2.3 Localisation

Anneaux

Soient A un anneau commutatif et $S \subseteq A$ une partie multiplicative, i.e. $1 \in S$ et $S \cdot S \subseteq S$.

But : construire un morph. d'anneaux $A \xrightarrow{can} A_S$ qui envoie les éléments de S sur des inversibles et qui est universel pour cette propriété :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "can"'] \arrow[dr, "\forall f \text{ t.q. } f(S) \subseteq B^\times"] & \\ A_S \arrow[r, dashed, "\exists 1\, \tilde{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

Construction

Sur $A \times S$, on définit la relation $\sim$ par :

$$(a,s) \sim (b,t) \iff \exists\, r \in S \text{ t.q. } r(at - bs) = 0$$

Exercice : C'est une relation d'équivalence.

Notations : a/s = classe d'équivalence de (a,s)

A_S = ensemble des classes d'équivalence.

Lemme 1 et Déf. : a) Pour $a/s,\ b/t \in A_S$, les éléments

$$a/s + b/t := \frac{at+bs}{st}, \quad a/s \cdot b/t = ab/st$$

ne dépendent pas des choix des représentants.

b) Les lois $+$ et $\cdot$ font de A_S un anneau commutatif avec unité $1/1$.

c) L'appl. $A \xrightarrow{can} A_S$, $a \mapsto a/1$ est un morphisme d'anneaux qui rend inversibles les éléments de S et qui est universel pour cette propriété.

d) Le noyau de $\mathrm{can} : A \to A_S$ est $\{a \in A \mid \exists s \in S \text{ t.q. } as = 0\}$.

Dém : exercice ! ✓

<u>Déf</u> : A_S est le <u>localisé de</u> A <u>par rapport à</u> S.

<u>Exemples</u> : 1) Supposons A intègre. Si $S = A \setminus \{0\}$, alors $A_S = \mathrm{Frac}(A)$.

Si S est quelconque, l'appl. can. $A_S \to \mathrm{Frac}(A)$, $a/s \longmapsto a/s$ identifie A_S à un ss-anneau de $\mathrm{Frac}(A)$.

2) Si B est un autre anneau com., alors $S = A^\times \times B$ est une partie mult. de $A \times B$ et $(A \times B)_S \xrightarrow{\sim} A$ (!).

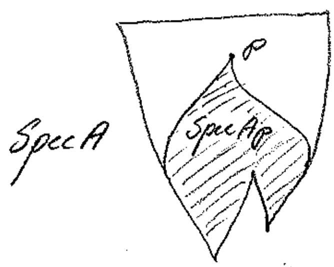
<u>Notation</u> : On note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble (ordonné) des idéaux premiers de A.

<u>Lemme 2</u> : a) L'application

$$\mathrm{Spec}(A_S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{p} \longmapsto \mathrm{can}^{-1}(\mathfrak{p})$$

est injective d'image l'ens. des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas S.

b) Un idéal $\mathfrak{p}$ de A est premier ssi $S = A \setminus \mathfrak{p}$ est multiplicative. Dans ce cas, <u>l'anneau</u>



$$A_\mathfrak{p} := A_S \quad (!)$$

est <u>local</u>, i.e. admet un unique idéal maximal, à savoir l'idéal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} := \{x/s \mid x \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\}$

Dém. : a) Exercice.

b) Par a), les idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ sont en bijection avec les idéaux de A contenus dans $A \setminus S$. Or $A \setminus S = \mathfrak{p}$. ✓

Modules

Rque : Soit M un A_S-module. Par restriction des scalaires le long de $A \to A_S$, M devient un A-module dans lequel les éléments de S agissent par des endom. inversibles. Réciproquement, si N est un A-module où les éléments $s \in S$ agissent par des endom. inversibles λ_s, alors N devient un A_S-module par

$$a/s \, . \, x = a \lambda_s^{-1}(x), \quad a/s \in A_S, \ x \in N.$$

Donc

$$A_S\text{-module} \text{ " = " } A\text{-module où les él. de } S \text{ agissent de façon inversible.}$$

Soit M un A-module. Sur $M \times S$, on définit la relation $\sim$ par :

$$(m,s) \sim (n,t) \ :\Longleftrightarrow \ \exists\, r \in S \text{ t.q. } r(tm - sn) = 0.$$

Exercice : c'est une relation d'équivalence.

Notation : m/s = classe d'équivalence de (m,s)

M_S = ensemble des classes d'équivalence.

Lemme 3 : et Déf. a) Pour $m/s, n/t \in M_S$ et $a/r \in A_S$, les éléments

$$m/s + n/t := \frac{mt + ns}{st} \quad \text{et} \quad a/r \cdot m/s = \frac{am}{rs}$$

ne dépendent pas du choix des représentants.

b) Les lois $+$ et $\cdot$ font de M_S un A_S-module.

c) L'application $M \to M_S$, $m \longmapsto m/1$ est un morphisme de A-modules, universel parmi les morphismes dans un module où les éléments de S agissent de façon inversible.

c) Le noyau de $M \to M_S$ est $\{m \in M \mid \exists s \in S \text{ t.q. } sm = 0\}$.

Dém. : Exercice. ✓

Lemme 4 : On a un isomorphisme canonique de A-modules

$$\varphi : A_S \underset{A}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} M_S, \quad \frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}$$

En particulier, si M est libre (resp. de type fini) sur A, alors M_S est libre (resp. de type fini) sur A_S.

Dém. : On vérifie que l'appl. $\psi : \frac{m}{s} \longmapsto \frac{1}{s} \otimes m$ est bien définie et inverse de φ. ✓

Exemple : Soit M un $\mathbb{Z}$-module.

$$M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} = 0 \underset{L4}{\iff} M_S = 0 \text{ où } S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\underset{L3c)}{\iff} \forall m \in M \ \exists a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ t.q. } am = 0.$$

$$\iff M \text{ est de torsion.}$$

Lemme 5 : Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$

est une suite exacte de A-modules, alors

$$0 \longrightarrow L_S \xrightarrow{i_S} M_S \xrightarrow{p_S} N_S \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de A_S-modules.

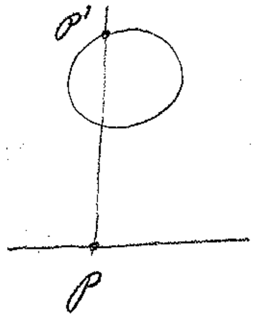
Dém. : La suite $L_S \longrightarrow M_S \longrightarrow N_S \longrightarrow 0$ est exacte car isomorphe à la suite $A_S \underset{A}{\otimes} L \longrightarrow A_S \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow A_S \underset{A}{\otimes} N \longrightarrow 0$, qui est exacte par les propriétés du produit tensoriel. Il reste à montrer que i_S est injective. En effet, si $\ell/s \in L_S$ et $i_S(\ell/s) = 0$, alors $i_S(\ell/1) = 0$, donc $t\, i(\ell) = 0$ pour un $t \in S$. Mais alors $i(t\ell) = 0$ et $t\ell = 0$ car i est injective. Donc $\ell/1 = 0$ et $\ell/s = 0$ dans L_S. ✓

2.4 Dimension

Soit $A \hookrightarrow B$ une extension finie (i.e. un morph. d'anneaux injectif qui fait de B un A-module de type fini). On va étudier l'application induite

$$\begin{array}{ccccc} B & & \mathfrak{p}' & & \operatorname{Spec} B \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & & \mathfrak{p}' \cap A & & \operatorname{Spec} A \end{array}$$

p.ex.



$$\begin{array}{c} k[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \\ \uparrow \\ k[X] \end{array}$$

On obtiendra le

Thm 1 : $\dim A = \dim B$

Prop. 2 : a) Pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, il existe $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} B$ t.q. $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$.

b) Pour tous $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec} B$ t.q. $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}'' \cap A$, on a $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}''$.

c) Un idéal $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} B$ est maximal ssi $\mathfrak{p}' \cap A$ est max. dans A.

Dém. : c) On a l'extension finie $A/\mathfrak{p}' \cap A \hookrightarrow B/\mathfrak{p}'$.
Donc $B/\mathfrak{p}'$ est un corps ssi $A/\mathfrak{p}' \cap A$ en est un (L 1.5.1).

b) Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}'' \cap A$. Soit $S = A \setminus \mathfrak{p}$. On a l'extension finie $A_S \hookrightarrow B_S$. On a

$$\mathfrak{p}'_S \cap A_S = \mathfrak{p}''_S \cap A_S = \mathfrak{p}_S$$

et c'est (l'unique) idéal maximal de $A_S = A_\mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}'_S$ et $\mathfrak{p}''_S$ sont maximaux (par c) et $\mathfrak{p}'_S = \mathfrak{p}''_S$. Comme $S \cap \mathfrak{p}' = \emptyset = S \cap \mathfrak{p}''$, il s'ensuit que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}''$.

a) B est un A-module de type fini. Si $\mathfrak{p}B = B$, alors, par le lemme de Nakayama, il existe $x \in \mathfrak{p}$ t.q. $(1-x)B = 0$. Mais alors $(1-x)A = 0$ et $1-x = 0$. $\lightning$. Donc $\mathfrak{p}B$ est un idéal propre. On choisit un idéal $\mathfrak{p}'$ de B qui contient $\mathfrak{p}B$, évite $S = A \setminus \mathfrak{p}$ et qui est maximal avec ces propriétés. Alors $\mathfrak{p}'$ est premier (P1.1.3) et, par construction, $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$. ✓

<u>Prop. 3</u> : a) Si
$$\mathfrak{p}_0' \subsetneq \mathfrak{p}_1' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l'$$
est une chaîne d'idéaux premiers de B, alors les $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' \cap A$ forment une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A.

b) Soit
$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$$
une chaîne d'idéaux premiers de A. Alors il existe une chaîne d'idéaux premiers de B
$$\mathfrak{p}_0' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l'$$
t.q. $\mathfrak{p}_i' \cap A = \mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq l$.

Dém. du thm 1 : Les deux inégalités résultent des parties a) et b) de la prop. 3. ✓

Dém. de la prop. 3 : a) résulte de la partie b) de la prop. 2.
b) On procède par récurrence sur l. Pour $l = 0$, on utilise la partie a) de la prop. 2. Pour $l > 0$, l'hypothèse de récurrence donne un relèvement $\mathfrak{p}_0' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{l-1}'$ de la chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{l-1}$. On considère l'extension finie
$$A/\mathfrak{p}_{l-1} \hookrightarrow B/\mathfrak{p}_{l-1}'$$
et on applique la partie a) de la prop. 2 pour obtenir $\mathfrak{p}_l'/\mathfrak{p}_{l-1}'$ qui relève $\mathfrak{p}_l/\mathfrak{p}_{l-1}$. ✓

<u>Thm 4</u> : Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}$. On a

a) $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$.

b) Si k est alg. clos, on a $\dim k^n = n$

(k^n considéré comme espace top. pour la top. de Zariski).

Dém. : b) résulte de a). Notons $A = k[X_1, \dots, X_n]$.

a) On a la chaîne d'idéaux premiers $(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, \dots, X_n)$. Donc $\dim A \geqslant n$. Montrons l'égalité par récurrence. Elle est claire pour $n = 0$. Supposons donc $n > 0$. Soit $0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_\ell$ une chaîne d'idéaux premiers dans A. Soit f un élément non nul de $\mathfrak{p}_1$. Alors

$$\mathfrak{p}_1/(f) \subsetneqq \mathfrak{p}_2/(f) \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_\ell/(f)$$

est une chaîne d'idéaux premiers de $A/(f)$. Donc $\dim A/(f) \geqslant \ell - 1$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ les images des X_i dans $A/(f)$. Les x_i sont algébriquement liés. Donc il existe $x_1', \dots, x_{n-1}'$ dans $A/(f)$ t.q. x_n soit entier sur la ss-algèbre $A' = k[x_1', \dots, x_{n-1}']$ de $A/(f)$ et $A/(f) = A'[x_n]$ (L 1.4.10, Noether).

Par le thm 1, on a

$$\dim A/(f) = \dim k[x_1', \dots, x_{n-1}'].$$

Comme $k[x_1', \dots, x_{n-1}']$ est un quotient de $k[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$, on a

$$\dim k[x_1', \dots, x_{n-1}'] \leq \dim k[Y_1, \dots, Y_{n-1}],$$

et $\dim k[Y_1, \dots, Y_{n-1}] = n-1$ par l'hypothèse de récurrence. Donc $\ell - 1 \leq \dim A/(f) \leq n-1$ et $\ell \leq n$. ✓