IV. Algèbres semisimples et leurs modules

But : Dualité de Schur-Weyl : $\mathfrak{S}_n \circlearrowright V^{\otimes n} \circlearrowleft GL(V)$.

Conventions : anneau = anneau commutatif ou non commutatif

module = module à gauche

1. Modules simples

Soit A un anneau.

Exemples : 1) $M_n(k)$, $S(V)$, $\Lambda(V)$, $T(V)$, où k est un corps, $n \in \mathbb{N}$ et V un k-espace vectoriel.

2) Soient k un corps et G un groupe. L'algèbre de groupe kG est la k-algèbre de base l'ensemble G et dont la multiplication est donnée sur les vecteurs de la base par la loi de G. La donnée d'un kG-module V est alors équivalente à celle de la représentation

$$\rho_V : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longmapsto \rho_V(g) : v \mapsto gv.$$

Notation : Pour deux A-modules L, M, on note $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ le groupe abélien des morphismes de A-modules $f: L \to M$ et $\mathrm{End}_A(L)$ l'anneau des endomorphismes de L.

Rques : 1) Si A n'est pas commutatif, $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ ne porte pas de structure naturelle de A-module !

2) Si A est une k-algèbre pour un anneau com. k, alors tout A-module est aussi un k-module et $\mathrm{Hom}_A(L,M)$ porte une structure naturelle de k-module.

__Exercice :__ On a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_A(L_1 \oplus L_2, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(L_1, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(L_2, M)$$

$$f \longleftrightarrow [f_1, f_2]$$

$$\mathrm{Hom}_A(L, M_1 \oplus M_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(L, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(L, M_2)$$

$$f \longleftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Hom}_A({}_A A, M) \xrightarrow{\sim} M \quad , \quad f \longmapsto f(1)$$

$$\mathrm{End}_A({}_A A) \xrightarrow{\sim} A^{op} \quad \text{(isom. d'anneaux)}$$

où L, M, L_i, M_i sont des modules et on considère $L_1 \oplus L_2$ comme le module des "vecteurs colonnes" $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. En outre, ${}_A A$ désigne l'anneau A considéré comme module à gauche sur lui-même et A^{op} l'anneau opposé : $a \underset{A^{op}}{\cdot} b := b \underset{A}{\cdot} a$.

__Déf :__ Un A-module est __simple__ s'il est non nul et que ses seuls sous-modules sont 0 et lui-même.

__Rque :__ Donc un A-module est simple ssi il admet exactement deux sous-modules.

__Exemples :__ Soit k un corps

1) Si A est une k-algèbre, tout A-module de k-dimension 1 est simple.
2) Le $M_n(k)$-module k^n est simple.

Lemme de Schur[1] : Soient L, M des A-modules simples.

a) Tout morphisme non nul $f : L \to M$ est inversible. En particulier, $\mathrm{End}_A(L)$ est un corps (non néc. com.).

b) Si A est une k-algèbre pour un corps alg. clos k et L est de k-dimension finie, alors
$$\mathrm{End}_A(L) = k \cdot \mathbb{1}_L .$$

Dém. : a) Si $f \neq 0$, alors $\mathrm{Im} f \neq 0$ et $\mathrm{Ker} f \subsetneq L$. Comme L et M sont simples, on a $\mathrm{Im} f = M$ et $\mathrm{Ker} f = 0$.

b) Soit $f \in \mathrm{End}_A(L)$. Soit $\lambda \in k$ une valeur propre de f. Alors $f - \lambda \mathbb{1}_L$ est non inversible. Donc $f - \lambda \mathbb{1}_L = 0$ par a). ✓

2. Modules semisimples

Soit A un anneau.

Thm 1 : Soit M un A-module. On a équivalence entre

i) M est la somme directe d'une famille de ss-modules simples.

ii) M est la somme d'une famille de sous-modules simples.

iii) Pour tout sous-module $M' \subseteq M$, il existe un sous-module M'' tel que $M = M' \oplus M''$.

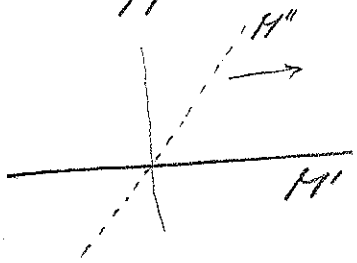
Déf : Le module M est semisimple s'il vérifie ces conditions.

Exemples : Soit k un corps.

1) Pour $A = M_n(k)$, le module ${}_A A$ est semisimple :
$$A = AE_{11} \oplus AE_{22} \oplus \dots \oplus AE_{nn}, \quad AE_{ii} \xrightarrow{\sim} k^n$$

[1] Issai Schur, 1875 (Mogilyov) – 1941 (Tel Aviv) ; Lemme : entre 1904 et 07.

2) Soit $A \subseteq M_2(k)$ la ss-algèbre des matrices triangulaires supérieures $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $a, b, d \in k$. Alors $M = k^2$ n'est pas semi-simple car $M' = ke_1$ n'admet pas de supplémentaire A-stable M'' :



<u>Lemme 2</u> : Soient M un module, $M' \subseteq M$ un ss-module et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de ss-modules simples de M t.q. $M = M' + \sum_{i \in I} M_i$. Il existe une partie $J \subseteq I$ t.q. $M = M' \oplus \bigoplus_{i \in J} M_i$.

Dém. : Soit Λ l'ensemble ordonné des parties $J' \subseteq I$ telles que la somme $M' + \sum_{i \in J'} M_i$ est directe. Alors Λ est non vide (p.ex. $\emptyset \in \Lambda$) et stable par réunions croissantes. Soit $J \in \Lambda$ un élément maximal (Zorn[1]). Supposons que $M_0 = M' \oplus \bigoplus_{i \in J} M_i$ est un ss-module strict. Alors il existe $k \in I$ t.q. $M_k \nsubseteq M_0$. Mais alors $M_k \cap M_0 = \{0\}$ car M_k est simple. Donc $J \cup \{k\} \in \Lambda$. Cette contradiction montre que l'on a bien $M_0 = M$. ✓

Dém. du thm. : i) $\Rightarrow$ ii) est clair et ii) $\Rightarrow$ i) résulte du lemme 2.

i) $\Rightarrow$ iii) : Supposons que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Par le lemme 2, il existe $J \subseteq I$ tel que pour $M'' = \bigoplus_{i \in J} M_i$, on a $M' \oplus M'' = M$.

iii) $\Rightarrow$ ii) : <u>Première étape</u> : Tout ss-module non nul $M_0 \subseteq M$ contient un ss-module simple.

Dém. : Soit $0 \neq v \in M_0$. Le ss-module cyclique Av contient

---

[1] Max Zorn, 1906 (Krefeld) - 1993 (Bloomington), Lemme : entre 1934 et 36.

un sous-module maximal Iv, image d'un idéal à gauche maximal I contenant le noyau du morph.

$$A \longrightarrow Av, \quad a \longmapsto av.$$

Soit $M'' \subseteq M$ un ss-module t.q. $M = Iv \oplus M''$. Alors

$$Av = Iv \oplus (Av \cap M'')$$

et $Av \cap M''$ est simple car isomorphe à Av/Iv.

Deuxième étape : l'affirmation.

Soit $M_0 \subseteq M$ le ss-module somme de tous les ss-modules simples de M. Si $M_0 \neq M$, il existe un ss-module non nul M'' t.q. $M_0 \oplus M'' = M$. Mais alors M'' contient un ss-module simple S et $M_0 \oplus S \supsetneq M_0$. Cette contradiction montre qu'on a bien $M_0 = M$. ✓

<u>Exemple</u> : Soient k un corps et G un groupe fini t.q. $|G| \in k^*$. Alors tout kG-module est semisimple. En effet, soient M un kG-module et $M' \subseteq M$ un ss-module. Soient $i : M' \hookrightarrow M$ l'inclusion et $p : M \to M'$ une application <u>k-linéaire</u> t.q. $p \circ i = 1\!\!1_{M'}$. Soit

$$\pi : M \longrightarrow M', \quad m \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p(g^{-1} m).$$

Alors π est kG-linéaire (!) et $\pi \circ i = 1\!\!1_{M'}$. Donc $M'' = \operatorname{Ker}(\pi)$ est un kG-ss-module et $M = M' \oplus M''$.

<u>Lemme 3</u> : Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de modules. Si M est semisimple, alors M' et M'' le sont.

<u>Dém</u> : Exercice ! ✓

⚠ La réciproque est fausse ! (voir l'exemple 2), p. 128).

3. Théorèmes de Burnside et de Wedderburn

Soit k un corps algébriquement clos.

Thm 1 (Burnside[1]) : Soient A une k-algèbre et S un A-module simple de k-dimension finie. Alors l'application

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_k(S), \quad a \mapsto (x \mapsto ax)$$

est surjective.

Exemple : Si G est un groupe et $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ une représentation irréductible (= kG-module simple) dans un espace vectoriel de dimension finie V sur $k = \bar{k}$, alors tout endom. k-lin. de V est combinaison linéaire des opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$.

Dém du thm. : Soient $f : S \longrightarrow S$ un endom. k-linéaire et $v_1, \ldots, v_n$ une base de S sur k. Notons

$$\mathrm{diag}(f) = \begin{bmatrix} f & & 0 \\ & f & \\ & & \ddots \\ 0 & & f \end{bmatrix} : S^n \longrightarrow S^n, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

C'est un endomorphisme k-linéaire du module semisimple S^n.

Le ss-module

$$M' = A. \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \subseteq S^n$$

admet un ss-module supplémentaire M''. Soit $p : S^n \longrightarrow M'$ la projection sur M' le long de M''. Alors p est A-linéaire. Par le lemme de Schur (partie 6]), p est donné par une matrice de scalaires $p_{ij} \in k$. Donc p commute avec $\mathrm{diag}(f)$ et $\mathrm{diag}(f)$ envoie $M' = \mathrm{Im}(p)$ sur lui-même. Mais alors $\begin{bmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{bmatrix} \in A. \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

1) William Burnside, 1852 (Paddington, London) - 1927 (Cotleigh, Kent)

Déf: Une k-algèbre est simple si elle est non nulle et ses seuls idéaux bilatères sont 0 et elle-même.

Thm 2 (Wedderburn[1]): Toute k-algèbre simple de dimension finie sur k est isomorphe à $M_n(k)$ pour un entier $n \geq 1$.

Dém.: Considérons le A-module à gauche ${}_A A$. Soit $I \subseteq {}_A A$ un ss-module (= idéal à gauche) non nul de dimension minimale. Alors I est un A-module simple. On obtient un morphisme d'algèbres

$$A \longrightarrow End_k(I) \quad (\cong M_n(k))$$

qui est surjectif, d'après le thm de Burnside. Il est aussi injectif car A n'admet pas d'idéal bilatère propre non nul. ✓

3. Algèbres semisimples

Soit k un corps algébriquement clos.

Lemme 1: Soit A une k-algèbre de dimension finie. On a équiv. entre

i) Le module ${}_A A$ est semisimple;

ii) tout A-module est semisimple;

iii) A est isomorphe à un produit fini d'algèbres simples;

iv) A est isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^{r} End_k(V_i)$ pour des espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_r$ de dimension finie.

Déf: L'algèbre A est semisimple si elle vérifie ces conditions.

[1] Joseph Wedderburn, 1882 (Forfar, Écosse) - 1948 (Princeton, É.-U.)