1))$ et les inverses des pentes sont donnés par:

$$\left(n-1, \bar{\beta}_1-1, \dots, \frac{\bar{\beta}}{n_1 \dots n_{g-1}}-1, \dots, \frac{\bar{\beta}_g}{n_1 \dots n_{g-1}}-1 \right)$$

avec les notations du § 4 (cf. [Me]).

Remarque. Il est parfois plus commode de refaire toutes les constructions en remplaçant les e_q par les e_q+m_q et les $\mu^{(i)}$ «horizontaux» par les $\mu^{(i)}+\mu^{(i-1)}$. Par exemple cela donnerait meilleure apparence à la suite des pentes ci-dessus:

$$\left(n, \bar{\beta}_1, \frac{\bar{\beta}_2}{n_1}, \dots, \frac{\bar{\beta}_g}{n_1 \dots n_{g-1}} \right).$$

Les deux points de vue sont bien sûr équivalents (cf. théorème 6'').

6.2. Pour terminer, voici un exemple montrant que l'invariance du polygone de Newton par (c)-cosécance est un phénomène assez fin, puisque le nombre des composantes irréductibles de la courbe polaire générale peut changer lors d'une déformation satisfaisant la condition (c).

Considérons la famille de germes de courbes planes d'équation

$$Y^4 + X^9 + tY^2 X^5 = 0.$$

Cette famille est équisingulière au sens de Zariski, donc (c)-équisingulière (cf. [I.E.P.] § 2) mais pour $t=0$ la courbe polaire est irréductible, et $e_1^0=24$, $m_1^0=3$ et pour $t \neq 0$ la courbe polaire est réductible et a deux composantes donnant $e_1^t=8$, $m_1^t=1$, $e_2^t=16$, $m_2^t=2$. Cependant, le grand polygone de Newton ne change pas.

Appendice

Première partie: Sur la condition (c) (rappels)

Soit $F(z_0, \dots, z_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, y_1, \dots, y_k\} \simeq \mathcal{O}_{n+1+k}$, tel que, en posant $\mathcal{S} = (z_0, \dots, z_n) \cdot \mathcal{O}_{n+1+k}$ et $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) \cdot \mathcal{O}_{n+1+k}$, on ait $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$.

On dit que l'hypersurface $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1} \times Y, 0)$ définie par $F=0$ satisfait la condition (c) le long du sous-espace $Y \simeq 0 \times Y$ défini par \mathcal{S} au point $0 \in Y$, si l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} \in \overline{\mathcal{S} \cdot \mathcal{J}} \quad (1 \leq j \leq k)$$

i.e. $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ est entier sur $\mathcal{S} \cdot \mathcal{J}$.

Remarquons, pour éclairer cette condition, que si X est l'espace total d'une famille $(X_y)_{y \in Y}$ d'hypersurfaces à singularités isolées, et si il existe un entier a tel que $\mathcal{S}^a \subset \mathcal{J}$, alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\frac{\partial F}{\partial y_j} \in \mathcal{J} \quad (1 \leq j \leq k)$,
- 2) $\frac{\partial F}{\partial y_j} \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{J} \quad (1 \leq j \leq k)$.

3) F est, localement en 0, analytiquement triviale le long de Y , i.e. il existe un germe d'isomorphisme analytique $\varphi: (\mathbb{C}^{n+1} \times Y, 0) \sim (\mathbb{C}^{n+1} \times Y, 0)$ compatible avec la projection sur Y , et tel que

$$F \circ \varphi = F(z_0, \dots, z_n, 0, \dots, 0).$$

[Ici on a noté $X_y = X \cap (\mathbb{C}^{n+1} \times \{y\})$, fibre de la restriction à X de la projection $\mathbb{C}^{n+1} \times Y \rightarrow Y$ donnée par notre choix de coordonnées.]

La condition (c) peut donc être vue comme un affaiblissement de la condition de trivialité 2) ci-dessus. On peut démontrer ([T₄], [I.E.P.]) qu'elle est indépendante du choix du générateur F de l'idéal définissant $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ et du choix de la rétraction $(\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (Y, 0)$ ($N = n + 1 + k$). Par ailleurs, on a :

Théorème. *Si la fibre spéciale $(X_0, 0)$ est à singularité isolée, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X satisfait la condition (c) le long de Y en 0.
- 2) Pour tout champ de vecteurs holomorphe ∂ sur Y , il existe un champ de vecteurs D sur (un représentant assez petit de) $\mathbb{C}^{n+1} \times Y$ qui est rugueux au sens de [V], analytique réel hors de Y , et tangent aux hypersurfaces de niveau de F , et se projette sur ∂ par la projection $\mathbb{C}^{n+1} \times Y \rightarrow Y$.
- 3) Toutes les hypersurfaces (resp. fonctions) $(X_y, 0)$ (resp. $F(z_0, \dots, z_n, y)$) ont même type topologique ($y \in Y$) ainsi que leurs sections planes génériques de toutes dimensions (resp. restrictions aux plans d'un drapeau générique de plans de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$).
- 4) La suite $\mu^*(X_y, 0)$ est indépendante de $y \in Y$.

La démonstration utilise le schéma donné dans [C.E.W.] chap. II, perfectionné dans [I.E.P.] avec l'appendice 2 de [T₂]. Seul 1) \Rightarrow 2) ne peut être fabriqué directement à partir de ces références. Mais il suffit de remarquer que si nous pensons à notre champ de vecteurs sur Y comme à une dérivation ∂ de $\mathcal{O}_{Y,0}$,

la dérivation de \mathcal{O}_{n+1+k}

$$D = \tilde{\partial} - \sum_{i=0}^n \frac{\tilde{\partial} F \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_i}}{\sum_{i=0}^n \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|^2} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

[où $\tilde{\partial}$ désigne l'extension naturelle de ∂ à $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, Y_1, \dots, Y_k\}$ par $\tilde{\partial} z_i = 0$] représente un champ de vecteurs satisfaisant, justement parce que $|\tilde{\partial} F| \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right| \leq C \sup_i |z_i| \sum_0^n \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|^2$ grâce à la condition (c). On peut ainsi réaliser, en intégrant les champs de vecteurs correspondant à des ∂_j ($1 \leq j \leq k$) formant une base des champs de vecteurs sur Y , une trivialisat[i]on topologique de F (donc de X) le long de Y . Comme par ailleurs, si (c) est réalisée, ([T₄]) il existe un ouvert dense de l'espace des drapeaux de plans de natio- $(k, k+1, \dots, k+n+1)$ dans \mathbb{C}^{n+1+k} , contenant Y tel que (c) soit encore réalisé pour l'intersection de X avec chaque plan apparaissant dans un drapeau appartenant à cet ouvert, on obtient le point 3). Le point 4) résulte de ceci et du fait que le nombre de Milnor est un invariant topologique, et enfin 4) \Rightarrow 1) est précisément ce qui utilise [C.E.W.] et [T₂], App. 2.

Appendice

Deuxième partie

Introduction. Je montre ici « μ constant $\Rightarrow \mu^*$ constant» (cf. [C.E.W.], Préambule) dans un cas particulier: celui d'une famille d'hypersurfaces à singularité isolée qui sont toutes sections hyperplanes d'une même hypersurface à singularité isolée. Les notations sont celles de [C.E.W.].

Théorème 1. Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée. Soit $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un hyperplan. Choisissons des coordonnées (z_0, \dots, z_n) telles que H ait pour équation $z_0 = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\mu_0(X_0 \cap H, 0) = \mu_0^{(n)}(X_0, 0)$, i.e. le nombre de Milnor de $X_0 \cap H$ est celui d'une section hyperplane générique, c'est-à-dire qu'il est le plus petit possible.

2) $\frac{\partial f}{\partial z_0} \cdot \mathcal{O}_{X_0, 0} \in \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)} \cdot \mathcal{O}_{X_0, 0}$ où la barre désigne la fermeture intégrale. Ceci signifie que H n'est pas adhérent (dans \mathbb{P}^n) à l'ensemble des directions d'hyperplans tangents à $(X_1, 0)$ en des points lisses ([C.E.W.] chap. I, 2.9).

3) Si pour $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ nous désignons par $g_a \in \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\}$ la série obtenue en substituant $\sum_1^n a_i z_i$ à z_0 dans g ;

Il existe un entier t tel que

$$(z_1, \dots, z_n)^t \cdot \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\} \subset \left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a \right) \cdot \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\}.$$

De plus, chacune de ces conditions entraîne :

$$4) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a \right) \cdot \mathbf{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\}} \\ = \overline{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right) \cdot \mathbf{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\}}$$

et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a \in \overline{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right) \cdot \mathbf{C}\{\mathbf{a}, \mathbf{z}\}} \quad (\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n), \mathbf{z}=(z_1, \dots, z_n)).$$

Démonstration. L'équivalence de 1) et 2) est démontrée, à l'aide d'un théorème de Rees, dans ([C.E.W.], chap. II, 1.6).

Montrons que 1) \Leftrightarrow 3). Nous pouvons considérer $f_a=0$ ($f_a=f(\sum a_i z_i, z_1, \dots, z_n)$) comme définissant une hypersurface Z de $Y \times \mathbf{C}^n$ où nous avons pris $Y=\mathbf{C}^n$ (coordonnées a_1, \dots, a_n), si $\pi : (Z, 0) \rightarrow (Y, 0)$ désigne la restriction à Z de la projection $Y \times \mathbf{C}^n \rightarrow Y$, la fibre de π en dessus d'un point $y \in Y$ de coordonnées (a_1, \dots, a_n) est isomorphe à l'intersection de $(X_0, 0)$ par l'hyperplan $z_0 - \sum a_i z_i = 0$. (Tout ceci est bien sûr défini en fait dans un voisinage de $Y \times 0$ dans $Y \times \mathbf{C}^n$ assez petit pour que f_a converge, que nous continuons de noter $Y \times \mathbf{C}^n$.) Il résulte de l'équivalence de 1) et 2) que l'ensemble des hyperplans $H \in \mathbf{IP}^n$ tels que $\mu_0(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$ est un ouvert analytique dense de \mathbf{IP}^n , complémentaire du fermé de Zariski formé des directions limites d'hyperplans tangents à X_0 en des points lisses. Il est donc équivalent de dire que $\mu(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$ et de dire qu'il existe un voisinage U de H dans \mathbf{IP}^n , et en particulier dans la carte affine de \mathbf{IP}^n correspondant aux hyperplans $z_0 - \sum a_i z_i = 0$, tel que le nombre de Milnor $\mu(X_0 \cap H', 0)$ soit indépendant de $H' \in U$ c'est-à-dire que la famille Z des sections hyperplanes de X_0 satisfait la condition « μ constant» (cf. [I. E. P.], 2.3.2) le long de $Y \times 0$ au voisinage de $H \in Y$. D'après (Loc. cit.) ceci est précisément l'équivalence de 1) et 3).

Montrons maintenant que 3) \Rightarrow 4). Si 3) est réalisée, $\left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a \right)$ est une suite régulière dans $\mathbf{C}\{\mathbf{a}, \mathbf{z}\}$. Posons $I_1 = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a \right) \cdot \mathbf{C}\{\mathbf{a}, \mathbf{z}\}$ et $I_2 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right) \cdot \mathbf{C}\{\mathbf{a}, \mathbf{z}\}$. Pour vérifier que $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ nous pouvons ([C.E.W.], 0.7) nous contenter de vérifier l'assertion suivante :

Il existe un voisinage V de 0 dans $Y \times \mathbf{C}^n$ tel que, si $T \xrightarrow{p} V$ désigne l'éclatement normalisé de l'Idéal engendré par I_1 dans \mathcal{O}_V , nous avons en un point t assez général de chaque composante irréductible du diviseur exceptionnel de $p, I_2 \cdot \mathcal{O}_{T,t} \subset I_1 \cdot \mathcal{O}_{T,t}$. Ceci nous assurera de l'inclusion $\bar{I}_2 \subset \bar{I}_1$, et nous savons déjà que $I_1 \subset I_2$, donc $\bar{I}_1 \subset \bar{I}_2$.

Or, I_1 est engendré par une suite régulière, et $\sqrt{I_1} = (z_1, \dots, z_n) \cdot \mathbf{C}\{\mathbf{a}, \mathbf{z}\}$, donc pour un V assez petit, l'image par p de chaque composante irréductible de D est $(Y \times 0) \cap V$, et chaque composante irréductible D_i de D contient un ouvert analytique dense U_i tel que en chaque point $t \in U_i$ le morphisme $D_{\text{red}} \rightarrow (Y \times 0) \cap V$ induit par p soit lisse. De plus, puisque D est propre au dessus de $(Y \times 0) \cap V$, il

existe un ouvert analytique dense V_1 de $(Y \times 0) \cap V$ tel que $p^{-1}(V_1) \cap U_i$ soit un ouvert analytique dense de U_i . Un calcul facile en prenant des coordonnées (cf. [C.E.W.], I, 2.7) montre que pour vérifier $I_2 \cdot \mathcal{O}_{T,t} \subset I_1 \cdot \mathcal{O}_{T,t}$ en un point $t \in p^{-1}(V_1) \cap U_i$, il suffit de vérifier que si $p(t)$ a pour coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $(Y \times 0)$ nous avons: $\overline{I_2 \cdot \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\} / \mathcal{A}} \subset \overline{I_1 \cdot \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\} / \mathcal{A}}$ où \mathcal{A} désigne l'idéal engendré par $(a_1 - \alpha_1, \dots, a_n - \alpha_n)$ mais ceci est précisément la condition que ([C.E.W.], chap. I, 2.7) démontre être réalisée sur un ouvert dense de $(Y \times 0)$, qui rencontre certainement V_1 . Montrons maintenant que en fait

$\bar{I}_2 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right)$. Soit I_3 l'idéal engendré par $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right)$ dans $\mathbb{C}\{a, z\}$.

Puisque $\frac{\partial}{\partial z_i} f_a = a_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)_a$ nous avons :

$$I_2 \supset I_3 + (a_1, \dots, a_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a \supset I_1$$

et puisque $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$, $\overline{I_3 + (a_1, \dots, a_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a} = \bar{I}_2$ et puisque $I_3 \subset I_2$ nous pouvons appliquer le lemme de Nakayama intégral ([C.E.W.], chap. II, 2.4) pour conclure $\bar{I}_3 = \bar{I}_2$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée. Soit H un hyperplan de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Si $\mu(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$, $\mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0)$ ($0 \leq i \leq n$). Ceci signifie que deux sections hyperplanes $X_0 \cap H$, $X_0 \cap H'$ quelconques de X_0 telles que $\mu(X_0 \cap H) = \mu(X_0 \cap H', 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$ ont en fait même suite μ^* , et peuvent donc être jointes par une déformation à 1 paramètre à μ^* constant (elles sont (c)-cosécantes, dans la terminologie de ([I.E.P.], 3.2)). En particulier, elles ont le même type topologique.

Démonstration. L'ensemble W des $H \in \mathbb{P}^n$ tels que tous les $\mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0)$ soient minimaux est un ouvert analytique dense de \mathbb{P}^n , et de plus, il résulte de ([C.E.W.], chap. I, 2.7) que si $H \in W$, $\mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0)$ ($0 \leq i \leq n$). Il nous suffit donc de montrer que: $\mu^{(n)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0) \Rightarrow H \in W$ et pour montrer ce point, il nous suffit de montrer que si $\mu^{(n)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$, il existe un voisinage V de H dans \mathbb{P}^n tel que $H' \in V \Rightarrow \mu^*(X_0 \cap H', 0) = \mu^*(X_0 \cap H, 0)$ ou encore, d'après ([I.E.P.], théorème 3) que la famille Z des sections hyperplanes de X_0 satisfait la condition (c) au voisinage de H , c'est-à-dire ([I.E.P.], 2.5)

$$(*) \quad \overline{\frac{\partial}{\partial a_i} f_a \in (z_1, \dots, z_n) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a \right)} \quad \text{dans } \mathbb{C}\{a, z\},$$

or, $\frac{\partial}{\partial a_i} f_a = z_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \right)_a$ et nous avons montré au théorème 1, 4) que si $H: z_0 = 0$ vérifie $\mu^{(n)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(n)}(X_0, 0)$ nous avons. (Ceci résulte directement de la première partie de l'énoncé de 4) du Th. 1, et non de la seconde, qui me servira ailleurs.)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a \in \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a\right)}.$$

La condition (*) en résulte immédiatement puisque l'on a toujours, pour deux idéaux quelconques $\overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}}$. Q. E. D.

Remarque. Soit $L \subset \mathbb{P}^n$ l'ensemble des directions limites d'hyperplans tangents à X aux points lisses voisins de 0: c'est un diviseur de \mathbb{P}^n . Nous venons de montrer que $\mathbb{P}^n - L$ est l'ensemble des points $H \subset \mathbb{P}^n$ tels que $\mu^{(n)}(X_0, 0) = \mu^{(n)}(X_0 \cap H, 0)$, que ceci équivaut à $\mu^*(X_0) = (\mu^{(n+1)}(X_0), \mu^*(X_0 \cap H))$, et enfin que $\mathbb{P}^n - L$ est l'ensemble des points de \mathbb{P}^n où la famille des sections de X_0 satisfait la condition (c).

Références

- [C.E.W.] Teissier, B.: Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse 1972, Astérisque No 7-8, Soc. Math. Fr. (1973)
- [I.E.P.] Teissier, B.: Introduction to equisingularity problems. Proc. A.M.S. Conference on Algebraic Geometry, Arcata 1974, A.M.S. Providence R.I. (1975)
- [H] Hironaka, H.: Introduction to the theory of infinitely near singular points, Memorias de matematica del instituto Jorge Juan (Serrano 23, Madrid 6, Espagne) No. 28 (1974)
- [K] Kuiper, N.: C^1 -equivalence of functions near critical points, Symposium on infinite dimensional topology, Princeton U. P. 1972. [Voir aussi: Liverpool singularities symposium 1970, Springer Lecture Notes No 192]
- [Me] Merle, M.: Invariants polaires des courbes planes. A paraître dans Inventiones Math.
- [L] Lê Dũng Tráng: La monodromie n'a pas de points fixes. J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, **22** (3), 409-427 (1975)
- [L.R.] Lê Dũng Tráng, Ramanujam, C.P.: The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Am. J. Math. **98** (1), 67-78 (1976)
- [L.T] Lejeune, M., Teissier, B.: Séminaire 1973-74, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique. A paraître
- [Ri] Risler, J.J.: Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane. Bull. Soc. Math. Fr. **99** (4), 305-311 (1971)
- [T] Thom, R.: Topological models in biology. Topology **8**, 313-335 (1969)
- [T₁] Teissier, B.: Sur la résolution simultanée comme condition d'équisingularité. Tirage Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 91120 Palaiseau, No M230.1175 (1975)
- [T₂] Teissier, B.: Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes et un principe de spécialisation de la dépendance intégrale. Tirage Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 91120 Palaiseau, No M208.0675 (1975)
- [T₃] Teissier, B.: Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités. Disponible au Centre de Mathématiques
- [T₄] Teissier, B.: The hunting of invariants in the geometry of discriminants. Notes prepared for the nordic summer school Oslo 1976. To appear
- [V] Verdier, J.L.: Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. Inventiones math. **36**, 295-312 (1976)
- [Z] Zariski, O.: Le problème des modules pour les branches planes. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique 1973

Reçu le 7 décembre 1976