

Lemme: M libre de base e_1, \dots, e_p sur A .

- a) $M^B = B \otimes_A M$ est libre de base $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_p$ sur B .
- b) $\varphi: M \rightarrow M$ endom. de matrice $C \in M_p(A)$ dans e_1, \dots, e_p
 $\Rightarrow \varphi^B: M^B \rightarrow M^B$ endom. de matrice
 $g(C) := (g(c_{ij}))$ dans $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_p$.

Exemple: $C \in M_p(\mathbb{R})$ matrice d'un endom. $\varphi: V \rightarrow V$ d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de base e_1, \dots, e_p
 $\Rightarrow C \in M_p(\mathbb{C})$ est la matrice de l'endom. complexifié $\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ dans la base $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_p$.

Dém. du lemme: a) On a $A^p \xrightarrow{\sim} M$ par e_1, \dots, e_p .

Donc $B^p = B \otimes_A A^p \xrightarrow{\sim} B \otimes_A M$ par $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_p$

b) On a $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^p c_{ij} e_i, 1 \leq j \leq p$. Donc

$$\varphi^B(1 \otimes e_j) = (1 \otimes \varphi)(1 \otimes e_j) = \sum_{i=1}^p 1 \otimes c_{ij} e_i = \sum_{i=1}^p g(c_{ij}) (1 \otimes e_i)$$

Reques: 1) Quel est le module $(B \otimes_A M)_A$? Réponse: $(B/A) \otimes_A M$!

2) L'extension des scalaires ne préserve pas l'injectivité:

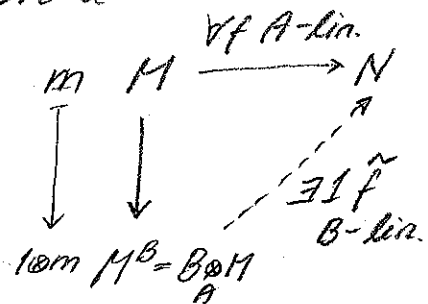
$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: (\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Mais si $u: L \rightarrow M$ est injectif et B/A est libre (p.ex.), alors $u^B: L^B \rightarrow M^B$ est injectif.

Lemme (adjonction): Soit N un B -module. On a

des bijections canoniques:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B(M^B, N) &\cong \mathcal{L}_A(M, N/A) \\ f &\longmapsto (m \mapsto f(1 \otimes m)) \\ (b \otimes m \mapsto b g(m)) &\longleftarrow g \end{aligned}$$



2. Algèbres tensorielle, symétrique, extérieure

2.1 Applications multilinéaires

Soient A un anneau com., $p \geq 1$ un entier, N_1, \dots, N_p des A -mod.

Déf.: Soit M un A -module. Une appl. $f: N_1 \times \dots \times N_p \rightarrow M$

est multilinéaire si, pour tout $1 \leq i \leq p$ et tous

$n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_p, n_j \in N_j$, l'appl.

$$N_i \rightarrow M, n \mapsto f(n_1, \dots, n_{i-1}, n, n_{i+1}, \dots, n_p)$$

est A -linéaire.

Exemple: $N_1 \times N_2 \rightarrow M$ est multilin. ssi elle est bilin. (!)

Déf.:

$$\bigotimes_{i=1}^p N_i := \begin{cases} N_1, & p=1 \\ N_1 \otimes_A \left(\bigotimes_{i=2}^p N_i \right), & p \geq 2. \end{cases}$$

Lemme: a) L'appl. can.

$$\pi: N_1 \times \dots \times N_p \rightarrow \bigotimes_{i=1}^p N_i, (n_1, \dots, n_p) \mapsto n_1 \otimes \dots \otimes n_p$$

est multilinéaire et universelle parmi les appl. multilin. définies sur $N_1 \times \dots \times N_p$.

b) Pour tout $1 \leq j < p$, on a un hom. can.

$$\left(\bigotimes_{i=1}^j N_i \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i=j+1}^p N_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^p N_i$$

c) Si N_i est libre sur $(e_{ij})_{j \in J_i}$, alors $\bigotimes_{i=1}^p N_i$ est libre

sur les $e_{1j_1} \otimes \dots \otimes e_{pj_p}$, $(j_1, \dots, j_p) \in \prod_{i=1}^p J_i$.

Dém.: b) par assoc. de \otimes , c) par le cor. 1.2, a) sse = {appl. multilin.}

$$\mathcal{L}(N_1 \times \dots \times N_p, M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{L}(N_2 \times \dots \times N_p, M)) \xrightarrow{\text{réc.}} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{L}\left(\bigotimes_{i=2}^p N_i, M\right))$$

$$\xrightarrow{\text{p.u. } \otimes} \mathcal{L}\left(N_1 \otimes_A \bigotimes_{i=2}^p N_i, M\right). \quad \checkmark$$

2.2 Anneaux gradués.

Soit R un anneau (non néc. com.).

Def: Une graduation de R est une décomposition

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n \quad (*)$$

du groupe abélien R telle que $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Les éléments $x \in R_i$ sont dits homogènes de degré i et on écrit $\deg(x) = i$.

Def: Si R est une algèbre ou un anneau com. A , alors $(*)$ est une graduation d'algèbre si les R_n sont des A -ss-modules.

Exemple: $A[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} AX^n$ est une graduation de A -alg.

$$A[X_1, X_2] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigoplus_{i+j=n} AX_i^i X_2^j \right)$$

Soit R un anneau gradué (i.e. muni d'une graduation).

Def: Un idéal (bilatère) $I \triangleleft R$ est homogène si on a

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I \cap R_n)$$

Prop: Un idéal est homogène s'il est engendré par des éléments homogènes (et réciproquement).

Def: Un morph. $f: R \rightarrow S$ entre anneaux gradués est homogène si $f(R_n) \subseteq S_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Lemme: Soient $I \triangleleft R$ un idéal gradué et $\pi: R \rightarrow R/I$ la projection. Alors $R/I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi(R_n)$ est une graduation et $\pi: R \rightarrow R/I$ est homogène.

Dém.: On a $R/I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n / \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n / I_n$ ✓

2.3 L'algèbre tensorielle

Soit M un module sur un anneau com. A .

Posons $T^0(M) = A$ et $T^i(M) = M^{\otimes i} := \bigotimes_{j=1}^i M$.

Def: L'algèbre tensorielle sur M est

$$T(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M)$$

munie de la mult. donnée par

$$T^i(M) \times T^j(M) \longrightarrow T^{i+j}(M)$$

$$(m_1 \otimes \dots \otimes m_i, m'_1 \otimes \dots \otimes m'_j) \longmapsto m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes m'_1 \otimes \dots \otimes m'_j.$$

Requis: 1) La mult. est bien définie (2.1 a), associative et admet 1_A pour unité. $T(M)$ est une A -algèbre graduée (non com. en général) engendrée par $M \hookrightarrow T(M)$.

2) Si M est libre de base $\{e_i\}_{i \in I}$, alors le A -module $T(M)$ est libre de base les "mots" (2.1 c)

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad n \in \mathbb{N}, (i_1, \dots, i_n) \in I^n.$$

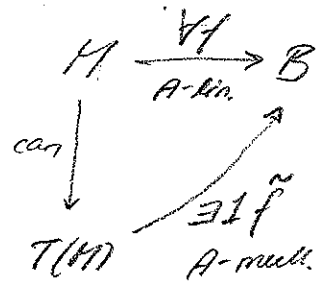
et la mult. est induite par la concaténation des mots.

Notation: $A\langle X_1, \dots, X_n \rangle := T(AX_1 \otimes \dots \otimes AX_n) = \text{alg. de pol. non com.}$

Lemme (prop. univ.): L'inclusion can: $M \rightarrow T(M)$ est le morph.

universel vers une A -algèbre, i.e. pour toute A -algèbre B , pour tout morph. de A -modules $f: M \rightarrow B$, il existe un unique morph. de A -algèbres $\tilde{f}: T(M) \rightarrow B$ t.q. $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

$$\text{Hom}_{A\text{-alg}}(T(M), B) \cong \text{Hom}_{A\text{-mod}}(M, B_{\text{mod}})$$



Dém.: \tilde{f} est déterminée par $\tilde{f}|_{T^1(M)}$. On doit

$$\begin{aligned}
 \text{avoir: } \tilde{f}(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) &= \tilde{f}(m_1, \dots, m_n) \\
 &= f(m_1) \dots f(m_n) \quad (*)
 \end{aligned}$$

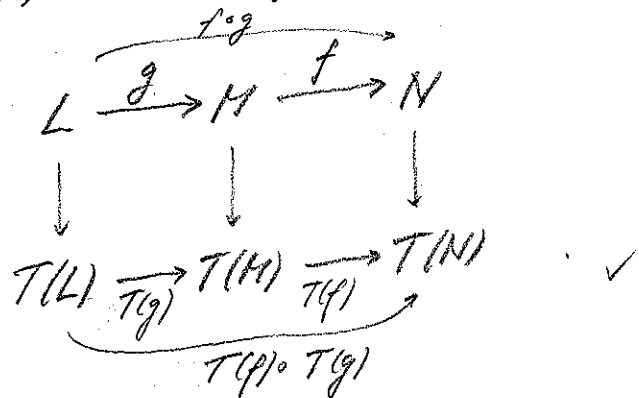
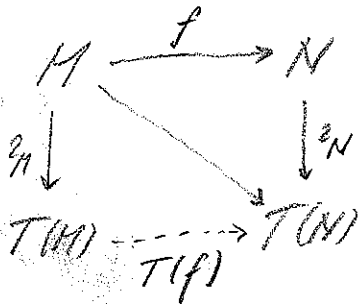
D'où l'unicité. Pour l'existence, on définit \tilde{f} par (*), grâce au lemme 2.1 a). \checkmark

Corollaire: Pour toute appl. A-lin. $f: M \rightarrow N$, (fonctorialité) il existe un unique morph. de A-alg.

$$T(f): T(M) \rightarrow T(N) \text{ l.g. } T(f) \circ \eta_M = \eta_N \circ f.$$

$$\text{On a } T(\text{Id}_M) = \text{Id}_{T(M)} \text{ et } T(f \circ g) = T(f) \circ T(g).$$

Dém.:

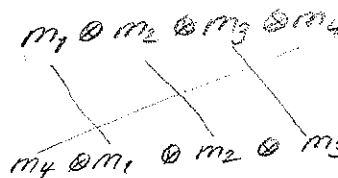


2.4 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Soient A un anneau com., M un A -module, $n \geq 1$ un entier et S_n le groupe symétrique. On a une action à gauche de S_n sur $M^{\otimes n}$:

$$\sigma(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma^{-1}(n)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



Def: $t \in T^n(M)$ est
 symétrique $\iff \sigma t = t, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$
 antisymétrique $\iff \sigma t = \text{sgn}(\sigma) t, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$
 $\mathcal{S}^n(M) = \{ \text{tenseurs sym. dans } T^n(M) \}$
 $\mathcal{A}^n(M) = \{ \text{tenseurs antisym. dans } T^n(M) \}$

Lemme: Soit $P_n : T^n M \rightarrow T^n M, t \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t$
 Alors $\text{Im } P_n \subseteq \mathcal{S}^n(M)$ et si $\frac{1}{n!} \in A$, alors
 $\frac{1}{n!} P_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{S}^n(M)$.

Dém.: Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a
 $\tau P_n(t) = \tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \tau \sigma t = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sigma' t = P_n t.$

Donc $\text{Im } P_n \subseteq \mathcal{S}^n$. Pour $t \in \mathcal{S}^n$, on a $\sigma t = t, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, et
 donc $P_n t = (n!) t$ et $(\frac{1}{n!} P_n)(t) = t.$

Il s'ensuit $\frac{1}{n!} P_n$ est idempotent et d'image $\mathcal{S}^n(M)$. \checkmark

Lemme: Soit $Q_n : T^n M \rightarrow T^n M, t \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma t.$

Alors $\text{Im } Q_n \subseteq \mathcal{A}^n(M)$ et si $\frac{1}{n!} \in A$, alors
 $\frac{1}{n!} Q_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{A}^n(M)$.

Dém.: analogue. \checkmark