Algèbre 2

Bernhard Keller, Keller@math.jussieu.fr

P = note du partiel

E = note de l'examen

F = note finale $= \max\left(E, \frac{E+P}{2}\right)$

Programme :
I. Algèbre multilinéaire
II. Théorie de Galois
III. Introduction à la géom. alg.
IV. Introduction aux représentations

I. Algèbre multilinéaire

1. Produit tensoriel

1.1 Définition, propriété universelle

But : Ramener l'algèbre multilinéaire à l'algèbre linéaire.

Soient A un anneau com. et L, M des A-modules.

Déf : Le produit tensoriel $L \otimes_A M$ est le gr. abélien F/R, où

a) F est le groupe abélien libre sur l'ens. des couples (l, m), $l \in L$, $m \in M$,

b) R est le ss-gr. engendré par les éléments

$$\left.\begin{array}{l} (l_1+l_2, m) - (l_1, m) - (l_2, m) \\ (l, m_1+m_2) - (l, m_1) - (l, m_2) \\ (al, m) - (l, am) \end{array}\right\}$$

où $l, l_1, l_2 \in L$, $m, m_1, m_2 \in M$, $a \in A$.

On note $l \otimes m$ l'image de (l,m) dans $L \otimes_A M$ et on l'appelle un tenseur décomposable (= pur = typique).

Rques : 1) Les tenseurs purs engendrent le groupe abélien $L \otimes_A M$. Un élément général de $L \otimes_A M$ est une somme de tenseurs purs.

2) Pour $b \in A$, on a un homomorphisme de gr. ab.

$$\lambda_b : F \longrightarrow F, \ (l, m) \longmapsto (bl, m).$$

λ_b laisse stable $R \subseteq F$. Donc λ_b induit un homom.

$$\overline{\lambda_b} : L \otimes_A M \longrightarrow L \otimes_A M,$$

déterminé par son effet sur les tenseurs décomposables :

$$\overline{\lambda_b}(l \otimes m) = (bl) \otimes m = l \otimes (bm).$$

Déf (et exercice): La structure de A-module de $L \otimes_A M$ est définie par
$$b(l \otimes m) := (bl) \otimes m, \quad b \in A,\ l \in L,\ m \in M.$$

Exemples: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong 0$, $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}^{2\times 3}$.

Déf: Soit N un A-module. Une appl. $f : L \times M \longrightarrow N$ est bilinéaire si
$$\begin{aligned}
f(l_1 + l_2, m) &= f(l_1, m) + f(l_2, m)\\
f(l, m_1 + m_2) &= f(l, m_1) + f(l, m_2)\\
f(al, m) &= f(l, am)\\
f(al, m) &= a f(l, m)
\end{aligned}$$
pour tous $l_1, l_2, l \in L$, $m_1, m_2, m \in M$, $a \in A$.

Exemple: $\pi : L \times M \longrightarrow L \otimes_A M$, $(l, m) \longmapsto l \otimes m$ est bilinéaire et elle est universelle parmi les appl. bilin. déf. sur $L \times M$ au sens du

Lemme (propr. univ.): Pour toute appl. bilin. $L \times M \xrightarrow{f} N$, il existe une unique appl. A-linéaire
$$\bar{f} : L \otimes_A M \longrightarrow N$$
telle que $\bar{f} \circ \pi = f$ (i.e. $\bar{f}(l \otimes m) = f(l, m)$).

$$\begin{tikzcd}
L \times M \arrow[r, "\forall f \text{ bilin.}"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\
L \otimes_A M \arrow[ur, "\exists ! \bar{f} \text{ lin.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dém.: Vérification basée sur les propriétés univ. du gr. ab. libre et du quotient:

$$\begin{tikzcd}
L \times M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"', "\text{appl. (ensembliste)}"] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f} \text{ homom.}"] & F/R \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{f}$ homom. t.q. $\tilde{f}(R) = \{0\}$

✓

<u>Corollaire et déf.</u> : Soient L', M' des A-modules et

$$f : L \longrightarrow L', \quad g : M \longrightarrow M'$$

des appl. A-lin. Alors il existe une appl. A-lin.

$$f \tilde{\otimes} g \quad L \otimes_A M \longrightarrow L' \otimes_A M', \quad l \otimes m \longmapsto f(l) \otimes g(m)$$

bien définie. On a

(1) $$\mathbb{1}_L \tilde{\otimes} \mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{L \otimes M}$$

(2) $$(f_1 \tilde{\otimes} g_1) \circ (f \tilde{\otimes} g) = (f_1 \circ f) \tilde{\otimes} (g_1 \circ g)$$

où $f_1 : L' \longrightarrow L''$ et $g_1 : M' \longrightarrow M''$ sont A-lin.

<u>Dém.</u> :

$$\begin{tikzcd}
L \times M \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d] \arrow[dr, "\text{bilin.!}"] & L' \times M' \arrow[d, "\pi"] \\
L \otimes_A M \arrow[r, dashed, "f \tilde{\otimes} g"'] & L' \otimes_A M'
\end{tikzcd}$$

$\pi \circ (f \times g)$ est bilinéaire. D'où l'existence de $f \tilde{\otimes} g$.

Il suffit de vérifier (1) et (2) sur les tenseurs purs (ou bien on fait appel à l'unicité dans la propr. universelle). ✓

<u>Rques</u> : 1) En particulier, $f \tilde{\otimes} g$ est inversible si f et g le sont.

2) La notation $f \tilde{\otimes} g$ n'est pas anodine ! On a une appl.

$$\mathcal{L}(L, L') \otimes_A \mathcal{L}(M, M') \longrightarrow \mathcal{L}(L \otimes_A M, L' \otimes_A M')$$

$$f \otimes g \longmapsto f \tilde{\otimes} g$$

ni surj. ni injective en général.

<u>Néanmoins</u>, on écrit souvent $f \otimes g$ au lieu de $f \tilde{\otimes} g$.

Lemme (adjonction) :

Soit $Bil_A(L,M,N) = \{f : L\times M \to N \mid f \text{ bilinéaire}\}$

On a des bijections canoniques

$$\boxed{\mathcal{L}_A(L\otimes_A M, N) \underset{(1)}{\simeq} Bil_A(L,M,N) \underset{(2)}{\simeq} \mathcal{L}_A(L, \mathcal{L}_A(M,N))}$$

Dém : (1) déjà vu.

(2) Les applications suivantes sont inverses l'une de l'autre.

$$f \text{ bilin.} \longmapsto (\varphi : l \mapsto (m \mapsto f(l,m)))$$

$$((l,m) \mapsto (\psi(l))(m)) \longleftarrow\!\shortmid \ \psi \quad \checkmark$$

Rque : Formellement, l'opération $L \mapsto L\otimes_A M$ apparaît comme un "adjoint à gauche" de l'opération $N \longmapsto \mathcal{L}_A(M,N)$.

1.2 Propriétés de base

Soit A un anneau com.

<u>Prop</u> : Soient L, M, N des A-modules. On a des isom. can.

a) $A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$, $a \otimes m \longmapsto am$

b) $L \otimes_A (M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} (L \otimes_A M) \otimes_A N$, $l \otimes (m \otimes n) \mapsto (l \otimes m) \otimes n$

c) $L \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A L$, $m \otimes l \longmapsto l \otimes m$

d) $(L \oplus M) \otimes N \xrightarrow{\sim} (L \otimes N) \oplus (M \otimes N)$, $(l, m) \otimes n \mapsto (l \otimes n, m \otimes n)$

<u>Dém.</u> : a) L'appl. $\tilde{\varphi} : A \times M \longrightarrow M$, $(a, m) \longmapsto am$ est <u>bilinéaire</u> (car M est un A-module). Donc la règle $a \otimes m \longmapsto am$ définit bien une appl. <u>A-linéaire</u> $\varphi : A \otimes_A M \longrightarrow M$. Soit

$$\psi : M \longrightarrow A \otimes_A M, \quad m \longmapsto 1 \otimes m.$$

Alors ψ est A-linéaire, on a $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_M$ et

$$\psi \varphi (a \otimes m) = \psi(am) = 1 \otimes am = a \otimes m$$

pour tous $a \in A$ et $m \in M$. Comme les tenseurs décomposables engendrent $A \otimes M$, il s'ensuit que $\psi \varphi = \mathbb{1}_{A \otimes_A M}$.

b), c), d) : Dans chaque cas, il faut vérifier que la règle donnée définit bien une appl. A-lin. et exhiber son inverse. Exercice ! ✓

Exemple : Posons $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous avons

$$C_6 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{15} \cong (C_2 \oplus C_3) \otimes_{\mathbb{Z}} (C_3 \oplus C_5)$$

$$\underset{d)}{\cong} \cancel{C_2 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3} \oplus \cancel{C_2 \otimes_{\mathbb{Z}} C_5} \oplus C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3 \oplus \cancel{C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_5}$$

$$= C_3 \otimes_{\mathbb{Z}} C_3 \underset{!}{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \underset{a)}{=} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

<u>Corollaire:</u> a) Si L et F sont libres de bases $l_1, \dots, l_p$ et $f_1, \dots, f_q$, alors $L \otimes_A F$ est libre de base $l_i \otimes f_j$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le q$. En particulier,

$$rg(L \otimes_A F) = (rg L) \cdot (rg F)$$

b) Si L est libre de base $l_1, \dots, l_p$ et M qcq, alors

$$M \oplus \dots \oplus M \xrightarrow{\sim} L \otimes_A M$$
$$(m_1, \dots, m_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} l_i \otimes m_i$$

<u>Dém.</u>: La donnée de la base $l_1, \dots, l_p$ équivaut à la donnée de l'isomorphisme $A^p \xrightarrow{\sim} L$, $(a_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} a_i l_i$.

On a $$L \otimes_A F \xleftarrow{\sim} A^p \otimes_A A^q \xleftarrow{\sim} \Big(\bigoplus_{i=1}^{p} A\Big) \otimes_A A^q \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{p} (A \otimes_A A^q) \xleftarrow{\sim} A^{pq}.$$

De même pour b). ✓

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules.

<u>Rappel</u>: $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i = 0 \text{ pour presque tout } i \in I\}$.

La famille des injections can. $\iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ est <u>universelle</u>: pour toute famille d'appl. lin. $f_j : M_j \longrightarrow N$, il existe une unique appl. $f : \bigoplus_{i \in I} M \longrightarrow N$ t.q. $f \circ \iota_j = f_j$, $\forall j$ (à savoir: $f((m_i)) = \sum_{i \in I} f(m_i)$).

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{j''} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & M_{j'} \arrow[r] \arrow[drr, bend left] & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[dr, dashed] & \\
M_j \arrow[urr] \arrow[rrr, bend right] & & & N
\end{tikzcd}$$

<u>Prop.</u>: Soit N un A-module. On a un isom. can.

$$\varphi : \Big(\bigoplus_{i \in I} M_i\Big) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N), \quad (m_i) \otimes n \longmapsto (m_i \otimes n).$$

Dém. : On vérifie que φ est bien définie et on exhibe un inverse, grâce à la propriété universelle de $\bigoplus_{i\in I} M_i$. ✓

Cor. Si L et F sont libres de bases $(l_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$, alors $L \otimes_A F$ est libre de base $(l_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

Dém. : Comme dans le cas de rang fini, grâce à la prop. ✓

Exemple : $A[X]$ est libre de base X^i, $i\in\mathbb{N}$.
Donc $A[X]\otimes_A A[X]$ est libre de base $X^i\otimes X^j$, $(i,j)\in\mathbb{N}^2$
et l'appl. $A[X]\otimes_A A[X] \longrightarrow A[X,Y]$, $X^i\otimes X^j \longmapsto X^iY^j$
est un isomorphisme.

Rque : On a une appl. can.

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)\otimes_A N \longrightarrow \prod_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$$

mais elle n'est ni surjective ni injective en général.