

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

**Leçons de mathématiques d'aujourd'hui**

Jeudi 7 octobre 1999

**Volumes des corps convexes;  
géométrie et algèbre**

**Bernard TEISSIER<sup>1</sup>**

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7589 du CNRS

---

<sup>1</sup>Je remercie Carine REYDY pour une première rédaction et Patrick POPESCU-PAMPU pour une relecture attentive.

## 1. RÉSUMÉ

Une *valuation* sur une classe  $\mathcal{S}_d$  de sous-ensembles de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^d$  à valeurs dans un groupe abélien  $\Phi$  est une application

$$v: \mathcal{S}_d \rightarrow \Phi$$

vérifiant  $v(\emptyset) = 0$  et, chaque fois que  $E_1, E_2, E_1 \cap E_2$  et la réunion  $E_1 \cup E_2$  sont dans  $\mathcal{S}_d$ , l'égalité

$$v(E_1 \cup E_2) = v(E_1) + v(E_2) - v(E_1 \cap E_2).$$

La valuation la plus connue est probablement le volume  $d$ -dimensionnel défini sur la classe des sous-ensembles mesurables bornés et prenant ses valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Remarquons qu'elle est invariante par déplacement, c'est à dire par isométrie affine. Un autre exemple est la caractéristique d'Euler-Poincaré, définie en particulier sur la classe des *polyconvexes* (réunions finies d'ensembles convexes compacts) et invariante par homéomorphisme. Le thème central de cet exposé est l'étude des valuations à valeurs réelles ou entières et en particulier la question de savoir dans quelle mesure elles ressemblent au volume ou à la caractéristique d'Euler-Poincaré. Nous étudierons particulièrement des valuations qui en quelque sorte "interpolent" du volume à la caractéristique d'Euler-Poincaré. Des résultats très récents jettent une lumière nouvelle sur ce type de problème.

## 2. LE PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE

**2.1. Didon.** Ces leçons s'appellent "Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui" mais je vais commencer par des mathématiques d'il y a bien longtemps. Je vais vous parler du problème isopérimétrique. La plus ancienne attestation historique (ou du moins mythologique) que l'on en ait est l'histoire de la fondation de Carthage par la reine Didon ( $-9^{\text{ème}}$  siècle) : ayant dû fuir sa ville de Tyr, Didon trouva refuge avec sa suite sur les côtes d'Afrique du Nord. Elle acheta au prince local le droit de rester sur une surface *que pourrait contenir la peau d'un bœuf*. Mais Didon était une femme avisée : elle eut l'idée de découper la peau de bœuf en très fines lanières qui, réunies bout à bout, firent une longue bande, avec laquelle elle entourait la plus vaste surface possible sur la plage ; et c'est là qu'elle fonda la ville de Carthage. Le prince, impressionné, voulut l'épouser et ensuite l'histoire sort du champ de cet exposé ; sachez seulement que Didon est un surnom, qui signifie "la vagabonde". La question se pose donc de savoir quelle surface maximum on peut enfermer avec une lanière de longueur donnée dont les extrémités sont sur une droite, ici le rivage. Si la reine Didon donna la bonne réponse, elle ne donna pas la démonstration, et c'est presque 3000 ans plus tard qu'on démontra qu'elle devait tracer un demi-cercle (avec le diamètre sur le rivage). C'est un avatar du *problème isopérimétrique*, qui est de déterminer les relations existant entre le volume d'un corps dans un espace métrique (par exemple l'espace euclidien) de dimension  $d$  et le "volume" (mesuré en dimension  $d - 1$ ) de son bord : surface et périmètre dans le plan, volume d'un corps et surface de son bord dans l'espace, etc. Ce problème a joué un rôle historique important par ses conséquences pratiques et aussi parce que c'était un problème de calcul des variations bien avant que celui-ci n'existe.

Dans Homère, on ne mesure pas la taille des villes par leur surface, mais par leur périmètre : la ville de Troie "fait" 10200 pas. Si on achète un terrain de tel périmètre, comment s'arranger pour avoir la superficie maximum ? Bien que la solution (le cercle) ait probablement été connue (au moins sous la forme qui dit que de tous les polygones  $n$  côtés de périmètre donné c'est le polygone régulier qui enferme la plus grande aire) depuis le cinquième siècle avant Jésus-Christ, Proclus (411-485) mentionne des procès qui opposèrent, au premier siècle de notre ère,

les membres de communautés grecques, qui avaient décidé de partager la terre équitablement en lopins de même périmètre et avaient eu des surprises au moment de la récolte.

La découverte de la notion d'aire est sans doute un moment majeur des mathématiques, et cette notion était peut-être considérée à l'époque comme la pointe de l'abstraction. Le physicien Sokal, qui se moque (voir [So1], [So2]) des littéraires qui invoquent des notions de mathématiques et de physique sans les comprendre comme les professionnels, a un devancier illustre en la personne de Platon; celui-ci parodie dans *La République* (voir [P], 587d) les émules de Pythagore qui mettaient des nombres partout. Il donne une démonstration fantaisiste du fait que " la mesure de la grandeur (=l'aire) de l'image du plaisir du tyran est un carré parfait"<sup>2</sup>; l'aire était peut-être pour Platon ce que la théorie quantique des champs est pour Sokal.

Je vais maintenant parler de quelque chose de très différent, en apparence : supposez que vous ayez une boîte  $K$  en forme de polygone convexe, à l'intérieur de laquelle se trouvent des insectes ou bien des produits chimiques, qui vont s'éloigner de  $K$  dans l'environnement, à partir de tout le contour de ce polygone, à vitesse constante (disons à la vitesse 1, en choisissant bien les unités) perpendiculairement au contour. Vous vous posez la question de savoir quelle est la mesure de la surface contaminée à l'instant  $t$ , c'est-à-dire la surface obtenue en prenant tous les points qui sont à une distance du polygone inférieure à  $t$  : autrement dit, quelle est l'aire de l'ensemble  $K + t\mathbf{B}$  des points situés à une distance  $\leq t$  de  $K$  ?  $\mathbf{B}$  désigne la boule unité, c'est-à-dire ici le disque unité, puisqu'on est dans le plan. C'est le moment de donner quelques définitions :

**Définition 1.** a) Un ensemble  $E \subset \mathbf{R}^d$  est dit convexe si pour tous points  $x$  et  $y$  dans  $E$ , le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $E$ .

b) L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $E \subset \mathbf{R}^d$  est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de  $\mathbf{R}^d$  contenant  $E$  :

$$\text{Conv}(E) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supseteq E}} C.$$

C'est donc le plus petit convexe contenant  $E$ .

Je m'intéresserai surtout à des sous-ensembles convexes compacts d'intérieur non vide.

**Définition 2.** Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux sous-ensembles convexes de  $\mathbf{R}^d$ ; on appelle somme de Minkowski de  $K_1$  et  $K_2$  et on note  $K_1 + K_2$  l'ensemble

$$K_1 + K_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}.$$

C'est un ensemble convexe, qui à translation près ne dépend que de  $K_1$  et  $K_2$  à translation près.

On définit aussi l'homothétie de  $K$  de rapport  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  par :  $\lambda K = \{\lambda x, x \in K\}$ . Une translation sur  $K$  se traduit par une translation sur  $\lambda K$ .

En dimension 2, le dessin montre que si j'appelle  $S$  l'aire de  $K$  et  $L$  son périmètre, la surface cherchée a, pour  $t \geq 0$ , une aire égale à :

$$\text{aire}(K + t\mathbf{B}) = S + Lt + \pi t^2 = P_K(t);$$

c'est un polynôme de degré 2 en  $t$ . Cette expression pour l'aire de  $K + t\mathbf{B}$  est en fait valable pour tout sous-ensemble convexe compact du plan; à chaque tel convexe est donc associé un polynôme de degré deux  $P_K(t) = S + Lt + \pi t^2$ . Le discriminant de ce polynôme est  $L^2 - 4\pi S$ . L' *inégalité isopérimétrique* dans le plan est :

$$L^2 - 4\pi S \geq 0,$$

---

<sup>2</sup>Traduction de l'auteur.

et manifeste une relation fondamentale entre le périmètre et l'aire. Cette inégalité signifie aussi que  $P_K$  a des racines réelles. Comme  $P_K$  est un polynôme à coefficients positifs, ses racines sont négatives, donc on obtient un graphe de ce type :

Le *problème isopérimétrique* dans le plan est de prouver que, pour n'importe quelle courbe fermée simple assez modérément accidentée pour avoir une longueur mesurable  $L$  finie (une courbe rectifiable; en gros, non fractale) et enfermant une aire  $S$ , l'inégalité isopérimétrique est valide, et surtout que *l'égalité n'a lieu que si la courbe est un cercle*. Notez que si la courbe est de longueur infinie, l'inégalité est vraie mais sans intérêt. Notez aussi que l'enveloppe convexe d'un domaine donné du plan enferme une surface plus grande avec un périmètre inférieur. Il suffit donc pour le problème isopérimétrique plan de considérer des domaines convexes. Ceci est radicalement faux en dimension  $> 2$ .

**2.2. Bonnesen.** En 1921, Bonnesen [Bo] a démontré l'inégalité  $L^2 - 4\pi S \geq \pi^2(R - r)^2$  où  $r$  est le rayon du plus grand cercle inscrit dans  $K$ , et  $R$  le rayon du plus petit cercle circonscrit (contenant  $K$ ). Cette inégalité est valable pour n'importe quel compact *convexe* du plan.

Ce n'est que plus tard que l'on a démontré que, pour tout compact convexe  $K$  du plan, d'aire  $S$  et de périmètre  $L$ , le segment  $[r, R]$  est compris entre les racines de  $P_K(-t)$ . Cela signifie que

$$\frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \geq R \geq r \geq \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}$$

et donc

$$R - r \leq \frac{\sqrt{L^2 - 4\pi S}}{\pi},$$

ce qui permet de retrouver l'inégalité de Bonnesen :

$$(1) \quad (R - r)^2 \leq \frac{L^2 - 4\pi S}{\pi^2}.$$

On a par conséquent  $L^2 - 4\pi S = 0 \Rightarrow R = r \Leftrightarrow K \text{ est un disque} \Rightarrow L^2 - 4\pi S = 0$ . L'inégalité de Bonnesen est très utile parce que, dans le problème isopérimétrique, il est assez facile de prouver l'inégalité  $L^2 - 4\pi S \geq 0$  ; ce qui est vraiment difficile, c'est de montrer que l'égalité n'a lieu *que* si  $K$  est un disque. Cela a été le problème dans toutes les tentatives de solution du problème isopérimétrique au cours des âges : au temps des Grecs, puis après l'invention de l'analyse infinitésimale au 18<sup>ème</sup> siècle ; le problème n'ayant été résolu complètement que vers 1895, par des méthodes d'analyse bien différentes de la preuve de Bonnesen, il a donc fallu environ 2900 ans pour résoudre complètement le problème isopérimétrique dans le plan !

Une partie des méthodes utilisées pour étudier le problème isopérimétrique dans le cas des corps convexes est due à Minkowski, qui était en partie motivé par des problèmes arithmétiques liés au décompte des points entiers (=à coordonnées entières) contenus dans certains ensembles convexes de  $\mathbf{R}^d$ ; nous allons donc passer un peu en revue ce qui peut se mesurer dans différents cas de figures (convexes).

### 3. GÉNÉRALISATIONS : VOLUMES MIXTES ET PROBLÈMES DE COMPTAGE

**3.1. Trois types de questions.** Il y a trois types particulièrement intéressants d'ensembles convexes compacts dans  $\mathbf{R}^d$  :

- les ensembles lisses ayant une frontière de classe  $C^\infty$ , ou du moins  $C^2$  ;
- les polyèdres convexes, ou *polytopes*, qui sont l'enveloppe convexe (voir Définition 1) d'un nombre fini de points ;
- les polytopes entiers, qui sont les polytopes dont les sommets sont des points du réseau entier  $\mathbf{Z}^d \subset \mathbf{R}^d$ .

Nous allons nous poser des questions propres à chacune de ces catégories :

- (1) pour les convexes lisses, on s'interrogera sur le volume (la mesure  $(d-1)$ -dimensionnelle) du bord, et sa courbure ;
- (2) pour les polyèdres convexes, on entre dans la théorie des complexes cellulaires ou simpliciaux, et le but va être de compter les faces de toutes dimensions et plus précisément de décrire la combinatoire des faces (compter les faces de chaque dimension, savoir quelles faces sont dans le bord d'une autre), ce que l'on appelle le *type combinatoire* du polytope ;
- (3) pour les polytopes entiers, on va compter le nombre de points entiers qu'ils contiennent.

Dans tous les cas, on dispose d'opérations sur les convexes étudiés: l'addition de Minkowski, l'homothétie (de rapport entier pour les polytopes entiers), la projection orthogonale sur un sous-espace, la section par un sous-espace affine, et l'on espère aussi comprendre le comportement de ce que l'on mesure lorsque l'on effectue ces opérations.

Je vais essayer de parler un peu de ces trois questions. Examinons d'abord ce qui se passe en dimension 2.

**3.2. Théorème de Minkowski-Steiner.** Ce que nous avons vu pour l'aire de  $K + t\mathbf{B}$  en dimension 2 est un cas particulier du théorème suivant :

**Théorème 1.** (Minkowski-Steiner) *Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux sous-ensembles convexes compacts de  $\mathbf{R}^d$ ; alors pour  $\lambda_1 \geq 0$  et  $\lambda_2 \geq 0$   $\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)$  est un polynôme homogène de degré  $d$  en  $\lambda_1, \lambda_2$ . On l'écrit :*

$$\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \text{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]}) \lambda_1^i \lambda_2^{d-i}.$$

Les coefficients  $\text{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$  sont appelés volumes mixtes de Minkowski. Les exposants entre crochets indiquent le degré d'homogénéité. On a :

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_1^{[d]}, K_2^{[0]}) &= \text{vol}(K_1), & \text{vol}(K_1^{[0]}, K_2^{[d]}) &= \text{vol}(K_2), \\ \text{vol}((\mu_1 K_1)^{[i]}, (\mu_2 K_2)^{[d-i]}) &= \mu_1^i \mu_2^{d-i} \text{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]}). \end{aligned}$$

En fait, ce résultat s'étend à  $r$  sous-ensembles convexes compacts  $K_1, \dots, K_r$  quelconques de  $\mathbf{R}^d$ ; pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tous  $\geq 0$ , on a pour  $\text{vol}(\sum_{i=1}^r \lambda_i K_i)$  une expression polynomiale en les  $\lambda_i$  que l'on peut écrire:

$$\text{vol}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i K_i\right) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r, |\alpha|=d} \frac{d!}{\alpha!} \text{vol}(K_1^{[\alpha_1]}, \dots, K_r^{[\alpha_r]}) \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_r^{\alpha_r},$$

où  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$  et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ . Cela définit les volumes mixtes  $\text{vol}(K_1^{[\alpha_1]}, \dots, K_r^{[\alpha_r]})$ , dont on peut montrer qu'ils sont  $\geq 0$ .

Remarquons l'égalité (exercice de calcul différentiel)

$$d \text{vol}(K^{[d-1]}, \mathbf{B}^{[1]}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}) - \text{vol}(K)}{\lambda} = \text{vol}(\partial K),$$

qui signifie que le quotient par  $d$  du volume  $(d-1)$ -dimensionnel du bord d'un convexe est le premier volume mixte avec la boule unité après le volume lui-même.

**3.3. Dimension 2. Inégalité isopérimétrique généralisée et formule de Pick.** Dans le cas particulier où  $K \subset \mathbf{R}^2$ , on a :  $\text{vol}(\partial K) = L$ , que nous avons appelé le périmètre  $L$ . Et nous retrouvons:

$$\text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}) = \text{vol}(K) + L\lambda + \pi\lambda^2.$$

Toujours en dimension 2, au lieu de prendre un convexe et la boule unité, on peut prendre deux convexes compacts quelconques :

$$\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = v_0 \lambda_1^2 + 2v_1 \lambda_1 \lambda_2 + v_2 \lambda_2^2$$

où  $v_0 = \text{vol}(K_1)$  et  $v_2 = \text{vol}(K_2)$ . Il reste vrai que  $v_1^2 - v_0 v_2 \geq 0$  et que si

$$r = \sup\{t, tK_2 \subseteq K_1 \text{ à translation près}\}$$

et

$$R = \inf\{t, tK_2 \supseteq K_1 \text{ à translation près}\},$$

alors

$$r \geq \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - v_0 v_2}}{v_2} \quad \text{et} \quad R \leq \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - v_0 v_2}}{v_2},$$

d'où

$$\frac{1}{4}(R - r)^2 v_2^2 \leq v_1^2 - v_0 v_2.$$

Donc les phénomènes que nous avons observés pour un convexe  $K$  et la boule  $\mathbf{B}$  restent vrais pour deux convexes compacts quelconques du plan (voir [Fl] et [Tel]).

**3.4. Comptage.** Regardons maintenant le deuxième problème évoqué tout à l'heure : en dimension 2, compter les faces pour un polygone convexe est vite fait. Soient  $f_0$  le nombre de sommets et  $f_1$  le nombre d'arêtes.  $(f_0, f_1)$  correspond à un nombre de sommets et d'arêtes d'un polygone convexe si et seulement si  $f_1 - f_0 = 0$ .

En revanche, compter le nombre de points entiers, même en dimension 2, est un problème beaucoup moins évident.

Notons tout de suite que *l'application qui à un convexe de  $\mathbf{R}^d$  associe le nombre de points du réseau entier  $\mathbf{Z}^d$  qu'il contient est une valuation à valeurs entières, invariante par les translations par des éléments du réseau.*

Nous verrons plus bas des résultats valables lorsque le convexe est un polytope à sommets entiers.

Voici le résultat principal en dimension 2 :<sup>3</sup>

**Théorème 2.** (Formule de Pick [Pic], 1899) *Soit  $P$  un polygone plan convexe à sommets entiers. Alors*

$$\#(P \cap \mathbf{Z}^2) = S(P) + 1/2\#(\partial P \cap \mathbf{Z}^2) + 1$$

où  $S(P)$  est l'aire de  $P$  et  $\partial P$  sa frontière.

Cette formule se généralise à peu près à n'importe quel polygone à sommets entiers (pas nécessairement convexe). Dès la dimension 3, le décompte des points entiers dans les polytopes entiers devient bien plus subtil; nous en parlerons plus bas.

Retenons que lorsque  $d = 2$ , les trois problèmes de dénombrement que nous avons vus ont des réponses précises, connues depuis une centaine d'années.

---

<sup>3</sup>On trouvera une preuve très courte de la formule de Pick dans [Fun], utilisant la formule de la caractéristique d'Euler, et une preuve très amusante dans [DiRo], utilisant la formule des résidus et la fonction  $\wp$  de Weierstrass. (Note de C. Reydy)

4. LES VOLUMES MIXTES EN DIMENSION  $d$ . FORMULES DE CROFTON ET DE CAUCHY.  
INÉGALITÉ DE ALEXANDROV-FENCHEL ET THÉORÈME D'HADWIGER

4.1. **Formules de Crofton et de Cauchy.** Je reviens au problème 1, mais désormais en dimension supérieure :  $d \geq 2$ . Il va toujours s'agir de comprendre la nature de ces volumes mixtes. Mon but, dans cet exposé, est de vous montrer, avec un certain nombre de digressions, des faits que je trouve jolis concernant la géométrie des convexes, mais qui se généralisent le plus souvent à un domaine beaucoup plus vaste que celui des convexes. Mon premier exemple est dû à Crofton ([Cro], 1868). Pour comprendre le rôle du périmètre en dimension 2, on va le considérer d'une manière différente. Introduisons la grassmanienne affine  $\text{Graff}(d, k)$ , qui est l'ensemble des sous-espaces affines de dimension  $k$  de  $\mathbf{R}^d$ . Cet ensemble est muni d'une structure de variété différentielle, dont voici une description:

Un espace affine  $A_k$  de dimension  $k$  peut se repérer de la façon suivante : on se donne un espace vectoriel  $V_k$  parallèle à  $A_k$  (passant par l'origine) et un point de l'orthogonal de  $V_k$ . Ceci détermine complètement un espace affine. La grassmanienne affine  $\text{Graff}(d, k)$  est donc un fibré en espaces vectoriels de dimension  $(d - k)$  sur la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$ , qui est une variété. Observons que le groupe des déplacements de  $\mathbf{R}^d$  agit sur  $\text{Graff}(d, k)$  en déplaçant les sous-espaces affines de dimension  $k$ . On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.** *Il existe sur  $\text{Graff}(d, k)$  une mesure invariante par le groupe des déplacements; elle est unique à un facteur constant près.*

On va maintenant se poser le problème de comprendre cette mesure. Son existence signifie que si je me donne dans le plan un paquet de droites affines, suffisamment régulier pour former un sous-ensemble mesurable, alors je peux lui attribuer une mesure, et que si je fais bouger ce paquet par un déplacement, la mesure ne changera pas. Soit maintenant  $L$  un segment de  $\mathbf{R}^2$  de longueur  $l$ . On définit :

$$W(L) = \{A_1 \subset \text{Graff}(2, 1) / A_1 \cap L \neq \emptyset\}.$$

C'est l'ensemble des droites affines qui rencontrent  $L$ . Soit  $Z(L)$  la mesure de  $W(L)$ . (Pour être tout à fait correct, il faudrait montrer que cet ensemble est mesurable : c'est très facile puisque dans chaque carte de  $\text{Graff}(2, 1)$  il est défini par des inégalités linéaires; je l'admettrai ici). L'invariance de la mesure implique que je peux déplacer  $L$  sans changer  $Z(L)$ , donc  $Z(L)$  est en fait une fonction qui ne dépend que de la longueur  $l$  de  $L$ ; notons cette fonction  $f(l)$ . Remarquons que si nous notons  $N(L; \ell)$  le nombre des points d'intersection d'une droite  $\ell$  du plan avec le segment  $L$  (c'est une fonction de  $\ell \in \text{Graff}(2, 1)$  qui vaut 0 ou 1 en dehors du sous-ensemble de  $\text{Graff}(2, 1)$  réduit au point correspondant à la droite  $\ell$  contenant  $L$ ), on a

$$Z(L) = \int_{\text{Graff}(2, 1)} N(L; \ell) d\ell,$$

où  $d\ell$  dénote provisoirement la mesure invariante sur  $\text{Graff}(2, 1)$  que nous considérons. Si maintenant je fabrique une ligne brisée en concaténant des segments:  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p$ , alors avec l'extension évidente de la signification de  $N(L; \ell)$ , je peux intégrer

$$\int_{\text{Graff}(2, 1)} N(L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p; \ell) d\ell = f(l_1 + \dots + l_p) = f(l_1) + \dots + f(l_p) :$$

il y a additivité. Je n'ai utilisé que le fait que j'ai une mesure invariante pour m'assurer que le résultat ne dépend que de la longueur des segments et pas de leur position, et le fait que, hors d'un ensemble de mesure nulle, le nombre des points d'intersection de  $\ell$  avec une réunion de

segments est la somme des nombres de points d'intersection avec chacun d'eux. Cela démontre que

$$f(r\ell) = rf(\ell), \quad \forall r \in \mathbf{Q}_+.$$

Par ailleurs, cette fonction  $f$  est évidemment croissante. La fonction  $f(\ell)$  est *linéaire sur les rationnels* et *croissante* donc, grâce par exemple à la notion de coupure de Dedekind, on voit qu'elle est linéaire partout, i.e.

$$f(\ell) = \alpha \ell \quad \text{pour un certain } \alpha \in \mathbf{R}_+^*.$$

Donc je connais à une constante multiplicative près la moyenne des nombres d'intersection des droites affines avec une ligne brisée, et cette moyenne ne dépend que de la longueur. Je peux maintenant approximer une courbe rectifiable quelconque par des lignes brisées. Par un passage à la limite standard

$$\int_{\text{Graff}(2,1)} N(C; \ell) d\ell = \alpha l(C)$$

où  $C$  est une courbe rectifiable,  $\alpha$  une constante,  $l(C)$  la longueur de  $C$  et  $N(C; \ell) = \#(C \cap \ell)$ . C'est la *formule de Crofton*: le nombre moyen des points d'intersection de droites avec une courbe donnée est, à une constante multiplicative près, la longueur de cette courbe. Comme nous verrons plus bas, cette formule est valable en toute dimension  $d$  : le nombre moyen d'intersections d'une droite avec un compact convexe  $K$  donné de  $\mathbf{R}^d$  est proportionnel au volume  $(d-1)$ -dimensionnel du bord  $\partial K$ . Des techniques peu éloignées de la formule de Crofton permettent par exemple d'estimer la mesure de la surface des poumons d'un être humain: à partir de coupes aléatoires numérisées du poumon, on demande à l'ordinateur de jeter dans le plan des droites aléatoires et de compter le nombre des points d'intersection. Des méthodes analogues permettent de mesurer la taille moyenne des pores des roches des gisements pétroliers, qui est un facteur important pour l'extraction.

Le type de raisonnement par lequel on vient d'établir la formule de Crofton est analogue à celui par lequel Barbier [Ba], en 1860, avait redémontré la formule de l'aiguille de Buffon : on se donne dans le plan un réseau de droites parallèles équidistantes, de pas  $\delta$ , on lance une aiguille de longueur  $l$  et on se demande quelle est la probabilité pour que l'aiguille touche une des droites. Pour n'importe quelle courbe rectifiable  $C$ , si on note  $p_n$  la probabilité que  $C$  rencontre  $n$  droites du réseau, *l'espérance mathématique du nombre de droites intersectées*, c'est-à-dire  $E(C) = \sum np_n$ , est proportionnelle à la longueur de  $C$ . Pour le montrer, on commence avec une aiguille (un segment), puis on fait exactement le même raisonnement que précédemment : on montre que c'est additif et par passage à la limite, on montre qu'on peut considérer n'importe quelle courbe. On a donc

$$E(C) = \alpha l(C).$$

Si  $C$  est un cercle de diamètre  $\delta$ , il est facile de voir que  $E(C) = 2$ . On a donc  $2 = \alpha\pi\delta$ , d'où  $\alpha = \frac{2}{\pi\delta}$ . Par conséquent,  $E(\text{aiguille}) = \frac{2l}{\pi\delta}$ .

Revenons à présent à l'interprétation du volume mixte, qui va fournir une généralisation de la formule de Crofton. Fixons une notation pour le volume de la boule unité de l'espace euclidien de dimension  $d$ :

$$\text{vol}(\mathbf{B}^d) = \chi_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}.$$

On définit le  $j$ -ième volume mixte intrinsèque  $V_j(K)$  du convexe  $K \subset \mathbf{R}^d$  par

$$\chi_j V_j(K) = \binom{d}{j} \text{vol}(K^{[j]}, \mathbf{B}^{[d-j]}).$$



L'avantage est que ce volume ne dépend pas du plongement de notre espace affine. Je vais maintenant donner la généralisation de la formule de Crofton pour les convexes :

$$\int_{\text{Graff}(d,k)} V_j(K \cap E) d\mu_k(E) = \alpha_{d,j,k} V_{d+j-k}(K)$$

où  $\mu_k$  est "la" mesure invariante sur  $\text{Graff}(d, k)$  (les constantes dépendent évidemment de la normalisation choisie) et

$$\alpha_{d,j,k} = \frac{\binom{k}{j} \chi_k \chi_{n+j-k}}{\binom{d}{k-j} \chi_j \chi_d} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+j-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}.$$

Pour  $j = k - 1$ , on a

$$\int_{\text{Graff}(d,k)} V_{k-1}(K \cap E) d\mu_k(E) = C(d, k) V_{d-1}(K),$$

et on retrouve la formule de Crofton. Ici et plus bas  $C(d, i)$  désigne la constante appropriée, combinaison de coefficients binomiaux et de  $\chi_j$ , ne dépendant que de la dimension et du ou des indices apparaissant dans la formule, mais pouvant dépendre de celle-ci. Cette formule de Crofton généralisée permet de faire des récurrences sur la dimension. Il faut retenir de ce qui précède que les volumes mixtes se calculent en prenant des moyennes de volumes sur les *sections* (point de vue de Crofton). De même, je vais vous montrer que les volumes mixtes se calculent en prenant des moyennes de volumes sur les *projections* (point de vue de Cauchy) : je prends des directions  $L \in \text{Grass}(d, d-i)$  et je projette  $\mathbf{R}^d$  sur  $\mathbf{R}^i$  parallèlement à la direction  $L$  :

$$\begin{array}{c} \mathbf{R}^d \supset K \\ \downarrow \\ \mathbf{R}^i \supset \pi_L(K) \end{array}$$

Alors

$$V_i(K) = C(d, i) \int_{\text{Grass}(d, d-i)} \text{vol}_i(\pi_L(K)) d\mu(L).$$

Le  $i$ -ème volume mixte est la moyenne des volumes  $i$ -dimensionnels de projections sur les espaces de dimension  $i$ . Cette formule généralise une *formule de Cauchy* (pour  $i = d - 1$ ) ([Cau], 1832, publiée en 1850), qui est souvent associée à la formule de Crofton, à laquelle elle est d'ailleurs antérieure. Les deux formules sont reliées par le fait que pour  $i = d - 1$  le volume de la projection de  $K$  sur l'hyperplan  $\pi_L(\mathbf{R}^d)$  est proportionnel au volume de l'ensemble des droites parallèles à la direction de projection  $L$  qui rencontrent  $K$ . Il suffit ensuite d'intégrer sur l'espace des directions de projection.

Il y a une troisième interprétation qui est l'une des plus intéressantes : si on suppose que  $\partial K$  est de classe  $C^\infty$ , la géométrie Riemannienne permet de définir  $d - 1$  fonctions  $C^\infty$  à valeurs réelles sur  $\partial K$ , les *courbures principales* :  $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ , avec  $\kappa_j = \frac{1}{\rho_j}$  où  $\rho_j$  est un rayon de courbure principal. Pour  $d = 3$  les deux rayons de courbure principaux en un point  $x \in \partial K$  sont les extrema des rayons de courbure en  $x$  des courbes planes  $\partial K \cap H$  lorsque  $H$  parcourt les 2-plans passant par  $x$  et contenant le vecteur normal à  $\partial K$  en  $x$ . Alors pour  $0 \leq i \leq d - 1$  on a

$$V_i(K) = \int_{\partial K} N_{d-1-i}(x) dS$$

où  $N_{d-1-i}(x)$  est la fonction symétrique élémentaire normalisée de degré  $d - 1 - i$  des courbures principales en  $x$  et  $dS$  désigne la mesure  $d - 1$ -dimensionnelle sur le bord.

En dimension 3, le théorème de Minkowski-Steiner dit donc que

$$\text{vol}(K + t\mathbf{B}) = \text{vol}(K) + \text{vol}(\partial K)t + Mt^2 + \text{vol}(\mathbf{B})t^3$$

où  $\text{vol}(\partial K) = \int_{\partial K} dS$ , correspondant à la fonction symétrique de courbure de degré 0 qui est constante égale à 1, et où  $M = C(3, 1) \int_{\partial K} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1(x)} + \frac{1}{\rho_2(x)} \right) dS$  est l'intégrale de la *courbure moyenne*,  $\rho_1(x)$  et  $\rho_2(x)$  étant les rayons de courbure principaux en un point  $x$  du bord  $\partial K$ , et où

$$\text{vol}(\mathbf{B}) = C(3, 0) \int_{\partial K} \frac{1}{\rho_1(x)\rho_2(x)} dS$$

est l'intégrale de la *courbure de Gauss*. D'après la formule de Gauss-Bonnet le second membre est, à la constante multiplicative de normalisation près, la caractéristique d'Euler de  $\partial K$  (qui est bien indépendante du convexe  $K \subset \mathbf{R}^d$  puisque  $\partial K$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbf{S}^{d-1}$ ).

**4.2. Inégalités entre les volumes mixtes.** Jusqu'à présent, nous avons essayé de comprendre la nature des coefficients du polynôme  $\text{vol}(K + t\mathbf{B})$  ou  $\text{vol}(K_1 + tK_2)$ . Maintenant, je vais en venir aux propriétés qui lient ces coefficients entre eux. Par exemple, nous avons vu qu'en dimension 2 les racines de ce polynôme sont réelles. Peut-on l'espérer en dimension 3 ?

Revenons donc aux volumes mixtes : soient  $K_1$  et  $K_2$  deux convexes compacts de  $\mathbf{R}^d$  et  $w_i = \text{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$ . Le principal résultat comparant les  $w_i$ , dont nous avons vu qu'ils sont tous  $\geq 0$ , est le suivant :

**Théorème 4.** (Inégalités de Alexandrov-Fenchel, [Al1], [Fen]) *a) On a pour  $1 \leq i \leq d-1$  les inégalités*

$$w_i^2 \geq w_{i+1}w_{i-1},$$

*autrement dit :*

$$\frac{w_d}{w_{d-1}} \leq \frac{w_{d-1}}{w_{d-2}} \leq \dots \leq \frac{w_1}{w_0}.$$

*b) Si tous les quotients précédents sont égaux, disons à  $\lambda$ , alors  $K_1 = \lambda K_2$  à translation près et réciproquement. En particulier  $K_1 = K_2$  à translation près si et seulement si  $w_0 = w_1 \dots = w_d$ .*

On fait la remarque suivante :

$$\left( \frac{w_d}{w_{d-1}} \right)^{d-1} \leq \frac{w_{d-1}}{w_{d-2}} \times \dots \times \frac{w_1}{w_0} = \frac{w_{d-1}}{w_0}$$

donc

$$w_{d-1}^d \geq w_d^{d-1} w_0.$$

Prenons le cas particulier où  $K_2 = \mathbf{B}$ . Nous avons vu que

$$w_{d-1} = \frac{\text{vol}(\partial K)}{d}.$$

Cela donne

$$\text{vol}(\partial K)^d \geq d^d \text{vol}(K)^{d-1} \text{vol}(\mathbf{B}).$$

C'est l'**inégalité isopérimétrique** en dimension  $d$ . Pour  $d = 2$ , on retrouve  $L^2 - 4\pi S \geq 0$ .

Nous avons déjà vu que la partie difficile est de prouver qu'on ne peut avoir égalité que si le convexe est une boule. Ici aussi, la démonstration de la partie b) de l'énoncé est délicate. Mais une fois ce résultat obtenu, on peut utiliser le fait que notre inégalité isopérimétrique a été obtenue en télescopant les inégalités entre les quotients  $\frac{w_j}{w_{j-1}}$ . Il en résulte que pour un convexe, *il ne peut y avoir égalité dans l'inégalité isopérimétrique que si tous les quotients sont égaux*. Comme nous l'avons vu, cela implique que  $K$  est un homothétique de la boule unité à translation près, donc est une boule.

Considérons l'ensemble  $\mathcal{K}^d$  de tous les convexes compacts de  $\mathbf{R}^d$ . On peut munir  $\mathcal{K}^d$  d'une métrique (dite *de Hausdorff*) qui est définie de la façon suivante : pour  $K_1$  et  $K_2$  dans  $\mathcal{K}^d$ , on pose

$$\delta(K_1, K_2) = \min\{\varepsilon, K_1 \subset K_2 + \varepsilon\mathbf{B} \text{ et } K_2 \subset K_1 + \varepsilon\mathbf{B}\}.$$

Cette métrique définit une topologie pour laquelle tous les objets que j'ai définis sont continus. En particulier, l'application

$$(K_1, K_2) \longrightarrow \text{vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]}) = w_i$$

est continue. Un des ingrédients de la démonstration consiste à montrer que n'importe quel convexe compact peut être approximé par des polyèdres pour cette topologie.

La collection des volumes mixtes définit une application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{K}^d \times \mathcal{K}^d &\longrightarrow \mathbf{R}^{d+1} \\ (K_1, K_2) &\longrightarrow (w_0, \dots, w_d) \end{aligned}$$

qui est continue pour la topologie de Hausdorff.

Si l'on s'intéresse aux compacts à translation près, cela signifie que l'on considère l'ensemble quotient  $\overline{\mathcal{K}}^d = \mathcal{K}^d / \equiv$  par la relation d'équivalence  $\equiv$  correspondant à l'égalité à translation près. La topologie de Hausdorff induit sur  $\overline{\mathcal{K}}^d$  une topologie quotient et l'application  $\Phi$  passe au quotient, définissant une application  $\overline{\Phi}$ .

L'espace  $\overline{\mathcal{K}}^d$  est de dimension infinie. Si l'on cherche des équations pour la diagonale de  $\overline{\mathcal{K}}^d \times \overline{\mathcal{K}}^d$ , qui est de codimension infinie, on s'aperçoit qu'elle est égale à  $\overline{\Phi}^{-1}(\Delta)$ , où  $\Delta : w_0 = \dots = w_d$  est la multidiagonale de  $\mathbf{R}^{d+1}$ . Autrement dit, on a réussi à définir un espace de codimension *infinie* par un nombre *fini* d'égalités.

La démonstration du cas d'égalité dans le théorème de Alexandrov-Fenchel est essentiellement due à Alexandrov, en 1937, par des méthodes analytiques très jolies, dont la vraie nature est explicitée dans [Gr].

Mentionnons pour terminer que l'image de l'application  $\mathcal{K}^d \times \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbf{R}^{d+1}$  déterminée par  $(K_1, K_2) \mapsto (w_i(K_1, K_2))_{0 \leq i \leq d}$  est effectivement décrite par les inégalités  $w_i \geq 0$ ,  $w_i^2 \geq w_{i+1}w_{i-1}$ . Cela ne signifie pas que l'on sait caractériser par des équations l'image de l'application  $\mathcal{K}^d \rightarrow \mathbf{R}^{d+1}$  déterminée par les volumes mixtes d'un convexe avec la boule unité.

Si les polynômes  $\text{vol}(K_1 + tK_2)$  avaient toujours toutes leurs racines réelles, cela impliquerait les inégalités d'Alexandrov-Fenchel selon un exercice classique, mais il n'en est rien, et les contre-exemples existent dès la dimension 3. Il n'est même pas vrai que les parties réelles des racines soient négatives en général (voir [Te1]).

**4.3. Valuations et volumes mixtes.** Je voudrais maintenant vous donner une autre propriété de ces volumes mixtes. Une question très naturelle consiste à se demander si l'on peut caractériser toutes les applications  $v : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbf{R}$  ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $v$  est additive au sens suivant: si  $K_1 \cup K_2$  est convexe, on a

$$v(K_1 \cup K_2) = v(K_1) + v(K_2) - v(K_1 \cap K_2)$$

- (2)  $v$  est invariante par déplacements.  
 (3)  $v$  est continue pour la topologie de Hausdorff.

Une telle application est ce qu'on appelle une *valuation* continue et invariante par déplacements sur l'ensemble des convexes.

La question est : peut-on caractériser le volume par les propriétés 1, 2 et 3 ? La réponse est non car, par exemple, le volume du bord, ou n'importe quel volume mixte  $w_i$  avec la boule:

$$w_i : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbf{R}; \quad K \mapsto \text{vol}(K^{[i]}, \mathbf{B}^{[d-i]})$$

a les mêmes propriétés. Mais on a le théorème fondamental suivant :

**Théorème 5.** (Hadwiger, 1948) *Si  $v$  vérifie les conditions (1), (2) et (3), alors il existe des constantes  $c_0, \dots, c_d$  telles que*

$$v(K) = \sum_{i=0}^d c_i w_i(K)$$

où  $w_i(K) = \text{vol}(K^{[i]}, \mathbf{B}^{[d-i]})$ .

Autrement dit, l'espace de ces fonctionnelles est un espace vectoriel de dimension finie, engendré par les volumes mixtes avec la boule unité.

On peut étendre la définition des volumes mixtes à une classe de sous-ensembles bien plus grande que celle des convexes compacts: celle des *polyconvexes*, qui est celle des sous-ensembles de  $\mathbf{R}^d$  qui sont des réunions finies de sous-ensembles convexes compacts.

En effet, toute valuation définie sur une classe  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles de  $\mathbf{R}^d$  qui est stable par intersection, comme celle des convexes compacts, s'étend en une valuation de la classe  $\text{Poly}\mathcal{C}$  des réunions finies d'éléments de  $\mathcal{C}$  au moyen de la *formule d'inclusion-exclusion*:

$$v(K_1 \cup \dots \cup K_n) = \sum_i v(K_i) - \sum_{i < j} v(K_i \cap K_j) + \sum_{i < j < k} v(K_i \cap K_j \cap K_k) - \dots$$

dont l'égalité de définition des valuations donne le cas  $n = 2$ .

La valuation constante égale à un sur les convexes, dont l'intérêt semble au premier abord limité, s'étend sur les polyconvexes en la caractéristique d'Euler-Poincaré, ce qui donne de cette dernière une définition sans triangulation dans ce cadre. Le volume s'étend bien sûr en volume, et les volumes mixtes donnent sur les polyconvexes de nouvelles valuations qui sont intermédiaires entre la caractéristique d'Euler-Poincaré, purement topologique, et le volume. Le théorème d'Hadwiger s'étend immédiatement aux valuations sur les polyconvexes.

Une propriété fondamentale des volumes mixtes d'un corps convexe avec la boule unité est qu'ils sont invariants par déplacement, et en particulier par rotation, ce qui résulte bien sûr du fait que la boule possède cette invariance. Si l'on s'intéresse seulement à l'invariance par translation, on voit tout de suite que la situation devient bien plus compliquée: il n'y a plus de convexe privilégié comme la boule et on peut construire beaucoup de fonctionnelles invariantes par translation et continues sur l'espace des corps convexes.

Ainsi, soit  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_d)$  une famille de  $d$  corps convexes de  $\mathbf{A}^d$ . On peut lui associer les fonctionnelles suivantes (volumes mixtes, voir le Théorème 1) sur  $\mathcal{K}^d$ : pour  $0 \leq i \leq d$ , on définit

$$w_i^{\mathcal{A}}(K) = \text{vol}(K, K, \dots, K, A_{i+1}, \dots, A_d),$$

où  $K$  apparaît  $i$  fois. Remarquons que ces fonctionnelles sont des valuations sur  $\mathcal{K}^d$  qui sont continues et invariantes par translation. Cette famille de valuations contient tous les volumes mixtes avec la boule unité.

On peut mettre sur l'espace des valuations à valeurs réelles ou complexes qui sont continues et invariantes par translation une structure d'espace vectoriel topologique de Fréchet, au moyen de la collection suivante de semi-normes: pour chaque entier  $N$ , définissons la semi-norme

$$\|v\|_N = \sup_{K \subset N\mathbf{B}^d} |v(K)|.$$

Le supremum existe parce que les sous-ensembles convexes compacts d'une boule forment un ensemble compact de  $\mathcal{K}^d$  pour la topologie de Hausdorff, et parce que la valuation  $v$  est supposée continue.

McMullen avait fait la conjecture suivante:

**Conjecture de McMullen-Théorème d'Alesker** *L'espace vectoriel engendré par les fonctionnelles  $w_i^A(K)$  est dense dans l'espace vectoriel topologique des valuations continues et in-variantes par translation de  $\mathcal{K}^d$ .*

La récente démonstration d'Alesker (voir [A1]) fait intervenir de nouvelles techniques, dont voici une idée.

Tout d'abord il faut rappeler un théorème de McMullen.

Disons qu'une valuation est *homogène de degré  $i$*  si pour tout  $K \in \mathcal{K}^d$  et tout réel  $\lambda \geq 0$  on a  $v(\lambda K) = \lambda^i v(K)$ .

**Théorème 6.** (McMullen) *Toute valuation continue et invariante par translation de  $\mathcal{K}^d$  peut s'écrire de manière unique comme somme de valuations homogènes:*

$$v = \sum_{i=0}^d v_i,$$

où  $v_i$  est homogène de degré  $i$ .

Remarquons que si  $v$  est en fait invariante par déplacement, cela résulte aussitôt du théorème d'Hadwiger.

On sait grâce à Hadwiger ([Had]) que l'espace des valuations continues invariantes par translation et de degré 0 est de dimension 1 et engendré par la caractéristique d'Euler-Poincaré et que l'espace de celles de degré  $d$  est de dimension 1 et engendré par la mesure de Lebesgue (le volume). De plus toute valuation continue et invariante par translation de  $\mathcal{K}^d$  peut s'écrire comme somme d'une valuation paire vérifiant  $v(-K) = v(K)$  et d'une valuation impaire, vérifiant  $v(-K) = -v(K)$ .

Il existe une représentation naturelle du groupe  $GL(d, \mathbf{R})$  des automorphismes linéaires de  $\mathbf{R}^d$  dans l'espace vectoriel  $\text{Val}_{\text{trans}}(\mathcal{K}^d)$  des valuations continues et invariantes par translation; c'est l'homomorphisme (continu) qui à  $g \in GL(d, \mathbf{R})$  fait correspondre l'automorphisme  $v \mapsto \pi(g).v$  de  $\text{Val}_{\text{trans}}(\mathcal{K}^d)$ , où  $(\pi(g).v)(K) = v(g^{-1}(K))$ . Il est clair que cette représentation respecte le degré d'homogénéité et la parité.

De plus, comme les éléments de  $GL(d, \mathbf{R})$  agissent sur les volumes mixtes par multiplication par une puissance du déterminant et changement de la famille  $\mathcal{A}$  en  $g^{-1}(\mathcal{A})$ , cette représentation laisse globalement stable le sous-espace vectoriel de  $\text{Val}_{\text{trans}}(\mathcal{K}^d)$  engendré par les volumes mixtes.

**Théorème 7.** (Alesker) *Pour chaque entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq d$ , la représentation naturelle de  $GL(d, \mathbf{R})$  sur l'espace vectoriel des valuation homogènes de degré  $i$  qui sont paires (resp. impaires) est irréductible.*

Le fait que la représentation soit irréductible implique que tout sous-espace fermé de  $\text{Val}_{\text{trans}}(\mathcal{K}^d)$  qui est invariant est soit 0 soit  $\text{Val}_{\text{trans}}(\mathcal{K}^d)$  tout entier. Il en résulte aussitôt que l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires de volumes mixtes de degré  $i$  qui sont paires (resp. impaires) est tout l'espace des valuation homogènes de degré  $i$  qui sont paires (resp. impaires). En effet des combinaisons linéaires du type  $\text{vol}(K^{[i]}, \mathbf{B}^{[d-i]}) \pm \text{vol}(\pm K^{[i]}, \mathbf{B}^{[d-i]})$  donnent des combinaisons paires et impaires de volumes mixtes de tous les degrés d'homogénéité et les espaces invariants ne sont donc pas nuls. Au vu du Théorème 6 cela prouve la conjecture de McMullen.

Une originalité de la preuve d'Alesker est d'introduire dans le sujet des méthodes raffinées de théorie des représentations des groupes algébriques; il a obtenu par cette approche bien d'autres résultats (voir [A2]) qui sortent du cadre de cet exposé.

## 5. NOMBRES DE FACES D'UN POLYTOPE SIMPLICIAL DANS $\mathbf{R}^d$ . ÉQUATIONS DE DEHN-SOMMERVILLE

Je vais maintenant parler un instant des deux autres problèmes que j'avais évoqués, à savoir : compter le nombre de faces, et compter les points entiers ; ce sont des domaines qui ont aussi beaucoup progressé ces vingt dernières années.

Un *simplexe* de dimension  $i$  est l'enveloppe convexe de  $i + 1$  points dans  $\mathbf{R}^d$  non situés dans un hyperplan affine . Chacune de ses faces de dimension  $i - 1$  est aussi un simplexe et a exactement  $i$  sommets.

Je m'intéresse donc maintenant aux polyèdres convexes simpliciaux, c'est-à-dire que je ne regarde que ceux dont les faces sont des simplexes. En dimension 3, ce sont des objets dont les faces sont des triangles.

Il existe une notion duale: un polytope de  $\mathbf{R}^d$  est *simple* si chaque sommet est contenu dans exactement  $d$  faces de dimension  $d - 1$ .

On appelle  $f_i$  le nombre de faces de dimension  $i$  ( $i = 0, \dots, d$ ). On connaît la relation suivante :

$$f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1} f_d$$

(caractéristique d'Euler-Poincaré). On introduit pour  $0 \leq i \leq d$  les fonctions auxiliaires

$$h_i = \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_j.$$

La donnée des  $h_i$  permet de retrouver les  $f_i$ , et réciproquement.

On a le résultat suivant, qui date des années 1930 (voir [Gru]) :

**Théorème 8.** (Équations de Dehn-Sommerville) *Pour un polytope simplicial, on a  $h_i = h_{d-i}$ .*

Ces relations engendrent toutes les relations linéaires entre les  $f_i$ . Mais il existe aussi des relations non-linéaires; pour les décrire, on utilise la construction suivante, qui trouve son origine dans la caractérisation par Macaulay des fonctions de Hilbert des algèbres graduées de dimension finie engendrées par leurs éléments de degré un :

Soient  $g$  et  $i$  deux entiers positifs; il existe des entiers  $n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$  uniquement déterminés par la condition qu'en outre on puisse écrire

$$g = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j}.$$

On pose alors

$$g^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}.$$

On dit qu'une suite d'entiers  $g_0, \dots, g_s$  est une  $M$ -suite si  $g_0 = 1$  et si elle satisfait pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq s-1$ , l'inégalité  $0 \leq g_{i+1} \leq g_i^{<i>}$ .

Le nom de  $M$ -suite vient du fait que Macaulay a démontré le théorème suivant:

**Théorème 9.** (Macaulay, voir [B-H], Chap. 4.) *Une suite  $(g_0, g_1, g_2, \dots)$  d'entiers non négatifs est une  $M$ -suite si et seulement si il existe une algèbre commutative graduée*

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$$

sur un corps  $k$  telle que  $R_0 = k$ , que la  $k$ -algèbre  $R$  soit engendrée par des éléments de degré 1 et que pour tout  $i \geq 0$  on ait

$$g_i = \dim_k R_i.$$

J'espère que vous trouverez le théorème suivant surprenant :

**Théorème 10.**  $f = (f_j)_{0 \leq j \leq d}$  est la suite des nombres des faces de chaque dimension d'un polytope simplicial si et seulement si la suite  $(h_j)_{0 \leq j \leq d}$  qui lui est associée comme ci-dessus satisfait les équations de Dehn-Sommerville et de plus la suite

$$(h_0, h_1 - h_0, \dots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1})$$

est une  $M$ -suite.

Ce théorème avait été conjecturé par McMullen [Mc1] en 1971 ; Stanley [Sta] a prouvé la nécessité en 1980, Billera et Lee ([Bi-L1], [Bi-L2]) ont prouvé la suffisance en 1980/1981.

## 6. LE PROBLÈME DU COMPTAGE DES POINTS ENTIERS EN DIMENSION $d$ . POLYNÔME D'EHRHART

Je vais maintenant dire un mot du décompte des points. On avait la formule de Pick en dimension 2, en a-t-on une en dimension  $d$  ? Nous allons voir que oui. On considère un polytope entier  $P$ . Ehrhart, un mathématicien enseignant dans le secondaire, a démontré le théorème suivant :

**Théorème 11.** (E. Ehrhart [Ehr], 1967) *Soit  $P$  un polytope entier. Pour  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ , on a :*

$$\#(nP \cap \mathbf{Z}^d) = E_p(n)$$

où  $E_p(n)$  est un polynôme de degré  $d$  à coefficients rationnels et  $E_p(-n) = (-1)^{\dim P} \#(n \overset{\circ}{P} \cap \mathbf{Z}^d)$  où  $\overset{\circ}{P}$  est l'intérieur de  $P$ .

Il est facile de voir que le terme dominant de  $E_p(n)$  est  $\text{vol}(P)n^d$ . Posons  $E_p(n) = a_d n^d + \dots + a_0$ , où les  $a_i$  dépendent de  $P$ . En 1997, Brion et Vergne [Bri-V] ont montré comment calculer les  $a_i$  à partir de  $P$ . On obtient notamment

$$(2) \quad a_{d-1} = \frac{1}{2} \text{vol}_{d-1}(\partial P),$$

où  $\text{vol}_{d-1}$  est le *volume normalisé*, défini de la façon suivante : le bord du polytope  $P$  est constitué de faces, qui sont dans des plans rationnels, lesquels rencontrent le réseau entier selon des sous-réseaux ; je normalise le volume dans le plan de façon à ce que le volume de la maille du sous-réseau soit 1. En dimension 2, (2) redonne la formule de Pick. Donc on a en partie généralisé cette dernière.

## 7. LIENS AVEC LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Au cours des 20 dernières années on a découvert que la théorie des polytopes entiers avait des liens très étroits avec la géométrie des variétés algébriques. En fait on peut associer à chaque collection finie de polytopes entiers de  $\mathbf{R}^d$  une variété algébrique (disons complexe) de dimension  $d$  d'un type très particulier (variété torique) munie d'autant de plongements dans des espaces projectifs qu'il y a de polytopes. Si l'on regarde un seul polytope, il existe une telle variété algébrique "minimale", qui est en général singulière mais n'a que des singularités sans conséquences graves sur la cohomologie dans le cas où le polytope est simple . Inversement cette donnée détermine entièrement les polytopes. Cela établit un dictionnaire dans lequel les nombres de faces des polytopes simples ou simpliciaux correspondent à des dimensions de groupes de cohomologie et les volumes à des degrés de variétés projectives. Une bonne référence pour tout cela est [E].

En fait cela permet de plonger, pour certains problèmes, la théorie des polytopes dans le monde plus vaste de la géométrie des variétés projectives. Dans ce monde des variétés algébriques projectives, on peut faire des opérations qui n'ont pas de correspondant direct pour

les polytopes, par exemple intersecter avec un hyperplan générique, ce qui permet, outre des récurrences sur la dimension, de définir des opérations sur l'algèbre de cohomologie.

La première démonstration de la conjecture de McMullen sur les faces des polytopes simpliciaux passait par la géométrie algébrique (voir [Sta]). Par exemple les équations de Dehn-Somerville proviennent de la *dualité de Poincaré* et la propriété de *M-suite* du *Théorème de Lefschetz difficile* sur la cohomologie d'une variété torique associée au polytope. Au même moment, on avait pu montrer que les inégalités de Alexandrov-Fenchel correspondaient aussi à des inégalités de géométrie algébrique que l'on peut déduire du *Théorème de l'index de Hodge* (voir [Te1] et [Gr]).

McMullen (voir [Mc2]) a construit un élargissement combinatoire du monde des polytopes, qui est assez vaste pour contenir l'analogie de la section hyperplane générique et s'en est servi pour généraliser simultanément les résultats sur les nombres de faces des polytopes simpliciaux et ceux sur les volumes mixtes.

Je vais pour conclure montrer un type de résultat qui relève de la même approche et est plus facile à énoncer. Il s'agit d'une généralisation en algèbre commutative d'une conséquence d'un célèbre théorème de Carathéodory sur les enveloppes convexes.

**7.1. Théorèmes de Carathéodory et de Brianchon-Skoda.** L'idée de base de la correspondance entre la géométrie des corps convexes et la géométrie algébrique remonte à Newton et consiste à dire qu'un monôme en  $d$  variables  $x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$  correspond à un point à coordonnées entières  $(m_1, \dots, m_d) \in \mathbf{Z}^d$ . Par exemple, dans un anneau de séries convergentes, je me donne un certain nombre de monômes  $M_1, \dots, M_k$  que je peux représenter par leurs exposants. Dans le cas qui m'intéresse, tous les points obtenus sont dans le premier cadran car je ne prends que des exposants positifs. On regarde l'idéal  $I = (M_1, \dots, M_k) \subset k\{x_1, \dots, x_d\}$ , que je représente de la façon suivante :

Une série qui est dans l'idéal  $I$  est une série dont tous les monômes sont "au dessus de l'escalier".

Je considère maintenant un idéal  $I$  quelconque dans un anneau commutatif  $A$  quelconque. J'ai alors une notion de dépendance intégrale :

Un élément  $h \in A$  est *entier* sur  $I$  si il satisfait une relation de dépendance intégrale

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad \text{avec } a_i \in I^i.$$

Si  $I = (x^n, y^n)\mathbf{C}\{x, y\}$ , alors tous les monômes  $x^i y^{n-i}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  sont entiers sur  $I$  mais ne sont pas dans  $I$ . On peut voir qu'au voisinage de l'origine,

$$|x^i y^{n-i}| \leq C \sup(|x|^n, |y|^n).$$

L'ensemble des éléments de  $A$  entiers sur  $I$  est un idéal de  $A$  noté  $\bar{I}$ . On a  $I \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}$ . Si  $A$  est un anneau de polynomes  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_d]$  ou un anneau de séries convergentes  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$  et si l'idéal  $I$  est engendré par des monômes, alors  $\bar{I}$  est l'idéal engendré par tous les monômes qui sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des points situés au dessus de l'escalier. Pour l'exemple  $I = (x^n, y^n)\mathbf{C}\{x, y\}$ , on a  $\bar{I} = (x, y)^n$ .

En effet, pour décrire  $\bar{I}$ , il faut ajouter tous les monômes qui sont représentés par des points qui sont sur la droite reliant  $(0, n)$  à  $(n, 0)$ .

Or on a le théorème suivant :

**Théorème 12.** *a) (Carathéodory) Soient  $E \subset \mathbf{R}^d$  et  $x \in \text{Conv}(E)$ . Alors  $x$  est dans l'enveloppe convexe d'au plus  $d+1$  points de  $E$  :*

$$\forall x \in \text{Conv}(E) \exists e_1, \dots, e_{d+1} \in E | x \in \text{Conv}(e_1, \dots, e_{d+1}).$$



b) (Fenchel 1929, Hanner et Rådström 1951) *Si  $E$  a au plus  $d$  composantes connexes, on peut remplacer  $d + 1$  par  $d$  dans le a).*

Dans notre cas, cela signifie que si je prends un point dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des points au dessus de l'escalier, qui est connexe, il est dans l'enveloppe convexe de  $d$  points qui sont au dessus de l'escalier :  $x = \sum \lambda_i m_i$  où  $\sum \lambda_i = 1$  et les  $m_i$  sont dans l'ensemble des points au dessus de l'escalier. Il y a au moins un des  $\lambda_i$  qui est plus grand que  $1/d$ , donc  $dx$  est dans l'ensemble des points au dessus de l'escalier. En terme d'idéaux, cela signifie que si  $x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d} \in \bar{I}$ , alors  $(x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d})^d \in I$ . C'est un cas particulier du théorème suivant :

**Théorème 13.** (Briançon-Skoda [B-S], 1974) *Si  $I$  est un idéal de  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$ , alors  $(\bar{I})^d \subseteq I$ .*

En travaillant un tout petit peu plus, on peut prouver comme ci-dessus à l'aide du b) du Théorème 12 l'inclusion  $\bar{I}^d \subset I$  pour les idéaux engendrés par des monômes.

Quelles sont les motivations d'un tel théorème ? Soit  $f$  une série de  $d$  variables complexes, convergente et nulle à l'origine ; alors il n'est pas trop difficile de montrer que l'on a toujours dans  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$  l'inclusion

$$f \in \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)},$$

où le terme de droite désigne la fermeture intégrale de l'idéal de  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$  engendré par les dérivées partielles.

D'après le théorème,

$$f^d \in \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right).$$

Cette inclusion joue un rôle assez important dans l'étude des singularités de la fonction  $f$  (voir [Sc] et [W]).

Voyons sur un exemple :  $f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y$ . On sait donc que

$$f^2 \in \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{C}\{x, y\}.$$

Pourtant, il est loin d'être évident d'écrire la relation d'appartenance !

Le point important est que le plus petit entier  $n$  tel que  $f^n \in I$  si  $f \in \bar{I}$  ne dépend pas de l'idéal  $I$  mais seulement de la dimension. Pour plus d'information on peut consulter les articles de Hochster, Lazarsfeld et l'auteur dans [TCA].

### Références

*Les références [Bro], [K-R], [Mc-S], [San] sont particulièrement recommandées comme introductions au sujet, et [Gr], [E] pour les liens avec la Géométrie Kählérienne et algébrique.*

[A1] S. Alesker, *Description of translation invariant valuations on convex sets with solution of P. McMullen's conjecture*, Geom. Funct. Anal. 11 (2001), No. 2, 244-272.

[A2] S. Alesker, *Algebraic structures on valuations, their properties and applications*. Proc. International Congress of Math., Beijing 2002, vol. III, 757-764.

[Al1] A. D. Alexandrov, *Selected works* (éd. par Yu. G. Reshetnyak et S. S. Kutateladze, trad. angl. par P. S. V. Naidu), Classics of Soviet Mathematics, Gordon and Breach. Voir aussi 4 articles dans Mat. Sbornik, volumes 44 et 45, traduits en Anglais par Wm. J. Firey, Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331.

[Al2] A. D. Alexandrov, *Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper*, Dokl. Acad. Sci. URSS 14 (1937), 155-157.

[Ba] E. Barbier, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (2) 5 (1860), 273-286.

[Bo] T. Bonnesen, *Über eine verschärfung der isoperimetrischen ungleichheit des kreises in der ebene und auf der kugeloberfläche nebst einer anwendung auf eine Minkowskische ungleichheit für konvexe körper*, Math. Annalen **84** (1921), 216-227.

[Bro] A. Bronsted, *An introduction to convex polytopes*, Springer Verlag, 1983. (Graduate Texts in Mathematics, No. 90.).

[B-H], W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced Math., No. 39, 1993.

[B-S] J. Briançon et H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbf{C}^n$* , Comptes Rendus Acad. Sci., Paris **A 278** (1974), 949-951.

[Bi-L1] L. J. Billera and C. W. Lee, *Sufficiency of McMullen's conditions for  $f$ -vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1980), 181-185.

[Bi-L2] L. J. Billera and C. W. Lee, *A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for  $f$ -vectors of simplicial convex polytopes*, J. Combin. Theory, Ser. A, **31** (1981), 237-255.

[Bri-V] M. Brion et M. Vergne, *Lattice points in simple polytopes*, J. Amer. Math. Soc. **10**, n° 2 (1997), 371-392.

[Cau] A.-L. Cauchy, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, Mém. Acad. Sci. **22** (1850), 3-15. (Oeuvres, Gauthier-Villars, 1ère série, vol. 2, p. 167-177.)

[Cro] M. W. Crofton, *On the theory of local probability, applied to straight lines drawn at random in a plane. . .*, Phil. Trans. Royal Soc. London **158** (1868), 181-199.

[DiRo] R. Diaz and S. Robins, *Pick's formula via the Weierstrass  $\wp$ -function*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), 431-437.

[E] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic Geometry*, Graduate texts in Math., No. 168, Springer 1996.

[Ehr] E. Ehrhart, *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire, I : polyèdres et réseaux*, J. für die reine und angewandte Mat. **226** (1967), p. 1-29.

[Fed] H. Federer, *Geometric measure theory*, Grund. der math. Wiss. n° 153, Springer-Verlag, 1969.

[Fen] W. Fenchel, *Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes*, Comptes Rend. Acad. Sci. Paris **203** (1936), 647.

[Fl] H. Flanders, *A proof of Minkowski's inequality for convex curves*, Amer. Math. Monthly, **75**, 1968, 581-593.

[Fun] W. W. Funkenbush, *From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 647-648.

[Gr] M. Gromov, *Convex sets and Kähler Manifolds*, in Advances in Differential Geometry and topology, World Scientific, Teaneck, N.J., 1990, 1-38.

[Gru] B. Grunbaum, *Convex polytopes*, International Publisher, 1967. (Pure and Applied Mathematics - Interscience Publishers, n° 16.)

[Had] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag, Berlin, 1957.

[K-R] D. Klain and G-C. Rota, *Introduction to geometric probability*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1997.

[Mc1] P. McMullen, *The numbers of faces of simplicial polytopes*, Israel J. Math. **9** (1971), 559-570.

[Mc2] P. McMullen, *On simple polytopes*, Inv. Math., **113** (2) (1993), 419-444.

[Mc-S] P. McMullen and R. Schneider, *Valuations on convex bodies*, in "Convexity and its Applications, P.M. Gruber and J.M. Wills, Editors, Birkhäuser 1983, pp. 170-247.

- [Mil] J. Milnor, *Euler characteristic and finitely additive Steiner measures*, Collected Papers, Publish or Perish Inc. 1994, vol. 1, p. 213-234.
- [Min] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, 1911 (reprinted : Chelsea, 1967) : vol. 2, p. 101-279. (Cf. en particulier *Theorie der konvexen Körper*, p. 131-229.)
- [P] Platon, *La République*.
- [Pic] G. Pick, *Geometrisches zur zahlenlehre*, Sitz. Lotos (Prague) **19** (1899), 311-319.
- [Ren] De-lin Ren, *Topics in integral geometry*, Series in Pure Mathematics, n<sup>o</sup> 19, World Scientific (Singapore), 1994.
- [San] L. A. Santaló, *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of math. and its Applications, Addison Wesley, 1976.
- [Sc] J. Scherk, *On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities*, Inventiones Math., 58 (1980), 289-301.
- [So1] A. Sokal "Transgressing the Boundaries: Toward a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity" in *Social Text*, 46/47, pp. 217-252 (spring/summer 1996).
- [So2] A. Sokal "A Physicist Experiments with Cultural Studies", in *Lingua Franca*, May/June 1996, pp. 62-64.
- [Sta] R. P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. in Math. **35** (1980), 236-238.
- [Te1] B. Teissier, *Bonnesen type inequalities in algebraic geometry*, in "Seminar on Differential Geometry", edited by S.T. Yau, Annals of Math. Studies No. 102, Princeton U.P., 1982, pp. 85-105.
- [TCA] *Trends in Commutative Algebra*, L. Avramov et al., Editors, MSRI Publications No. 51, Cambridge University Press 2004.
- [W] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981) 481-539.