Lemme : M libre de base $e_1, \dots, e_p$ sur A.

a) $M^B = B \underset{A}{\otimes} M$ est libre de base $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$ sur B.

b) $\varphi : M \to M$ endom. de matrice $C \in M_p(A)$ dans $e_1, \dots, e_p$

$\Rightarrow \varphi^B : M^B \to M^B$ endom. de matrice

$\rho(C) := (\rho(c_{ij}))$ dans $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$.

Exemple : $C \in M_p(\mathbb{R})$ matrice d'un endom. $\varphi : V \to V$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de base $e_1, \dots, e_p$

$\Rightarrow C \in M_p(\mathbb{C})$ est la matrice de l'endom. complexifié $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ dans la base $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$.

Dém. du lemme : a) On a $A^p \xrightarrow{\sim} M$ par $e_1, \dots, e_p$.

Donc $B^p \cong B \underset{A}{\otimes} A^p \xrightarrow{\sim} B \underset{A}{\otimes} M$ par $1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_p$

b) On a $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} e_i$, $1 \leq j \leq p$. Donc

$$\varphi^B(1\otimes e_j) = (\mathbb{1}\otimes\varphi)(1\otimes e_j) = \sum_{i=1}^{p} 1\otimes c_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{p} \rho(c_{ij})\otimes e_i = \sum_{i=1}^{p} \rho(c_{ij})(1\otimes e_i).$$

✓

Rques : 1) Quel est le module $(B \underset{A}{\otimes} M)|_A$? Réponse : $(B|_A) \underset{A}{\otimes} M$!

2) L'extension des scalaires ne préserve pas l'injectivité :

$\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $(2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Mais si $u : L \to M$ est injectif et $B|_A$ est libre (p.ex.), alors $u^B : L^B \to M^B$ est injectif.

Lemme (adjonction) : Soit N un B-module. On a des bijections canoniques :

$$\mathcal{L}_B(M^B, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_A(M, N|_A)$$

$$f \longmapsto (m \mapsto f(1\otimes m))$$

$$(b\otimes m \mapsto b\,g(m)) \longleftarrow g$$

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[d, mapsto] & M \arrow[r, "\forall f\ A\text{-lin.}"] \arrow[d] & N \\
1\otimes m & M^B = B \underset{A}{\otimes} M \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{f}"', "B\text{-lin.}"] &
\end{tikzcd}$$

2. Algèbres tensorielle, symétrique, extérieure

2.1 Applications multilinéaires

Soient A un anneau com., $p \geq 1$ un entier, $N_1, \ldots, N_p$ des A-mod.

<u>Déf</u>: Soit M un A-module. Une appl. $f : N_1 \times \ldots \times N_p \longrightarrow M$ est <u>multilinéaire</u> si, pour tout $1 \leq i \leq p$ et tous $n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_p$, $n_j \in N_j$, l'appl.

$$N_i \longrightarrow M, \; n \longmapsto f(n_1, \ldots, n_{i-1}, n, n_{i+1}, \ldots, n_p)$$

est A-linéaire.

<u>Exemple</u>: $N_1 \times N_2 \longrightarrow M$ est multilin. ssi elle est bilin. (!).

<u>Déf.</u>:

$$\bigotimes_{i=1}^{p} N_i := \begin{cases} N_1 & , p = 1 \\ N_1 \underset{A}{\otimes} \left(\bigotimes_{i=2}^{p} N_i\right) & , p \geq 2. \end{cases}$$

<u>Lemme</u>: a) L'appl. can.

$$\pi : N_1 \times \ldots \times N_p \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{p} N_i, \; (n_1, \ldots, n_p) \longmapsto n_1 \otimes \ldots \otimes n_p$$

est multilinéaire et universelle parmi les appl. multilin. définies sur $N_1 \times \ldots \times N_p$.

b) Pour tout $1 \leq j < p$, on a un isom. can.

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{j} N_i\right) \underset{A}{\otimes} \left(\bigotimes_{i=j+1}^{p} N_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^{p} N_i .$$

c) Si N_i est libre sur $(e_{ij})_{j \in J_i}$, alors $\bigotimes_{i=1}^{p} N_i$ est libre sur les $e_{1j_1} \otimes \ldots \otimes e_{pj_p}$, $(j_1, \ldots, j_p) \in \prod_{i=1}^{p} J_i$.

<u>Dém.</u>: b) par assoc. de $\underset{A}{\otimes}$, c) par le cor. 1.2, a) $\mathcal{ML} = \{$appl. multilin.$\}$

$$\mathcal{ML}(N_1 \times \ldots \times N_p, M) \underset{!}{\simeq} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{ML}(N_2 \times \ldots \times N_p, M)) \underset{\text{réc.}}{\simeq} \mathcal{L}(N_1, \mathcal{L}(\bigotimes_{i=2}^{p} N_i, M))$$

$$\underset{\text{p.u.} \otimes}{\simeq} \mathcal{L}(N_1 \underset{A}{\otimes} \bigotimes_{i=2}^{p} N_i, M). \quad \checkmark$$

2.2 Anneaux gradués :

Soit R un anneau (non néc. com.).

<u>Déf</u> : Une <u>graduation</u> de R est une décomposition

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n \quad (*)$$

du groupe abélien R telle que $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ pour tous $i,j \in \mathbb{N}$. Les éléments $x \in R_i$ sont dits <u>homogènes de degré</u> i et on écrit $\deg(x) = i$.

<u>Déf</u> : Si R est une algèbre sur un anneau com. A, alors $(*)$ est une <u>graduation d'algèbre</u> si les R_n sont des A-ss-modules.

<u>Exemple</u> : $A[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} AX^n$ est une graduation de A-alg.

$$A[X_1, X_2] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{i+j=n} AX_1^i X_2^j \Big)$$

Soit R un anneau gradué (i.e. muni d'une graduation).

<u>Déf</u> : Un idéal (bilatère) $I \triangleleft R$ est <u>homogène</u> si on a

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I \cap R_n)$$

<u>Rque</u> : Un idéal est homogène s'il est engendré par des éléments homogènes (et réciproquement).

<u>Déf</u> : Un morph. $f : R \to S$ entre anneaux gradués est <u>homogène</u> si $f(R_n) \subseteq S_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

<u>Lemme</u> : Soient $I \triangleleft R$ un idéal gradué et $\pi : R \to R/I$ la projection. Alors $R/I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi(R_n)$ est une graduation et $\pi : R \to R/I$ est homogène.

Dém. : On a $R/I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n / \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n/I_n$. ✓

2.3 L'algèbre tensorielle

Soit M un module sur un anneau com. A.

Posons $T^0(M) = A$ et $T^i(M) = M^{\otimes_A^i} := \bigotimes_{j=1}^{i}{}_A M$.

Déf : L'algèbre tensorielle sur M est

$$T(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M)$$

munie de la mult. donnée par

$$T^i(M) \times T^j(M) \longrightarrow T^{i+j}(M)$$

$$(m_1 \otimes \dots \otimes m_i \,,\, m_1' \otimes \dots \otimes m_j') \longmapsto m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes m_1' \otimes \dots \otimes m_j'.$$

Rques : 1) La mult. est bien définie (2.1 a), associative et admet 1_A pour unité. $T(M)$ est une A-algèbre graduée (non com. en général) engendrée par $M \hookrightarrow T(M)$.

2) Si M est libre de base $(e_i)_{i\in I}$, alors le A-module $T(M)$ est libre de base les "mots" (2.1c)

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}, \quad n\in\mathbb{N},\ (i_1,\dots,i_n)\in I^n.$$

et la mult. est induite par la concaténation des mots.

Notation : $A\langle X_1,\dots,X_n\rangle := T(AX_1 \oplus \dots \oplus AX_n)$ = alg. de pol. non com.

Lemme (propr. univ.) : L'inclusion can : $M \to T(M)$ est le morph. universel vers une A-algèbre, i.e. pour toute A-algèbre B, pour tout morph. de A-modules $f : M \to B$, il existe un unique morph. de A-algèbres $\tilde{f} : T(M) \to B$ t.q. $\tilde{f} \circ \mathrm{can} = f$.

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(T(M), B) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M, B_{mod})$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f"', "A\text{-lin.}"] \arrow[d, "can"'] & B \\ T(M) \arrow[ur, bend right, "\exists 1 \tilde{f}"', "A\text{-mult.}"] & \end{tikzcd}$$

<u>Dém.</u>: $\tilde{f}$ est déterminée par $\tilde{f}|T^n(M)$. On doit avoir : $\tilde{f}(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = \tilde{f}(m_1 \cdot \dots \cdot m_n)$

$$= f(m_1) \cdots f(m_n) \quad (*)$$

D'où l'unicité. Pour l'existence, on définit $\tilde{f}$ par $(*)$, grâce au Lemme 2.1 a). ✓

<u>Corollaire</u> (fonctorialité) : Pour toute appl. A-lin. $f : M \longrightarrow N$, il existe un unique morph. de A-alg. $T(f) : T(M) \longrightarrow T(N)$ t.q. $T(f) \circ \imath_M = \imath_N \circ f$.

On a $T(Id_M) = Id_{T(M)}$ et $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

Dém. :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath_M"'] \arrow[dr] & N \arrow[d, "\imath_N"] \\ T(M) \arrow[r, dashed, "T(f)"'] & T(N) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ T(L) \arrow[r, "T(g)"'] \arrow[rr, bend right, "T(f) \circ T(g)"'] & T(M) \arrow[r, "T(f)"'] & T(N) \end{tikzcd}$$

. ✓

2.4 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Soient A un anneau com., M un A-module, $n \geq 1$ un entier et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique. On a une action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur $M_A^{\otimes n}$:

$$\sigma(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma^{-1}(n)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \otimes m_4 \\ m_4 \otimes m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \end{array}$$

<u>Déf</u> : $t \in T^n(M)$ est

symétrique $:\iff \sigma t = t, \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

antisymétrique $:\iff \sigma t = \mathrm{sgn}(\sigma) t, \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\mathcal{S}^n(M) = \{$ tenseurs sym. dans $T^n(M)\}$

$\mathcal{A}^n(M) = \{$ tenseurs antisym. dans $T^n(M)\}$

<u>Lemme</u> : Soit $P_n : T^nM \longrightarrow T^nM, \ t \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t$

Alors $\mathrm{Im}\, P_n \subseteq \mathcal{S}^n(M)$ et si $1/n! \in A$, alors $\frac{1}{n!} P_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{S}^n(M)$.

<u>Dém.</u> : Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\tau P_n(t) = \tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma t = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \tau \sigma t = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sigma' t = P_n t.$$

Donc $\mathrm{Im}\, P_n \subseteq \mathcal{S}^n$. Pour $t \in \mathcal{S}^n$, on a $\sigma t = t, \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, et donc

$$P_n t = (n!) t \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{1}{n!} P_n\right)(t) = t.$$

Il s'ensuit $\frac{1}{n!} P_n$ est idempotent et d'image $\mathcal{S}^n(M)$. ✓

<u>Lemme</u> : Soit $Q_n : T^nM \longrightarrow T^nM, \ t \longmapsto \sum_{t \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma t.$

Alors $\mathrm{Im}\, Q_n \subseteq \mathcal{A}^n(M)$ et si $1/n! \in A$, alors $1/n!\, Q_n$ est un projecteur d'image $\mathcal{A}^n(M)$.

<u>Dém.</u> : analogue. ✓