

2.5 Algèbre symétrique

A un anneau com., M un A-module.

Def: Pour $n \geq 1$:

I_n = SS-module de $T^n(M)$ engendré par les $m_1 \otimes \dots \otimes m_n - \sigma. (m_1 \otimes \dots \otimes m_n)$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

$I_0 := 0$.

$I := \bigoplus_{n \geq 0} I_n \subseteq T(M)$.

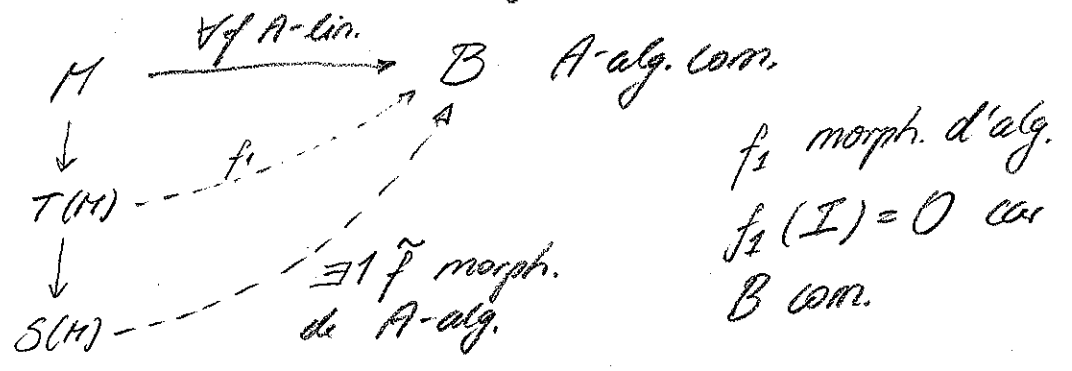
Rques: 1) I est un idéal bilatère de $T(M)$ (car stable par mult. à gauche et à droite par les $m \in M$).

2) I est engendré par les $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, $m_1, m_2 \in M$. (car \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions d'éléments voisins).

Def: L'algèbre symétrique sur M est le quotient $S(M) := T(M)/I$.

Rques: 1) $S(M)$ est une algèbre commutative, graduée. On a $A = S^0(M)$ et $M = S^1(M)$.

2) L'inclusion $M \xrightarrow{\text{can}} S(M)$ est universelle parmi les appl. A-lin. de M dans une algèbre commutative:



Thm: Si M est libre de base e_1, \dots, e_n , alors $S(M)$ est libre de base $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_n^{i_n}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.

Rqus: 1) On a donc un isom. d'alg.

$$S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n], e_i \mapsto X_i.$$

2) Pour la dem., on se servira du produit tensoriel de A -algèbres:

Lemme et def: Soient B et C des A -algèbres. L'algèbre produit tensoriel est le A -module $B \otimes_A C$ muni de l'unique mult. A -bilineaire t.q.

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc', \quad \forall b, b' \in B, \forall c, c' \in C.$$

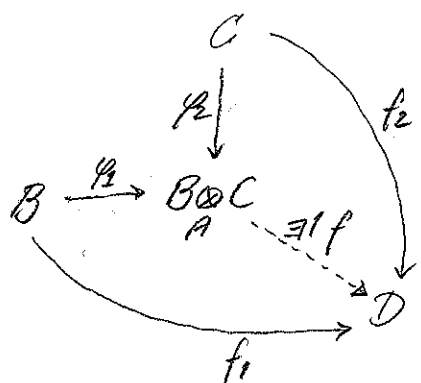
Rqus: 1) On a des morph. d'algèbres canoniques

$$\varphi_1 : B \longrightarrow B \otimes_A C, b \longmapsto b \otimes 1_C$$

$$\varphi_2 : C \longrightarrow B \otimes_A C, c \longmapsto 1_B \otimes c$$

et leurs images commutent:

$$(b \otimes 1)(1 \otimes c) = b \otimes c = (1 \otimes c)(b \otimes 1).$$



$$f_1(b)f_2(c) = f_2(c)f_1(b)$$

2) Propriété univ.: Pour toute A -alg. D et tous morph. de A -alg.

$$f_1 : B \longrightarrow D \quad \text{et} \quad f_2 : C \longrightarrow D,$$

t.q. $f_1(b)f_2(c) = f_2(c)f_1(b)$, il existe

un unique morph. de A -alg. $f : B \otimes_A C \longrightarrow D$ t.q.

$f \circ \varphi_1 = f_1$ et $f \circ \varphi_2 = f_2$. On a $f(b \otimes c) = f_1(b)f_2(c)$. Exo!

3) Si B et C sont commutatives, alors $B \otimes_A C$ est commutative.

Prop: On a un isomorphisme canonique de A -algèbres

$$\varphi : S(M_1 \otimes_A M_2) \xrightarrow{\sim} S(M_1) \otimes_A S(M_2)$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2$$

Dém.: Existence de φ : propr. univ. de $S(M_1 \otimes_A M_2)$.

Existence d'une inverse: les

$$M_i \longrightarrow M_1 \otimes M_2 \longrightarrow S(M_1 \otimes M_2)$$

induisent

$$S(M_i) \xrightarrow{\psi_i} S(M_1 \otimes M_2), \quad i=1,2,$$

qui induisent

$$\psi: S(M_1) \otimes_A S(M_2) \longrightarrow S(M_1 \otimes M_2). \quad \checkmark$$

Dém. du thm: A montrer: $S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n]$, $e_i \mapsto X_i$.

$$n=1: \quad T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A e_i^i, \quad I=0, \quad S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1].$$

$$n \geq 2: \quad M = A e_1 \oplus M' \quad \text{où} \quad M' = A e_2 \oplus \dots \oplus A e_n.$$

$$\begin{aligned} S(A e_1 \oplus M') &\xrightarrow{\sim} S(A e_1) \otimes_A S(M') \xrightarrow{\sim} A[X_1] \otimes_A A[X_2, \dots, X_n] \\ &\xrightarrow{\sim} A[X_1, X_2, \dots, X_n]. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lien avec les tenseurs symétriques

Lemme: Soit $n \geq 1$. Supposons que $n! \in A$.

$$\text{Alors} \quad T^n(M) = S_n(M) \oplus I_n \quad \text{et} \quad S^n(M) \xrightarrow{\sim} S_n(M).$$

Dém.: La "moyenne" $p_n: T^n(M) \rightarrow T^n(M)$, $x \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma x$

est un projecteur sur $S_n(M)$ et $I_n \subseteq \text{Ker}(p_n)$. Or dans

le quotient $T^n(M)/I_n = S^n(M)$, p_n induit l'identité. Donc

$$\text{Ker}(p_n) \subseteq I_n. \quad \checkmark$$

2.6 Algèbre extérieure

A anneau com., M un A -module.

Def: Pour $n \geq 2$, soit $J_n \subseteq T^n(M)$ le \mathfrak{S}_n -module eng. par les $m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ t.q. $m_i = m_{i+1}$ pour un $1 \leq i < n$.

Soient $J_0 = 0$, $J_1 = 0$ et $J = \bigoplus_{n \geq 0} J^n$.

Prop: $J \subseteq T(M)$ est un idéal bilatère. Il est engendré par les $m \otimes m$, $m \in M$.

Def: L'algèbre extérieure sur M est $\Lambda(M) := T(M) / J$.

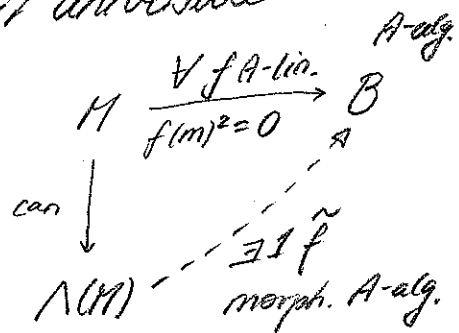
On note \wedge le produit dans $\Lambda(M)$.

Exemple: M libre de rang 1 $\Rightarrow T(M) \cong A[X]$, $\Lambda(M) \cong A[X]/(X^2)$.
"algèbre des nombres duaux"

Prop: 1) L'appl. can: $M \rightarrow \Lambda(M)$ est A -linéaire et vérifie $(\text{can}(m))^2 = 0$ pour tous $m \in M$. Elle est universelle

pour ces propriétés. Tout $g: L \rightarrow M$ A -linéaire induit

$$\Lambda(g): \Lambda(L) \rightarrow \Lambda(M) \dots$$



2) $\Lambda(M)$ est graduée et $\pi: T(M) \rightarrow \Lambda(M)$ homogène.

$$\text{On a } A \xrightarrow{\sim} \Lambda^0(M), \quad M \xrightarrow{\sim} \Lambda^1(M)$$

3) Pour $m_1, m_2 \in M$, on a $m_1 \wedge m_2 = -m_2 \wedge m_1$
car $(m_1 + m_2) \wedge (m_1 + m_2) = 0$.

4) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $m_1, \dots, m_n \in M$: $m_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge m_{\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) m_1 \wedge \dots \wedge m_n$.
car \mathfrak{S}_n est engendré par les transpos. d'éléments voisins.

Exercice: $\Lambda(M)$ est une algèbre alternée, i.e. pour $x, y \in \Lambda(M)$ homog. de degrés impairs, on a $xy = -yx$ et $x^2 = 0$.

Thm: Si M est libre de base e_1, \dots, e_n , alors $\Lambda^p(M)$ est libre de base

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}, \quad p \geq 1.$$

En particulier, $\Lambda^n(M)$ est libre de rang 1 et $\Lambda^p(M) = 0$ pour $p > n$.

Rq: Pour la dém., on se sert du produit tensoriel gradué:

Lemme et déf.: Soient B et C des A -algèbres graduées. Le module gradué

$$B \otimes_A C \quad \text{avec} \quad (B \otimes_A C)_n = \bigoplus_{p+q=n} (B_p \otimes_A C_q)$$

devient une alg. graduée pour la mult. donnée par $(b \otimes c)(b' \otimes c') = (-1)^{(\deg c)(\deg b')} b b' \otimes c c'$ (transposition d'éléments impairs \downarrow signe)

pour tous $b, b' \in B, c, c' \in C$ homogènes. On l'appelle produit tensoriel gradué et on le note $B \otimes_A^{\otimes} C$.

Dém.: A vérifier surtout: la mult. est associative! Exercice! \checkmark

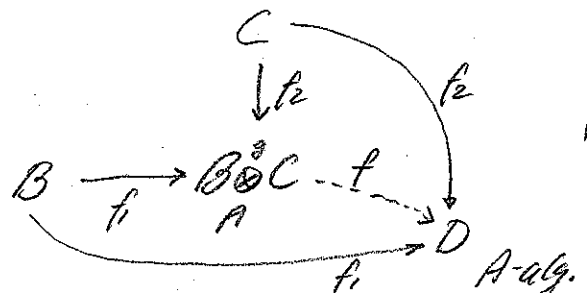
Rques: 1) Le produit tens. grad. de deux alg. alternées est alterné!

2) On a des morph. d'alg.

$$\begin{aligned} \varphi_1: B &\rightarrow B \otimes_A^{\otimes} C, & b &\mapsto b \otimes 1_C \\ \varphi_2: C &\rightarrow B \otimes_A^{\otimes} C, & c &\mapsto 1_B \otimes c \end{aligned}$$

qui vérifient $\varphi_1(b) \varphi_2(c) = (-1)^{(\deg b)(\deg c)} \varphi_2(c) \varphi_1(b)$, b, c homog., (anticommutation)

et qui sont universels pour cette propriété:



$\forall f_1, f_2$ qui anti-commutent
 $\exists ! f$ morph. d'algèbres

Prop.: Soient M_1, M_2 des A -modules. On a un isom. can. homog. 26

$$\varphi: \Lambda(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{\sim} \Lambda(M_1) \otimes_A \Lambda(M_2)$$

$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2.$$

Dém.: φ existe grâce à la propr. univ. de $\Lambda(M_1 \oplus M_2)$.

les appl. $\psi_i: M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \Lambda(M_1 \oplus M_2)$
 donnent un inverse ψ , grâce à la propr. univ. de \otimes_A . \checkmark

Dém. du thm.: e_1, \dots, e_n base de $M \xrightarrow{?} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ base de $\Lambda^p(M)$
 $i_1 < \dots < i_p$

$n=1$: $\Lambda(M) \cong A[X]/(X^2) \checkmark$

$n > 1$: $M = Ae_1 \oplus M'$, $M' = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

$$\Lambda(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda(Ae_1) \otimes_A \Lambda(M') \xleftarrow{\sim} (A \otimes_A \Lambda(M')) \otimes (Ae_1 \otimes \Lambda(M'))$$

$$\Lambda^p(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda^{p-1}(M') \otimes \Lambda^1(M')$$

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p} &\longleftarrow (e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, 0) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} &\longleftarrow (0, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}). \end{aligned} \quad \checkmark$$

2.7 Déterminant

A anneau com., L un A -module libre de rang n .

Rqur: $\Lambda^n(L)$ libre de rang 1 \Rightarrow ses endom. sont des homothéties.

Déf: Le déterminant $\det(f)$ d'un endom. $f: L \rightarrow L$
 est l'unique scalaire t.q. $\Lambda^n(f)(x) = (\det f) \cdot x$, $\forall x \in \Lambda^n(L)$.

Rques: 1) $\Lambda^n(f \circ g) = \Lambda^n(f) \circ \Lambda^n(g) \Rightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

2) e_1, \dots, e_n en une base de L , $B \in M_n(A)$ matrice de f

$$\Rightarrow \Lambda^n(f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} (b_{i_1, 1} e_{i_1}) \wedge (b_{i_2, 2} e_{i_2}) \wedge \dots \wedge (b_{i_n, n} e_{i_n}) = \det(B) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$