Dém : i) $\Rightarrow$ ii) Tout A-module est quotient d'une somme de copies de ${}_A A$, donc semisimple (L 2.3).

ii) $\Rightarrow$ i) clair.

i) $\Rightarrow$ iii) Soit $A = S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}$ une décomposition de A en une somme de modules simples où les m_i sont ≥ 1 et les S_i non isomorphes 2 à 2. On a les isomorphismes d'algèbres :

$$A^{op} \xrightarrow{\sim} End_A({}_A A) \simeq End_A(S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r})$$

$$= Hom_A(S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}, S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r})$$

$$\underset{\substack{\text{Schur} \\ a)}}{\simeq} Hom_A(S_1^{m_1}, S_1^{m_1}) \times \dots \times Hom_A(S_r^{m_r}, S_r^{m_r})$$

$$\underset{\substack{\text{Schur} \\ b)}}{\simeq} M_{m_1}(k) \times \dots \times M_{m_r}(k)$$

Comme on a $M_n(k) \xrightarrow{\sim} M_n(k)^{op}$, $X \mapsto {}^tX$, on obtient l'affirmation.

iii) $\Rightarrow$ iv) par le thm de Wedderburn.

iv) $\Rightarrow$ i) Si $A = M_{m_1}(k) \times \dots \times M_{m_r}(k)$, alors A est égal à la somme de ses idéaux $A \cdot (0, \dots, 0, E_{ii}, 0, \dots, 0)$ ("idéaux colonnes"), qui sont simples. ✓

<u>Exemple</u> : Soit G un groupe fini t.q. $|G| \in k^\times$. Alors tout kG-module est semisimple. Donc kG est isomorphe à un produit d'algèbres simples. Plus précisément, la démonstration montre que $kG \simeq \prod_{i=1}^{r} End_k(S_i)$,

où $S_1, \dots, S_r$ sont les facteurs simples de ${}_{kG}kG$. D'où

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} (\dim S_i)^2 .$$

<u>Thm 2</u> : Soit A une k-algèbre semisimple de dimension finie. Soit ${}_A A \cong S_1^{m_1} \oplus \dots \oplus S_r^{m_r}$ une décomposition où les S_i sont simples et non isomorphes 2 à 2.

a) Tout A-module simple est isomorphe à l'un des S_i.

b) Tout A-module est somme de copies des S_i.

c) Pour tout A-module M, l'application canonique

$$\varphi_M : \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes_k S_i \longrightarrow M, \quad \sum_{i=1}^r f_i \otimes x_i \longmapsto \sum_{i=1}^r f_i(x_i)$$

est un isomorphisme.

d) Si $U_1, \dots, U_r$ sont des espaces vectoriels de dim. finie, $\bigoplus_{i=1}^r U_i \otimes S_i$) est la l'image de $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_k(\bigoplus_{i=1}^r U_i \otimes S_i)$ est la ss-algèbre $\prod_{i=1}^r k \cdot \mathbb{1}_{U_i} \otimes_k \mathrm{End}_k(S_i)$.

Dém. : a) Soient M un A-module simple et m un élément non nul de M. Alors le morphisme de A-modules

$${}_A A \longrightarrow M, \quad a \longmapsto am$$

est surjectif (car son image est non nulle). Donc pour l'une des inclusions $S_i \hookrightarrow A$ de l'un des S_i dans ${}_A A$, la composée $S_i \hookrightarrow A \twoheadrightarrow M$ est non nulle, donc inversible.

b) Soit N un A-module. Il est quotient d'une somme de copies de ${}_A A$, i.e. il existe un ensemble I et un morphisme surjectif $f : \bigoplus_I A \longrightarrow N$. Le noyau $M' = \ker f$ admet un supplémentaire A-stable M'' qui est somme directe de copies des S_i, d'après le lemme 2.2. On a $M'' \xrightarrow{\sim} N$.

c) Notons $FM = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes S_i$. Clairement, le morphisme

$$\varphi_{S_j} : FS_j \longrightarrow S_j$$

est inversible pour $1 \leq j \leq r$. Si L_1 et L_2 sont deux A-modules, les inclusions $L_i \hookrightarrow L_1 \oplus L_2$ induisent un isom.

$$(FL_1) \oplus (FL_2) \xrightarrow{\sim} F(L_1 \oplus L_2)$$

et la composée

$$(FL_1) \oplus (FL_2) \xrightarrow{\sim} F(L_1 \oplus L_2) \longrightarrow L_1 \oplus L_2$$

est donnée par $\begin{bmatrix} \varphi_{L_1} & 0 \\ 0 & \varphi_{L_2} \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que φ_M est un isomorphisme si M est une somme finie de copies des S_i. Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ pour une famille quelconque de modules M_i, le morphisme induit par les inclusions

$$\bigoplus_{i \in I} FM_i \longrightarrow F(\bigoplus_{i \in I} M_i)$$

est toujours inversible (grâce au fait que $\dim_k S_j < \infty$, $1 \leq j \leq r$) et la composée

$$\bigoplus_{i \in I} FM_i \longrightarrow F(\bigoplus_{i \in I} M_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

toujours donnée par $\bigoplus_{i \in I} \varphi_{M_i}$. D'où l'affirmation dans le cas général.

d) On peut supposer que $A = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_k(V_i)$ pour des espaces vectoriels V_i de dimension finie. Alors $S_i = V_i$ muni de l'action naturelle et l'application $A \longrightarrow \mathrm{End}_k(S_i) = \mathrm{End}_k(V_i)$ est la projection. Alors la vérification est facile. ✓

Rque : Dans c), l'image de $\mathrm{Hom}_A(S_i, M) \otimes_k S_i \longrightarrow M$ est le plus grand ss-module de M isomorphe à une somme de copies de S_i. Il s'appelle la <u>composante isotypique</u> de type S_i de M. Si M_{S_i} désigne ce ss-module, on a $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{S_i}$ et $f(M_{S_i}) \subseteq N_{S_i}$ pour <u>tout morphisme</u> $f : M \to N$.

Thm 3 : Soit A une k-algèbre associative. Soit V un A-module semisimple de k-dimension finie. Alors l'image de la représentation associée $A \xrightarrow[\rho]{} \mathrm{End}_k(V)$ est une algèbre semisimple.

Dém. : On peut supposer que $A \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ et que ρ est l'inclusion.
Décomposons V en somme de modules simples :

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$$

Pour chaque V_i, choisissons une k-base $v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i}$.
Considérons le A-module semisimple

$$W = V_1^{n_1} \oplus V_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus V_d^{n_d}.$$

On a le morphisme de A-modules à gauche

$${}_A A \longrightarrow W, \quad a \longmapsto (a.v_{1,1}, \ldots, a.v_{d,n_d}),$$

qui est clairement injectif. Donc ${}_A A$ est semisimple en tant que ss-module d'un module semisimple (L 2.3). ✓

Déf : Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ une partie.
Le <u>commutant</u> de $\mathcal{U}$ est

$$\mathrm{Comm}(\mathcal{U}) = \{ f \in \mathrm{End}_k(V) \mid f \circ u = u \circ f, \ \forall u \in \mathcal{U} \}.$$

Le <u>bicommutant</u> de $\mathcal{U}$ est $\mathrm{Comm}(\mathrm{Comm}(\mathcal{U}))$.

Rque : On a toujours $\mathcal{U} \subset \mathrm{Comm}(\mathrm{Comm}(\mathcal{U}))$.

<u>Thm 4</u> : Soient V un espace vectoriel de dim. finie et $A \subseteq \mathrm{End}_k(V)$ une algèbre semisimple. Alors $B = \mathrm{Comm}(A)$ est semisimple et $A = \mathrm{Comm}(B)$. Plus précisément, si $V_1, \dots, V_r$ sont les représentations irréductibles de A et $V \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes_k V_i$, où $U_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, V)$, alors

$$A \underset{(1)}{\simeq} \prod_{i=1}^{r} k\mathbb{1}_{V_i} \otimes \mathrm{End}_k(V_i) \quad \text{et} \quad B \underset{(2)}{\simeq} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_k(U_i) \otimes k\mathbb{1}_{V_i}$$

Dém. : On a (1) par le thm 2 d). On a, grâce au lemme de Schur :

$$\mathrm{Comm}(A) = \mathrm{End}_A\Big(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes V_i\Big) \cong \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_A(U_i \otimes V_i, U_j \otimes V_j)$$

$$\underset{\text{Schur}}{=} \prod_i \mathrm{Hom}_A(U_i \otimes V_i, U_i \otimes V_i) \cong \prod_i \underbrace{\mathrm{Hom}_k(U_i, U_i)}_{= \mathrm{End}_k(U_i)} \otimes_k \underbrace{\mathrm{Hom}_A(V_i, V_i)}_{\underset{\text{Schur}}{=} k\mathbb{1}_{V_i}}$$

<u>Corollaire</u> : $\{A\text{-modules simples}\}/\text{isom} \overset{\sim}{\longrightarrow} \{B\text{-modules simples}\}/\text{isom}$

$$U_i \longleftrightarrow V_i$$

✓

<u>4. Dualité de Schur-Weyl</u>

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $k \geq 1$.

Soit $\rho : \mathfrak{S}_k \longrightarrow Gl(V^{\otimes k})$ la représentation donnée par l'action

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}.$$

Soit $\varphi : Gl(V) \longrightarrow Gl(V^{\otimes k})$ la représ. donnée par l'action

$$f(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_k).$$

Soient $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ resp. $B \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ les ss-algèbres images de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$ resp. $\mathbb{C}\,Gl(V)$. Notons que $A \subseteq \mathrm{Comm}(B)$ et $B \subseteq \mathrm{Comm}(A)$.

$$\mathfrak{S}_k \circlearrowright V^{\otimes k} \circlearrowleft Gl(V)$$

<u>Thm 1</u> (Schur-Weyl*): A et B sont semisimples et

$$A = \mathrm{Comm}(B), \quad B = \mathrm{Comm}(A).$$

Dém. : Tout $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$-module est semisimple (Exemple p. 129). Donc $V^{\otimes k}$ est semisimple en tant que $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$-module. Comme $V^{\otimes k}$ est aussi de dim. finie sur $\mathbb{C}$, l'algèbre A est semisimple (Thm 3.3). Alors $B' := \mathrm{Comm}(A)$ est semisimple et $A = \mathrm{Comm}(B')$ (Thm 3.4). Il reste à montrer que $B = \mathrm{Comm}(A)$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V. Alors les

$$e_J = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}, \quad J = (j_1, \dots, j_k), \quad J \in \{1, \dots, n\}^k,$$

forment une base de $V^{\otimes k}$. On a

$$\sigma e_J = e_{\sigma(J)}, \quad \text{où} \quad \sigma(j_1, \dots, j_k) = (j_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, j_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Soit $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ de matrice $(a_{I,J})$ dans la base (e_I). Alors on vérifie que

$$T \in \mathrm{Comm}(A) \iff a_{I,J} = a_{\sigma(I),\sigma(J)}, \quad \forall I, J, \forall \sigma.$$

On aimerait montrer qu'un tel T est dans l'image de $\mathbb{C}\,Gl(V)$. Calculons cette image : soit $g \in Gl(V)$ de matrice (g_{ij}).

---

* Hermann Weyl, 1885 (Elmsdorf) – 1955 (Zurich)

On a
$$\varphi(g)(e_J) = g(e_{j_1}) \otimes \cdots \otimes g(e_{j_k}) = \sum_I g_{I,J}\, e_I ,$$
où
$$g_{I,J} = g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_k j_k} .$$
Notons qu'on a bien $g_{\sigma(I),\sigma(J)} = g_{I,J}$ ce qui confirme que $B \subseteq \mathrm{Comm}(A)$. Munissons V d'un produit scalaire hermitien pour lequel $e_1, \dots, e_n$ est orthonormé. Alors $V^{\otimes k}$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ héritent d'un produit scalaire hermitien :
$$\langle f, g \rangle = tr(f^* g) , \quad f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k}),$$
où f^* est l'adjoint de f. Pour montrer que $B = \mathrm{Comm}(A)$, il suffit de montrer que l'orthogonal de B dans $\mathrm{Comm}(A)$ s'annule. L'orthogonal de B dans $\mathrm{Comm}(A)$ est formé des T de matrice $(a_{I,J})$ tels que $a_{I,J} = a_{\sigma(I),\sigma(J)}$, $\forall \sigma$, et
$$\sum \overline{a_{I,J}}\, g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_k j_k} = 0$$
pour tous $g \in Gl(V)$. Pour un T fixé, c'est une égalité polynomiale pour les coefficients de $g \in Gl(V)$. Comme $Gl(V)$ est dense dans $\mathrm{End}(V)$ et que $\mathbb{C}$ est infini, on a donc l'égalité
$$\sum_{I,J} a_{I,J}\, X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k} = 0$$
dans $\mathbb{C}[X_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]$. Regroupons les termes dans

ce polynôme. Posons

$$X_{I,J} = X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k} .$$

Alors nous avons

$$X_{I,J} = X_{I',J'} \underset{!}{\Longleftrightarrow} \exists\, \sigma \in \mathfrak{S}_k \text{ t.q. } \begin{cases} I' = \sigma(I) \\ J' = \sigma(J) \end{cases} .$$

Soit Γ un système de représentants des orbites de $\mathfrak{S}_k$ dans l'ensemble des couples de suites (I,J). Alors on a

$$0 = \sum_{(I,J)} a_{I,J} X_{I,J} = \sum_{(I,J)\in\Gamma} \sum_{(I',J')\in \mathfrak{S}_k\cdot(I,J)} \underbrace{a_{I',J'} X_{I',J'}}_{= a_{I,J} X_{I,J}}$$

$$= \sum_{(I,J)\in\Gamma} \underbrace{|\mathfrak{S}_k \cdot (I,J)|}_{\neq 0} \cdot a_{I,J} \underbrace{X_{I,J}}_{\substack{\text{monômes} \\ \text{distincts } 2 \text{ à } 2}}$$

Il s'ensuit que $a_{I,J} = 0$ pour tous I, J, ce qu'il fallait démontrer. ✓