Déf : Soit $L \supseteq K$ une extension de corps. Une partie $B \subseteq L$ est une *base de transcendance* de L sur K si

a) les éléments de B sont algébriquement indépendants sur K et

b) le corps L est algébrique sur $K(B)$.

Lemme 5 et déf. : Soient K un corps et $L \supseteq K$ une extension engendrée par un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_r$.

a) Le corps L a une base de transc. finie sur K.

b) Deux bases de trans. de L sur K ont même cardinal.

Le *degré de transcendance* $\mathrm{degtr}_K L$ est ce cardinal.

Dém. : a) Un ensemble maximal d'éléments alg. indép. $B \subseteq \{x_1, \dots, x_r\}$ est une base de transcendance de L sur K.

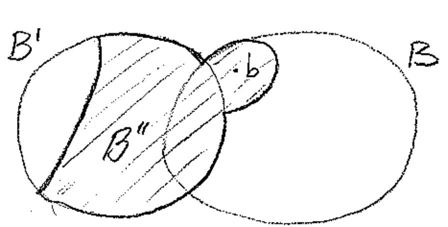
b) Soient B, B' deux bases de transcendance. Supposons que B' est finie (ce qui est légitime grâce à a). Montrons par récurrence descendante sur $|B \cap B'|$ que B et B' ont même cardinal :

. Si $|B \cap B'| = |B|$, alors $B' \subseteq B$ et $B' = B$ car $K(B) \supseteq K(B')$ est alg.

. Supposons $|B \cap B'| < |B|$. Soit $b \in B \setminus B'$. Alors $B' \cup \{b\}$ n'est plus une base de transcendance. Il existe alors un ensemble max. B'' t.q.

$$(B \cap B') \cup \{b\} \subseteq B'' \subsetneq B' \cup \{b\}$$

et qui est une base de transcendance. Alors $|B \cap B'| < |B \cap B''|$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, B'' est fini et $|B| = |B''| \leq |B'|$. En échangeant les rôles de B et B' on trouve $|B'| \leq |B|$. ✓



Corollaire 6 : Soit k un corps et A une k-algèbre intègre de type fini. Alors $\dim A = \operatorname{degtr}_k \operatorname{Frac}(A)$.

Dém. : D'après le lemme de Noether (Thm 1.4.9), il existe des éléments alg. indép. $y_1, \dots, y_m$ de A tels que A est une extension finie de $k[y_1, \dots, y_m]$. Alors $y_1, \dots, y_m$ est une base de transc. de $\operatorname{Frac}(A)$ sur k et
$$\operatorname{degtr}_k \operatorname{Frac}(A) = m \underset{\text{Thm 4}}{=} \dim k[y_1, \dots, y_m] \underset{\text{Thm 1}}{=} \dim A. \quad \checkmark$$

Corollaire 7 : Soient k un corps et $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul et non constant. Alors
$$\dim k[X_1, \dots, X_n]/(f) = n-1.$$

Rque : Si k est algébriquement clos, cela signifie que l'hypersurface $V(f) \subseteq k^n$ est de dimension $n-1$.

Dém. : On peut supposer f irréductible (si $(f) \subseteq \mathfrak{p}$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $k[X_1, \dots, X_n]$, alors $(f') \subseteq \mathfrak{p}$ pour un facteur irréd. f' de f). Quitte à renuméroter $X_1, \dots, X_n$, on peut supposer que $f \notin k[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Alors le morphisme canonique
$$k[X_1, \dots, X_{n-1}] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]/(f) = A$$
est injectif. D'où une extension de corps
$$k(X_1, \dots, X_n) \hookrightarrow \operatorname{Frac}(A),$$
qui est en fait finie. Donc
$$n-1 = \operatorname{degtr} k(X_1, \dots, X_{n-1}) = \deg \operatorname{Frac} A = \dim A. \quad \checkmark$$

2.5 Variétés affines et quasi-affines

Soient k un corps algébriquement clos et $n \in \mathbb{N}$.

Notation : $\mathbb{A}^n$ = espace affine de dim. n
= espace k^n muni de la top. de Zariski.

Rques : 1) Un espace top. est noethérien ssi tous ses ouverts sont quasi-compacts (!). Donc $\mathbb{A}^n$ et tous ses ss-espaces sont quasi-compacts.

2) Tout fermé de $\mathbb{A}^n$ est intersection de fermés $V(f)$, $f \in k[X_1, .., X_n]$. Donc tout ouvert de $\mathbb{A}^n$ est réunion d'ouverts principaux $D(f) := \mathbb{A}^n \setminus V(f)$, $f \in k[X_1, .., X_n]$, et les ouverts principaux forment une base de la topologie de $\mathbb{A}^n$.

Déf : Une variété affine est un ss-espace fermé $X \subseteq \mathbb{A}^n$; une fonction polynomiale sur X est la restriction d'une fonction polynomiale sur k^n. On note $A(X)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur X.

Rque : On a un isomorphisme naturel $k[X_1, .., X_n]/I(X) \xrightarrow{\sim} A(X)$.

Déf : Soient $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ des variétés affines. Un morphisme $f : X \to Y$ est une application
$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$
dont les composantes f_i sont polynomiales. On note $Mor(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.

Exemples : 1) $Mor(X, k) \xrightarrow{\sim} A(X)$.

2) $X = \mathbb{A}^1$, $Y = V(X_1^2 - X_2^3) \subseteq \mathbb{A}^2$, $f : \mathbb{A}^1 \to Y$, $t \mapsto (t^3, t^2)$.

<u>Rque</u>: L'identité de toute var. affine est un morphisme ; le composé de deux morphismes est un morphisme.

<u>Déf.</u> : Un morphisme de var. affines $f : X \to Y$ est un <u>isomorphisme</u> s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ t.q. $fg = 1_Y$ et $gf = 1_X$.

<u>Rque</u> : L'exemple 2) montre qu'un morphisme bijectif n'est pas toujours un isom

<u>Déf</u> : Le <u>comorphisme</u> d'un morphisme $f : X \to Y$ est le morphisme d'algèbres $f^* : A(Y) \to A(X)$, $u \mapsto u \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "f^*(u)"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ & k \end{tikzcd}$$

<u>Rque</u> : On a $1_X^* = 1_{A(X)}$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

<u>Prop 1</u> : a) Soient $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ deux var. affines.

L'application $\mathrm{Mor}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{alg}(A(Y), A(X))$, $f \longmapsto f^*$

est bijective.

b) Pour toute k-algèbre A qui est réduite (i.e. $nil(A) = 0$) et de type fini, il existe une var. affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$ telle que $A \simeq A(X)$.

<u>Rque</u> : La proposition montre que l'étude des variétés affines et de leurs morphismes est équivalente à celle des k-algèbres réduites de type fini et de leurs morphismes.

Dém. : b) On a $A \simeq k[X_1, \dots, X_n]/J$ pour un idéal <u>radical</u> J donc $X = V(J)$ convient ($J = I(V(J))$ par le Nullstellensatz).

a) Injectivité : soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme et soient $f_1, \dots, f_m$ ses composantes. Soient $y_i : Y \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $1 \leq i \leq m$, les fonctions coordonnées restreintes à Y. On a

$f_i = y_i \circ f = f^*(y_i)$. Donc f^* détermine f.

Surjectivité : soit $\varphi : A(Y) \to A(X)$ un morphisme d'algèbres. Alors φ est déterminé par les $f_i := \varphi(y_i)$ car les y_i engendrent $A(Y)$ (y_i est l'image de $Y_i \in k[Y_1, \dots, Y_m]$).

Montrons que $\tilde{f} : X \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ se factorise en $\tilde{f} = j \circ f$, où $j : Y \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ est l'inclusion.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}^m \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, dashed, "f"'] & Y \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

On aura alors $f^* = \varphi$ car $f^*(y_i) = \varphi(y_i)$, $1 \leq i \leq m$.

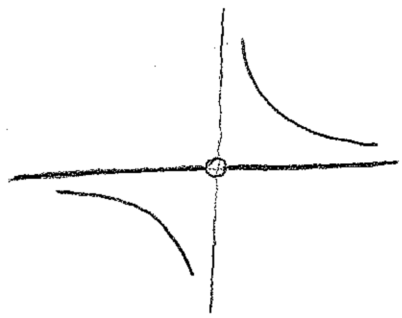
Il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$ et tout $u \in I(Y)$, on a $u(\tilde{f}(x)) = 0$. Or on a $u \circ \tilde{f} = \tilde{f}^*(u) = \varphi \circ j^*(u) = 0$.

$$\begin{tikzcd} & A(\mathbb{A}^m) \arrow[dl, "\tilde{f}^*"'] \arrow[d, "j^*"] \\ A(X) & A(Y) \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

__But__ : Étendre les notions de "variété" et de "morphisme" de façon que, par exemple, la droite épointée $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ devienne une "variété" et l'application

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \{X_1 X_2 = 1\}, \quad t \mapsto (t, 1/t)$$

un "isomorphisme" sur l'hyperbole $X_1 X_2 = 1$.



__Déf__ : Une *variété quasi-affine* est un ouvert d'une variété affine.

Une fonction $f : X \to k$ sur une var. quasi-affine X est *régulière* en un point $x \in X$ si, *au voisinage* de x, elle s'écrit $f = g/h$ pour des $f, g \in A(\bar{X})$ t.q. $g(x) \neq 0$.

Elle est *régulière sur* X si elle est régulière en tout point de X.

Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ sont des variétés quasi-affines, une application $f: X \to Y$ de composantes $f_1, \dots, f_m$ est <u>régulière</u> si les $f_i : X \to k$ sont régulières sur X.

<u>Rques</u>: Les applications régulières sont continues (l'image réciproque d'un fermé est fermée au voisinage de tout point de X). La composée de deux appl. régulières est régulières. Les identités sont régulières.

<u>Thm 2</u>: Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ est affine, toute appl. régulière $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1$ (Serre, 1955) est polynomiale.

<u>Rque</u>: Il s'ensuit que toute appl. régulière d'une var. affine X dans une var. quasi-affine Y a des composantes polynomiales et que les appl. rég. entre var. affines sont exactement les morphismes de variétés affines.

<u>Déf</u>: Un <u>morphisme</u> de variétés quasi-affines est une appl. régulière. Un <u>isomorphisme</u> est un morph. f t.q. il existe un morph. g t.q. $f \circ g = \mathbb{1}$ et $g \circ f = \mathbb{1}$.

<u>Exemples</u>: 1) L'hyperbole est isomorphe à la droite épointée.

2) Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, l'ouvert principal $X = D(f)$ est une variété quasi-affine isomorphe à la var. affine

$$Y = V(X_{n+1} \cdot f - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$$

via $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 1/f(x_1, \dots, x_n))$.

3) $Gl_n(k) = \{ M \in M_n(k) \mid \det(M) \neq 0 \}$ est un ouvert principal, donc une variété affine (à isom. près). De même, $Gl_n(k) \times Gl_n(k)$ est affine. La mult. et le passage à l'inverse sont des morphismes. $Gl_n(k)$ est un <u>groupe algébrique affine</u>.

Dém. du thm 2 : 1ère étape : l'affirmation pour X irréductible.

Il existe un recouvrement (qu'on peut choisir fini car X est quasi-compact) par des ouverts denses U_i, $1 \leq i \leq r$, et des g_i, h_i dans $A(X)$ tels que h_i est partout non nul sur U_i et

$$f|_{U_i} = g_i/h_i|_{U_i}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Les h_i n'ont pas de zéro commun dans X. Donc ils engendrent l'idéal $A(X)$ et il existe des $l_j \in A(X)$ t.q.

$$\sum_{j=1}^{r} l_j h_j = 1.$$

Soit $U = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$. Alors on a

$$f|_U = g_i/h_i|_U = \sum_{j=1}^{r} l_j g_j|_U \quad \left(\text{car } g_i|_U = \sum_{j=1}^{r} l_j h_j g_i|_U = \sum_{j=1}^{r} l_j h_i g_j|_U\right).$$

Donc $f = \sum_{j=1}^{r} l_j g_j$ sur X car U est dense et f et la somme sont continues.

2e étape : Soit $0 \neq H \in A(\mathbb{A}^n)$. Alors

a) Toute fonction régulière sur $D(h)$ s'écrit F/H^m pour un $F \in A(\mathbb{A}^n)$ et un $m \in \mathbb{N}$.

b) Toute fonction régulière sur $D(H)$ et nulle sur X s'écrit F/H^m pour un $F \in I(X)$ et un $m \in \mathbb{N}$.

Les applications

$$D(h) \underset{\sim}{\rightleftarrows} V(H \cdot X_{n+1} - 1) =: Y$$

$$x \longmapsto (x, 1/H(x))$$

$$(y_1, \ldots, y_n) \longleftarrow y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$$

sont régulières et inverses l'une de l'autre. Elles induisent des bijections entre les fct. régulières $D(H) \to k$ et $V(H \cdot X_{n+1} - 1) \to k$. L'espace $D(H)$ est irréductible. Donc $V(H \cdot X_{n+1} - 1)$ est irréductible. Par la première étape, toute fct. régulière sur $V(H \cdot X_{n+1} - 1)$ s'écrit

$$g = P(X_1, \dots, X_{n+1}) |_{V(X_{n+1} h - 1)}$$

Donc toute fct. régulière sur $D(H)$ s'écrit

$$f = F(X_1, \dots, X_n) / H^m .$$

De plus, si f s'annule sur $X \cap D(H)$, il est clair que F s'annule sur $X \cap D(H)$ et $H \cdot F$ s'annule sur X. Donc $H \cdot F \in I(X)$ et $f = F H / H^{m+1}$.

3e étape : l'affirmation dans le cas général.

On peut trouver un nombre fini d'ouverts $U_i = X \cap D(H_i)$ qui recouvrent A^n et un entier N tels que

a) Sur $U_i \cap X$, on a $f = L_i / H_i^N$, $L_i \in A(A^n)$

b) Sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$, on a

$$\frac{L_i}{H_i^N} - \frac{L_j}{H_j^N} = \frac{L_{ij}}{(H_i H_j)^N} \quad , \quad L_{ij} \in I(X).$$

Les H_i^N n'ont pas de zéro en commun dans A^n. Donc il existe des R_i tels que $\sum R_i H_i^N = 1$ dans $A(A^n)$.

Sur U_i, considérons la fonction régulière $v_i := \sum_s R_s \frac{L_{is}}{H_i^N}$.

Alors v_i s'annule sur $U_i \cap X$ et sur U_{ij}, on a

$$\begin{aligned} v_i - v_j &= \sum_s R_s \frac{L_{is}}{H_i^N} - \sum_t R_t \frac{L_{jt}}{H_j^N} \\ &= \sum_s R_s H_s^N \frac{L_{is}}{(H_s H_i)^N} - \sum_t R_t H_t^N \frac{L_{jt}}{(H_t H_j)^N} \\ &= \sum_s R_s H_s^N \left(\frac{L_i}{H_i^N} - \frac{L_s}{H_s^N}\right) - \sum_t R_t H_t^N \left(\frac{L_j}{H_j^N} - \frac{L_t}{H_t^N}\right) \\ &= \frac{L_i}{H_i^N} - \frac{L_j}{H_j^N} . \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{L_i}{H_i^N} - v_i = \frac{L_j}{H_j^N} - v_j \quad \text{sur } U_{ij}.$$

Par la première étape, il existe donc $P \in A(\mathbb{A}^n)$ tel que

$$P|_{U_i} = \left(\frac{L_i}{H_i^N} - v_i\right)\Big|_{U_i}$$

On a alors $f = P|_X$ et f est bien polynomiale. ✓