<u>Thm 1</u> (Nullstellensatz fort) : Supposons k alg. clos. Alors on a $I(V(J)) = \sqrt{J}$ pour tout idéal J de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Dém (astuce de Rabinowitch, 1929) : Soient $F_1, \dots, F_m$ des générateurs de J et soit $P \in I(V(J))$. Alors les polynômes

$$F_1, \dots, F_m, \quad X_{n+1} \cdot P - 1 \quad \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$$

n'ont pas de racine commune dans k^{n+1}. Donc (cor. 1.5.4), il existe $G_1, \dots, G_{m+1}$ dans $k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ tels que

$$1 = G_1 F_1 + \dots + G_m F_m + G_{m+1} \cdot (X_{n+1} P - 1). \qquad (*)$$

On a un homomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_{n+1}] &\longrightarrow k(X_1, \dots, X_n) \\ X_i &\longmapsto X_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ X_{n+1} &\longmapsto 1/P. \end{aligned}$$

L'image de l'équation $(*)$ par cet homomorphisme est

$$1 = G_1(X_1, \dots, X_n, 1/P) \cdot F_1 + \dots + G_m(X_1, \dots, X_m, 1/P) \cdot F_m.$$

Si on multiplie des deux côtés par une puissance assez élevée P^N, on obtient une équation dans $k[X_1, \dots, X_n]$, qui montre que P^N est dans l'idéal engendré par $F_1, \dots, F_m$. ✓

2.2 Topologie de Zariski

Soient k un corps algébriquement clos et n un entier naturel.

<u>Lemme 1</u> : a) On a $V(k[X_1,\dots,X_n]) = \emptyset$ et $V((0)) = k^n$.

b) Pour tous idéaux J_1, J_2 de $k[X_1,\dots,X_n]$, on a
$$V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 \cap J_2) = V(J_1 J_2).$$

c) Pour toute famille d'idéaux $(J_i)_{i\in I}$ de $k[X_1,\dots,X_n]$, on a
$$\bigcap_{i\in I} V(J_i) = V\Big(\sum_{i\in I} J_i\Big).$$

Dém. : a) et c) sont faciles. Montrons b) : on a $J_1 J_2 \subseteq J_1 \cap J_2 \subseteq J_i$ pour $i = 1, 2$. Donc $V(J_1) \cup V(J_2) \subseteq V(J_1 \cap J_2) \subseteq V(J_1 J_2)$.

Réciproquement, si $x \in k^n$ est dans le complémentaire de $V(J_1) \cup V(J_2)$, il existe $P_i \in J_i$ t.q. $P_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2$. Donc $P_1 P_2(x) \neq 0$ et x est dans le complémentaire de $V(J_1 J_2)$. ✓

<u>Déf</u> : La <u>topologie de Zariski</u>* sur k^n est la topologie dont les fermés sont les $V(J)$, où J parcourt les idéaux de $k[X_1,\dots,X_n]$. La <u>topologie de Zariski</u> sur une partie algébrique $X \subseteq k^n$ est la topologie induite.

<u>Exemples</u> : 1) Les parties fermées propres de k (muni de la top. de Zariski) sont les parties finies. Donc k n'est pas réunion de deux fermés propres (et deux ouverts non vides ont toujours une intersection non vide).

2) La partie alg. $V(XY) \subseteq k^2$ est réunion deux deux fermés propres : $V(X)$ et $V(Y)$.

---

*Oscar Zariski, 1899 (Kobrin, Belorussie) – 1986 (Brookline, É.-U.)

Déf. : Un espace topologique est <u>irréductible</u> s'il n'est pas réunion de deux fermés propres.

<u>Lemme 2</u> : Soit X un espace topologique. On a équivalence entre

i) X est irréductible.

ii) Si X_1 et X_2 sont des fermés de X, alors

$$X = X_1 \cup X_2 \implies X = X_1 \text{ ou } X = X_2$$

iii) Deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide.

iv) Tout ouvert non vide de X est dense.

Dém. : exercice ! ✓

<u>Rques</u> : 1) Tout espace irréductible est connexe (mais la réciproque est fausse).

2) Un ss-espace d'un esp. top. est irréd. ssi son adhérence l'est (exo).

3) Un ouvert non vide d'un espace irréd. est irréd.

<u>Lemme 3</u> : Soit $X \subseteq k^n$ une partie algébrique.

$$X \text{ est irréductible} \iff I(X) \text{ est premier.}$$

Dém. : Montrons que X est réductible ssi $I(X)$ n'est pas premier.

" $\Leftarrow$ " : Il existe des polynômes P_1, P_2 n'appartenant pas à $I(X)$ t.q. $P_1 \cdot P_2 \in I(X)$. Alors X est réunion de ses fermés propres $X \cap V(P_1)$ et $X \cap V(P_2)$.

" $\Rightarrow$ " : Soient $X_1, X_2 \subseteq X$ des fermés propres tels que $X = X_1 \cup X_2$. Alors on a $I(X) = I(X_1) \cap I(X_2)$ et $I(X_i)$ contient strictement $I(X)$, $i=1,2$ (k est algébriquement clos). Mais alors $I(X)$ n'est pas premier. ✓

<u>Exemples</u> : k^n est irréductible ; $Gl_n(k) \subset M_n(k)$ est irréductible car ouvert non vide dans $M_n(k)$ (identifié à $k^{n \times n}$).

Déf. : Un espace top. est noethérien si toute suite croissante d'ouverts $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_p \subseteq \dots$, $p \in \mathbb{N}$, devient stationnaire : $U_r = U_{r+1}$, $\forall r \gg 0$.

Rques : 1) C'est le cas ssi toute suite décroissante de fermés devient stationnaire ssi toute famille d'ouverts contient un élément maximal ssi toute famille de fermés contient un élément minimal.

2) Tout ss-espace d'un espace noethérien est noethérien.

Lemme 4 : k^n est noethérien.

Dém. : Les suites décroissantes de fermés correspondent bijectivement aux suites croissantes d'idéaux radicaux de $k[X_1, .., X_n]$. Les suites deviennent stationnaires car $k[X_1, .., X_n]$ est noethérien. ✓

Déf. : Une composante irréductible d'un espace top. est une partie irréductible maximale.

Exemple : Les compos. irréd. d'un espace séparé sont ses parties ponctuelles.

Lemme 5 : Soit X un espace top.

a) Les compos. irréd. de X sont fermées et X est leur réunion.

b) Si $X = F_1 \cup \dots \cup F_r$ pour des fermés irréd. F_i t.q. $F_i \nsubseteq F_j$ pour tous $i \neq j$, alors les F_i sont les compos. irréd. de X.

c) Si X est noethérien, il n'admet qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

Dém. : a) Soit $Y \subseteq X$ une compos. irréd.. Alors $\bar{Y}$ est encore irréd.. Donc on a $Y = \bar{Y}$ par maximalité de Y. Soit $x \in X$. Alors $\{x\}$ est irréductible donc contenue dans une compos. irréd. de X (Zorn).

b) Soit $Y \subseteq X$ une compos. irréd.. Alors Y est la réunion finie des fermés $Y \cap F_i$, $1 \leq i \leq r$. Comme Y est irréd., on a $Y = Y \cap F_i$ pour un i. Donc $Y \subseteq F_i$. Comme Y est irréd. maximal et F_i irréd., on a $Y = F_i$. Réciproquement, montrons que chaque F_i est une compos. irréd.. On a $F_i \subseteq Y$ pour une compos. irréd. Y. Or $Y = F_j$ pour un $1 \leq j \leq r$. Donc $F_i \subseteq Y = F_j$ ce qui entraîne $i = j$ et $F_i = Y$.

c) Par b), il suffit de montrer que X est réunion finie de parties fermées irréductibles. Soit C l'ensemble des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. On suppose $C \neq \emptyset$. Comme X est noethérien, C contient un élément minimal F. Comme $F \in C$, F est réductible : on a $F = F_1 \cup F_2$ pour deux fermés propres F_1 et F_2 de F. Par minimalité de F, les F_i sont des réunions finies de fermés irréductibles. Donc F l'est. $\lightning$. ✓

<u>Cor. 6</u> : Tout idéal radical de $k[X_1, \dots, X_n]$ est intersection finie d'idéaux premiers.

Dém. : Soit J un idéal radical. Alors on a $J = I(X)$ pour $X = V(J)$ par le Nullstellensatz fort (Thm 2.1.1). Comme $X \subseteq k^n$ est noethérien (L4), il est réunion finie de ses composantes irréductibles (L5c)

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_r .$$

Donc $J = I(X) = I(Y_1) \cap \dots \cap I(Y_r)$ et les $I(Y_i)$ sont premiers (L3). ✓

<u>Exemple</u> : Soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul. La partie $V(P) \subseteq k^n$ est l'<u>hypersurface</u> définie par P. Supposons que

$$P = c P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r}$$

est la décomposition en facteurs irréductibles ($c \in k^*$).
Alors
$$V(P) = V(P_1 \cdots P_r) = V(P_1) \cup V(P_2) \cup \cdots \cup V(P_r)$$
est la décomposition en composantes irréductibles et
$$(P_1 \cdots P_r) = (P_1) \cap (P_2) \cap \cdots \cap (P_r)$$
l'écriture de l'idéal radical $(P_1 \cdots P_r)$ comme intersection d'idéaux premiers.

Résumé : Soit $Y \subseteq k^n$ une partie fermée et $A = k[X_1, \dots, X_n]/I(Y)$.
On a la bijection
$$\{\text{fermés de } Y\} \xrightarrow{\sim} \{\text{idéaux radicaux de } A\}$$
$$Z \longmapsto \text{image de } I(Z)$$
Elle renverse les inclusions et induit des bijections

$$\text{points de } Y \longleftrightarrow \text{idéaux max. de } A$$
$$\text{fermés irréd. de } Y \longleftrightarrow \text{idéaux premiers de } A$$
$$\text{compos. irréd. de } Y \longleftrightarrow \text{idéaux premiers minimaux}$$

Déf : La dimension (combinatoire) d'un espace top. Y est le sup des longueurs l de chaînes $F_0 \supsetneq F_1 \supsetneq \cdots \supsetneq F_l$ de fermés irréd. de Y. La dimension d'un anneau com. A est le sup des longueurs l de chaînes $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ d'idéaux premiers de A.

Rque : Dans les notations du résumé ci-dessus, on a $\dim Y = \dim A$.

Exemple : On a la chaîne $Y = k^n \supsetneq k^{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq k^0 = \{0\}$.
Donc $\dim k^n \geq n$.

But : $\dim k^n = n$.