2.5 Algèbre symétrique

A un anneau com., M un A-module.

<u>Déf</u>: Pour $n \geq 1$:

$$I_n := \text{ss-module de } T^n(M) \text{ engendré par les } m_1 \otimes \dots \otimes m_n - \sigma.(m_1 \otimes \dots \otimes m_n),\ \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

$$I_0 := 0.$$

$$I := \bigoplus_{n \geq 0} I_n \subseteq T(M).$$

<u>Rques</u>: 1) I est un idéal bilatère de $T(M)$ (car stable par mult. à gauche et à droite par les $m \in M$).

2). I est engendré par les $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, $m_1, m_2 \in M$. (car $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions d'éléments voisins).

<u>Déf</u>: L'<u>algèbre symétrique</u> sur M est le quotient $S(M) := T(M)/I$.

<u>Rques</u>: 1) $S(M)$ est une algèbre commutative, graduée. On a

$$A = S^0(M) \text{ et } M = S^1(M).$$

2) L'inclusion $M \xrightarrow[\text{can}]{} S(M)$ est universelle parmi les appl. A-lin. de M dans une algèbre commutative :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\forall f\ A\text{-lin.}"] \arrow[d] & B \quad A\text{-alg. com.} \\
T(M) \arrow[ur, dashed, "f_1"'] \arrow[d] & \\
S(M) \arrow[uur, dashed, "\exists 1\ \tilde{f}\ \text{morph. de } A\text{-alg.}"'] &
\end{tikzcd}$$

f_1 morph. d'alg.
$f_1(I) = 0$ car B com.

<u>Thm</u>: Si M est libre de base $e_1, \dots, e_n$, alors $S(M)$ est libre de base $e_1^{i_1} e_2^{i_2} \dots e_n^{i_n}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.

<u>Rques</u>: 1) On a donc un isom. d'alg.

$$S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n], \quad e_i \longmapsto X_i.$$

2) Pour la dém., on se servira du produit tensoriel de A-algèbres :

<u>Lemme et déf</u>: Soient B et C des A-algèbres. <u>L'algèbre produit tensoriel</u> est le A-module $B \otimes_A C$ muni de l'unique mult. A-bilinéaire t.q.

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc', \quad \forall b, b' \in B, \forall c, c' \in C.$$

<u>Rques</u>: 1) On a des morph. d'algèbres canoniques

$$\varphi_1 : B \longrightarrow B \otimes C, \quad b \longmapsto b \otimes 1_C$$
$$\varphi_2 : C \longrightarrow B \otimes C, \quad c \longmapsto 1_B \otimes c$$

et leurs images commutent :

$$(b \otimes 1)(1 \otimes c) = b \otimes c = (1 \otimes c)(b \otimes 1).$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\ B \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "f_1"'] & B \otimes_A C \arrow[r, dashed, "\exists ! f"] & D \end{tikzcd}$$

$f_1(b) f_2(c) = f_2(c) f_1(b)$

2) <u>Propriété univ.</u> : Pour toute A-alg. D et tous morph. de A-alg.

$$f_1 : B \longrightarrow D \quad \text{et} \quad f_2 : C \longrightarrow D,$$

t.q. $f_1(b) f_2(c) = f_2(c) f_1(b)$, il existe un unique morph. de A-alg. $f : B \otimes_A C \longrightarrow D$ t.q. $f \circ \varphi_1 = f_1$ et $f \circ \varphi_2 = f_2$. On a $f(b \otimes c) = f_1(b) f_2(c)$. Exo !

3) Si B et C sont commutatives, alors $B \otimes_A C$ est commutative.

<u>Prop</u> : On a un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$\varphi : S(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{\sim} S(M_1) \otimes_A S(M_2)$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2$$

Dém. : Existence de φ : propr. univ. de $S(M_1 \oplus M_2)$.

Existence d'un inverse : les

$$M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow S(M_1 \oplus M_2)$$

induisent

$$S(M_i) \xrightarrow[\psi_i]{} S(M_1 \oplus M_2) \ , \ i=1,2,$$

qui induisent $\psi : S(M_1) \otimes_A S(M_2) \longrightarrow S(M_1 \oplus M_2)$. ✓

<u>Dém. du thm</u> : A montrer : $S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_n]$, $e_i \mapsto X_i$.

$n=1$: $T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A e_1^i$, $I=0$, $S(M) \xrightarrow{\sim} A[X_1]$.

$n \geq 2$: $M = Ae_1 \oplus M'$ où $M' = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

$$S(Ae_1 \oplus M') \xrightarrow{\sim} S(Ae_1) \otimes_A S(M') \xrightarrow{\sim} A[X_1] \otimes_A A[X_2, \dots, X_n]$$
$$\xrightarrow{\sim} A[X_1, X_2, \dots, X_n]. \ ✓$$

<u>Lien avec les tenseurs symétriques</u>

Lemme : Soit $n \geq 1$. Supposons que $1/n! \in A$.

Alors $T^n(M) = \mathcal{S}_n(M) \oplus I_n$ et $S^n(M) \simeq \mathcal{S}_n(M)$.

Dém. : La "moyenne" $p_n : T^n(M) \longrightarrow T^n(M)$, $x \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma x$

est un projecteur sur $\mathcal{S}_n(M)$ et $I_n \subseteq \mathrm{Ker}(p_n)$. Or dans le quotient $T^n(M)/I_n = S^n(M)$, p_n induit l'identité. Donc $\mathrm{Ker}(p_n) \subseteq I_n$. ✓

2.6 Algèbre extérieure

A anneau com., M un A-module.

<u>Déf</u> : Pour $n \geq 2$, soit $\mathcal{J}_n \subseteq T^n(M)$ le ss-module eng. par les $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ t.q. $m_i = m_{i+1}$ pour un $1 \leq i < n$.

Soient $\mathcal{J}_0 = 0$, $\mathcal{J}_1 = 0$ et $\mathcal{J} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n$.

<u>Rque</u> : $\mathcal{J} \subseteq T(M)$ est un idéal bilatère. Il est engendré par les $m \otimes m$, $m \in M$.

<u>Déf</u> : L'<u>algèbre extérieure</u> sur M est $\Lambda(M) := T(M)/\mathcal{J}$.

On note $\wedge$ le produit dans $\Lambda(M)$.

<u>Exemple</u> : M libre de rang $1 \Rightarrow T(M) \xrightarrow{\sim} A[X]$, $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} A[X]/(X^2)$.
"algèbre des nombres duaux"

<u>Rques</u> : 1) L'appl. can : $M \longrightarrow \Lambda(M)$ est A-linéaire et vérifie $(\mathrm{can}(m))^2 = 0$ pour tous $m \in M$. Elle est universelle pour ces propriétés. Tout $g : L \longrightarrow M$ A-linéaire induit $\Lambda(g) : \Lambda(L) \longrightarrow \Lambda(M)$ ...

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f\ A\text{-lin.}", "f(m)^2=0"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & B \ (A\text{-alg.}) \\ \Lambda(M) \arrow[ur, dashed, "\exists 1\, \tilde{f}"', "\text{morph. } A\text{-alg.}"] & \end{tikzcd}$$

2) $\Lambda(M)$ est graduée et $\pi : T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ homogène.
On a $A \xrightarrow{\sim} \Lambda^0(M)$, $M \xrightarrow{\sim} \Lambda^1(M)$.

3) Pour $m_1, m_2 \in M$, on a $m_1 \wedge m_2 = - m_1 \wedge m_2$
car $(m_1 + m_2) \wedge (m_1 + m_2) = 0$.

4) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $m_1, \ldots, m_n \in M$: $m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$.
car $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpos. d'éléments voisins.

<u>Exercice</u> : $\Lambda(M)$ est une <u>algèbre alternée</u>, i.e. pour $x, y \in \Lambda(M)$ homog. de degrés impairs, on a $x \wedge y = -y \wedge x$ et $x^2 = 0$.

<u>Thm</u> : Si M est libre de base $e_1, \dots, e_n$, alors $\Lambda^p(M)$ est libre de base

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, \; i_j \in \{1, \dots, n\}, \; p \geq 1.$$

En particulier, $\Lambda^n(M)$ est libre de rang 1 et $\Lambda^p(M) = 0$ pour $p > n$.

<u>Rque</u> : Pour la dém., on se sert du produit tensoriel gradué :

<u>Lemme et déf.</u> : Soient B et C des A-algèbres graduées. Le module gradué $B \otimes_A C$ avec
$$(B \otimes_A C)_n = \bigoplus_{p+q=n} (B_p \otimes_A C_q)$$
devient une alg. graduée pour la mult. donnée par
$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = (-1)^{(\deg c) \cdot (\deg b')} \, bb' \otimes cc'$$
(transposition d'éléments impairs $\Downarrow$ signe)

pour tous $b, b' \in B$, $c, c' \in C$ homogènes. On l'appelle <u>produit tensoriel gradué</u> et on le note $B \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} C$.

<u>Dém.</u> : A vérifier surtout : la mult. est associative ! Exercice ! ✓

<u>Rques</u> : 1) Le produit tens. grad. de deux alg. alternées est alterné !

2) On a des morph. d'alg.
$$\varphi_1 : B \longrightarrow B \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} C, \quad b \longmapsto b \otimes 1_C$$
$$\varphi_2 : C \longrightarrow B \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} C, \quad c \longmapsto 1_B \otimes c$$
qui vérifient
$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_2(c) = (-1)^{(\deg b)(\deg c)} \varphi_2(c) \varphi_1(b), \quad b, c \text{ homog.},$$
(anticommutation)

et qui sont universels pour cette propriété :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\
B \arrow[r, "f_1"'] \arrow[rr, bend right, "f_1"'] & B \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} C \arrow[r, dashed, "f"] & D \quad A\text{-alg.}
\end{tikzcd}$$

$\forall f_1, f_2$ qui anti-commutent $\exists 1\, f$ morph. d'algèbres

<u>Prop.</u> : Soient M_1, M_2 des A-modules. On a un isom. can. homog.

$$\varphi : \Lambda(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{\sim} \Lambda(M_1) \overset{g}{\otimes} \Lambda(M_2)$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_2 .$$

<u>Dém.</u> : φ existe grâce à la propr. univ. de $\Lambda(M_1 \oplus M_2)$.

Les appl. $\quad \psi_i : M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \Lambda(M_1 \oplus M_2)$

donnent un inverse ψ, grâce à la propr. univ. de $\overset{g}{\underset{A}{\otimes}}$. ✓

Dém. du thm. : $e_1, \dots, e_n$ base de $M \overset{?}{\Longrightarrow} \underset{i_1 < \dots < i_p}{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}}$ base de $\Lambda^p(M)$.

$n = 1$: $\Lambda(M) \simeq A[X]/(X^2)$ ✓

$n > 1$: $M = Ae_1 \oplus M'$, $M' = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

$$\Lambda(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda(Ae_1) \overset{g}{\underset{A}{\otimes}} \Lambda(M') \xleftarrow{\sim} (A \underset{A}{\otimes} \Lambda(M')) \oplus (Ae_1 \otimes \Lambda(M'))$$

$$\Lambda^p(M) \xleftarrow{\sim} \Lambda^{p-1}(M') \oplus \Lambda^p(M')$$

$$e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \longleftarrow (e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, 0)$$
$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \longleftarrow (0, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}). \quad ✓$$

<u>2.7 Déterminant</u>

A anneau com., L un A-module libre de rang n.

Rque : $\Lambda^n(L)$ libre de rang $1 \Longrightarrow$ ses endom. sont des <u>homothéties</u>.

<u>Déf</u> : Le <u>déterminant</u> $\det(f)$ d'un endom. $f : L \to L$

est l'unique scalaire t.q. $\Lambda^n(f)(x) = (\det f) . x$, $\forall x \in \Lambda^n(L)$.

<u>Rques</u> : 1) $\Lambda^n(f \circ g) = \Lambda^n(f) \circ \Lambda^n(g) \Longrightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

2) $e_1, \dots, e_n$ une base de L, $B \in M_n(A)$ matrice de f

$$\Longrightarrow \Lambda^n(f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)$$
$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} (b_{i_1,1} e_{i_1}) \wedge (b_{i_2,2} e_{i_2}) \wedge \dots \wedge (b_{i_n,n} e_{i_n}) = \det(B)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$