Dém. : On vérifie que φ est bien définie et on exhibe un inverse, grâce à la propriété universelle de $\bigoplus_{i\in I} M_i$. ✓

<u>Cor.</u> Si L et F sont libres de bases $(l_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$, alors $L\otimes_A F$ est libre de base $(l_i\otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

<u>Dém.</u> : Comme dans le cas de rang fini, grâce à la prop. ✓

<u>Exemple</u> : $A[X]$ est libre de base X^i, $i\in\mathbb{N}$.

Donc $A[X]\otimes_A A[X]$ est libre de base $X^i\otimes X^j$, $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, et l'appl. $A[X]\otimes_A A[X]\longrightarrow A[X,Y]$, $X^i\otimes X^j\longmapsto X^iY^j$ est un isomorphisme.

<u>Rque</u> : On a une appl. can.

$$\Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)\otimes_A N\longrightarrow \prod_{i\in I}(M_i\otimes_A N)$$

mais elle n'est ni surjective ni injective en général.

<u>Lemme</u> : Si L, M sont des A-modules annulés par un idéal I de A, alors on a l'isom. can.

$$\varphi : L\otimes_A M\xrightarrow{\sim} L\otimes_{A/I} M\ ,\quad l\otimes m\longmapsto l\otimes m.$$

Dém. : $L\otimes_A M$ est encore annulé par I. L'appl.

$$L\times M\longrightarrow L\otimes_A M\ ,\quad (l,m)\longmapsto l\otimes m$$

est A/I-bilinéaire et induit un inverse de φ. ✓

Exemple : $A/I\otimes_A A/I\simeq A/I\otimes_{A/I} A/I\simeq A/I$

<u>Prop.</u> : Soient L et M des A-modules libres de bases $e_1, \dots, e_p$ et $f_1, \dots, f_q$. Soient $\varphi : L \longrightarrow L$ et $\psi : M \longrightarrow M$ des endomorphismes de matrices $B \in M_p(A)$ et $C \in M_q(A)$. Alors la matrice de

$$\varphi \otimes \psi : L \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow L \underset{A}{\otimes} M$$

dans la base

$$e_1 \otimes f_1,\ e_1 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_2, \dots, e_p \otimes f_q \quad \text{(ordre lex.)}$$

resp. $e_1 \otimes f_1,\ e_2 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_2, \dots, e_p \otimes f_q$ (ordre antilex.)

est

$$\begin{bmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1p}C \\ b_{21}C & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ b_{p1}C & \cdots & b_{pp}C \end{bmatrix} \ (1a) \qquad \text{resp.} \qquad \begin{bmatrix} Bc_{11} & \cdots & Bc_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ Bc_{q1} & & Bc_{qq} \end{bmatrix} \ (1b) \qquad (1)$$

On a

$$\mathrm{tr}(\varphi \otimes \psi) = (\mathrm{tr}\,\varphi)(\mathrm{tr}\,\psi) \qquad (2)$$

$$\det(\varphi \otimes \psi) = (\det \varphi)^{\mathrm{rg} M} (\det \psi)^{\mathrm{rg} L}. \qquad (3)$$

<u>Dém.</u> : (1) On a

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \psi)(e_j \otimes f_s) &= \varphi(e_j) \otimes \psi(f_s) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ij} e_i\right) \otimes \left(\sum_{r=1}^{q} c_{rs} f_r\right) \\ &= \sum_{i,r} b_{ij} c_{rs} (e_i \otimes f_r) \end{aligned}$$

✓

(2) On a $\mathrm{tr}(\varphi \otimes \psi) = \sum_{i=1}^{p} b_{ii}\, \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(\varphi)\,\mathrm{tr}(\psi)$

(3) $\det(\varphi \otimes \psi) = \underset{(1b)}{\det(\varphi \otimes 1\!\!1_M)}\ \underset{(1a)}{\det(1\!\!1_L \otimes \psi)} \underset{\uparrow \text{ 2 bases dist.!}}{=} \det(\varphi)^{\mathrm{rg} M} (\det \psi)^{\mathrm{rg} L}$. ✓

1.3 Produit tensoriel par un dual

Soient A un anneau com. et L, M des A-modules.

Soit $L^\vee = \mathcal{L}(L,A)$

Prop. : On a une appl. lin. can.

$$\varphi : L^\vee \otimes_A M \longrightarrow \mathcal{L}(L,M), \ f\otimes m \longmapsto (l \mapsto f(l).m)$$

Elle est bijective si

a) L est libre de type fini

ou si b) M est libre et L de type fini

Rques : Supposons que A est un corps com.

1) Les images par φ des tenseurs purs sont les appl. lin. de rang 1.

2) L'image de φ est le ss-esp. des appl. lin. de rang fini.

3) Si L et M sont de dim. infinie, l'appl.

$$\underbrace{\mathcal{L}(L,A)}_{L^\vee} \otimes_A \underbrace{\mathcal{L}(A,M)}_{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{L\otimes_A A}_{L}, \underbrace{A\otimes_A M}_{M})$$

$$f \otimes g \longmapsto f \tilde{\otimes} g$$

n'est pas surjective.

Dém. de la prop. : φ est bien défini car

$$L^\vee \times M \longrightarrow \mathcal{L}(L,M), \ (f,m) \longmapsto (l \mapsto f(l).m)$$

est bilinéaire.

a) Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de L et $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$ la base duale.

Alors $\psi : \mathcal{L}(L,M) \to L^\vee \otimes_A M, \ g \longmapsto \sum e_i^\vee \otimes g(e_i)$

est inverse de φ.

b) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de M et, pour $j \in I$, soit $e_j^\vee \in M^\vee$ t.q. $e_j^\vee(e_i) = \delta_{ij}$, $i,j \in I$. Alors

$$\psi : \mathcal{L}(L,M) \longrightarrow L^\vee \otimes_A M, \quad g \longmapsto \sum_{j\in I} (e_j^\vee \circ g) \otimes e_j$$

est bien définie (L de type fini $\Rightarrow$ $e_j^\vee \circ g = 0$ pour presque tout $j \in I$) et inverse de φ. ✓

1.4 Produit tensoriel et suites exactes

Soient $L \xrightarrow{u} M$ une appl. A-lin. et X un A-module.

On étudie

$$u \otimes_A 1\!\!1_X : L \otimes_A X \longrightarrow M \otimes_A X.$$

Constat 1 : u injectif $\not\Rightarrow$ $u \otimes_A 1\!\!1_X$ injectif.

Exemple : $\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$

est injective, mais $u \otimes_{\mathbb{Z}} 1\!\!1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ est nulle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{(2\cdot) \otimes 1\!\!1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad 0 \quad} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

Constat 2 : u surjectif $\Rightarrow$ $u \otimes_A 1\!\!1_X$ surj. (relever les tenseurs purs !)

On a mieux :

Prop. : Soit $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$ une suite exacte (i.e. v surj. et $\ker v = \operatorname{Im} u$). Alors

$$L \otimes_A X \xrightarrow{u \otimes 1\!\!1_X} M \otimes_A X \xrightarrow{v \otimes 1\!\!1_X} N \otimes_A X \longrightarrow 0$$

est exacte.

Dém. : On a $(v \otimes 1\!\!1_X) \circ (u \otimes 1\!\!1_X) = (v \circ u) \otimes 1\!\!1_X = 0$. Donc $v \otimes 1\!\!1_X$ induit une appl. A-lin.

$$\varphi : M \otimes_A X / \operatorname{Im}(u \otimes 1\!\!1_X) \longrightarrow N \otimes_A X.$$

Il suffit de montrer que c'est un isom. On construit un inverse induit par une appl. bilin.

$$b : N \times X \longrightarrow M \otimes_A X / \operatorname{Im}(u \otimes 1\!\!1_X).$$

Pour $(n,x)\in N\times X$, on choisit m t.q. $v(m)=n$ et on pose

$$b(n,x) := \text{classe de } m\otimes x \text{ dans } M\underset{A}{\otimes} X / \mathrm{Im}(u\otimes 1_X).$$

On vérifie que b est bien défini et bilinéaire et induit un inverse de φ. ✓

Corollaire : Soient des suites exactes

$$L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

$$X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$$

Alors la suite

$$(L\underset{A}{\otimes} Y)\oplus(M\underset{A}{\otimes} X) \xrightarrow{[i\otimes 1,\, 1\otimes j]} M\underset{A}{\otimes} Y \xrightarrow{p\otimes q} N\underset{A}{\otimes} Z \longrightarrow 0$$

est exacte.

Dém. : Les lignes et les colonnes du diagramme suivant sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
L\otimes X \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes X \arrow[r, "p\otimes 1_X"'] \arrow[d, "1\otimes j"] & N\otimes X \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes j"] & 0 \\
L\otimes Y \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d] & M\otimes Y \arrow[r, "p\otimes 1"] \arrow[d] \arrow[dr, "p\otimes q"] & N\otimes Y \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes q"] & 0 \\
L\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & N\otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

1) $p\otimes q$ est surjectif car composé des surjections $1\otimes q$ et $p\otimes 1$.

2) $(p\otimes q)\circ[i\otimes 1, 1\otimes j] = [pi\otimes q, p\otimes qj] = [0,0]=0.$

Donc $\mathrm{Ker}(p\otimes q) \supseteq \mathrm{Im}[i\otimes 1, 1\otimes j]$

3) Une "chasse au lion" donne l'autre inclusion !

$$\begin{tikzcd}
 & ④\ t \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & z\ ③ \arrow[d, mapsto, "1\otimes j"] \\
⑤\ u \arrow[r, mapsto, "i\otimes 1"] & x-x' \quad x' & x \arrow[r, mapsto, "p\otimes 1"] \arrow[dr, mapsto, "p\otimes q"'] & y\ ② \arrow[d, mapsto] \\
 & & & 0\ ①
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x &= x' + (x-x') \\ &= (1\otimes j)(t) + (i\otimes 1)(u) \end{aligned}$$

✓

Corollaire : a) Pour des ss-modules $L' \subseteq L$ et $M' \subseteq M$, on a

$$L/L' \otimes_A M/M' \simeq L \otimes_A M \big/ \big((\text{image de } L \otimes_A M') + (\text{image de } L' \otimes_A M) \big)$$

b) Pour des idéaux I, J de A, on a

$$A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$$

c) On a $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$.

Dém. : On utilise les suites exactes

$$L' \longrightarrow L \longrightarrow L/L' \longrightarrow 0$$

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

✓

⋮

1.5 Restriction et extension des scalaires

Soient A, B des anneaux (com., avec 1).
Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un morph. d'anneaux
(p.ex. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, ...)

Soit M un B-module.
Constat : Le groupe abélien M devient un A-module pour la mult.

$$a.m := \rho(a)m \quad , \quad a \in A,\ m \in M.$$

Déf : On appelle restriction de M à A (ou "le long de ρ") le A-module $M|_A$ (ou $_\rho M$) obtenu ainsi.

Rque : En particulier, $B|_A$ est un A-module.
Exemple : V un $\mathbb{C}$-esp. vect. $\Rightarrow$ $V|_{\mathbb{R}}$ = $\mathbb{R}$-esp. vect. ss-jacent.
Idée : On "oublie" une partie de la structure donnée.

Soit M un A-module.

<u>Constat</u> : $B \otimes_A M$ devient un B-module via
$$b'(b \otimes m) := (b'b) \otimes m.$$

<u>Déf</u> : $M^B := B \otimes_A M$ est le module obtenu par
<u>extension des scalaires</u> de A à B.

<u>Exemples</u> : 1) V un $\mathbb{R}$-esp. vect.
$$\Rightarrow \quad V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \text{ son "complexifié"}$$

2) M un $\mathbb{Z}$-module $\Rightarrow$ $M^{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$-esp. vect.

p.ex. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0 \quad (n \geq 1)$.

<u>Lemme</u> : M libre de base $e_1, \ldots, e_p$ sur A
$\Rightarrow$ $B \otimes_A M$ libre de base $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_p$ sur B.

<u>Dém.</u> : On a $A^p \xrightarrow{\sim} M$ (par $e_1, \ldots, e_p$).
Donc $B^p \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A^p \xrightarrow{\sim} B \otimes_A M$ et l'image de la base can. est $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_p$. ✓

<u>Rques</u> : 1) Quel est le module $(B \otimes_A M)|_A$?

Réponse : $(B \otimes_A M)|_A = (B|_A) \otimes_A M$. (!)

2) L'extension des scalaires ne préserve pas l'injectivité :
$$(\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$