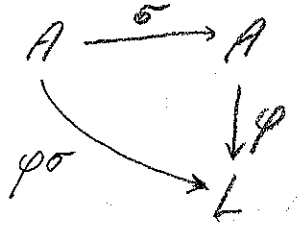
Prop. 5 : Supposons que $\bar{P}$ est séparable. Alors l'action à droite de $Gal_{\mathbb{Q}}(P)$ sur l'ensemble $Hom_{An}(A, L)$ des morphismes d'anneaux $A \to L$ définie par

$$\varphi \cdot \sigma = \varphi \circ \sigma, \quad \varphi \in Hom_{An}(A, L), \ \sigma \in Gal_{\mathbb{Q}}(P),$$

est simplement transitive.



Rques: 1) Tout morph. d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} L$ est surjectif car $\bar{P}$ se scinde dans $Im\varphi$.

2) Si $\bar{P}$ est séparable, alors P l'est aussi car $disc(\bar{P}) \in \mathbb{F}_p$ est la réduction modulo p de $disc(P) \in \mathbb{Z}$.

Dém. de la prop. : Soit $\varphi : A \to L$ un morphisme d'anneaux. Soient $\Omega \subset A$ l'ensemble des racines de P et $\bar{\Omega} \subset L$ l'ensemble des racines de $\bar{P}$. Comme $\bar{P}$ se scinde dans $Im\varphi$, φ induit une surjection $\Omega \to \bar{\Omega}$. Or P et $\bar{P}$ sont séparables et de mêmes degré. Donc Ω et $\bar{\Omega}$ ont même cardinal et φ induit une bijection $\Omega \to \bar{\Omega}$. Donc si $\varphi \circ \sigma = \varphi$, alors $\sigma|_{\Omega}$ est l'identité et σ est l'identité. Donc l'action est libre. Chacune de ses orbites est de cardinal $|Gal_{\mathbb{Q}}(P)| = [E : K]$ et il existe au moins une orbite (Prop. 3). Donc il suffit de montrer que l'ensemble $Hom_{An}(A, L)$ est de cardinal $\leq [E : K]$. Par le lemme de Dedekind (Thm 4) appliqué au monoïde $G = (A, \cdot)$, il suffit de montrer que

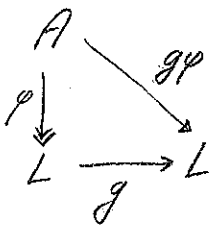
$\mathrm{Hom}_{An}(A, L)$ est contenu dans un ss-espace de dimension $\leq [E:k]$ du L-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{Ens}(A, L)$. Or $\mathrm{Hom}_{An}(A, L)$ est contenu dans le L-espace des morphismes $\mathbb{Z}$-linéaires

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{[E:k]}, L) \simeq L^{[E:k]}.$$

✓

Rque : Supposons $\bar{P}$ séparable. Le groupe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{F}_p)$ agit à gauche sur $\mathrm{Hom}_{An}(A, L)$ par

$$g \cdot \varphi = g \circ \varphi.$$



Comme tout φ est surjectif, cette action est libre.

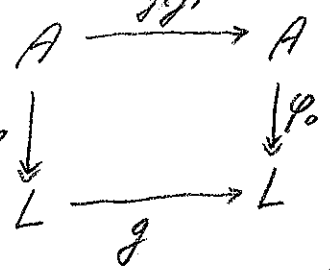
Si on choisit $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{An}(A, L)$, on obtient donc une injection

$$\mathrm{Gal}(L|\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{An}(A, L) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E|\mathbb{Q}).$$

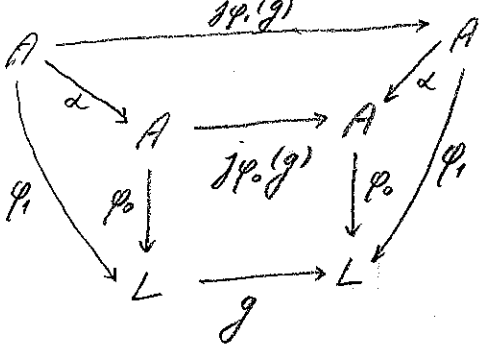
$$j = j_{\varphi_0}$$

Pour tout $g \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{F}_p)$, $j(g)$ est l'unique autom. de $E \supseteq \mathbb{Q}$ tel que le carré (1)

(1)



(2)



commute. On en déduit facilement que

$$j : \mathrm{Gal}(L|\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(E|\mathbb{Q})$$

est un morphisme de groupes. Si $\varphi_1 : A \to L$ est un autre morph. d'anneau, on a $\varphi_1 = \varphi_0 \alpha$ pour un unique $\alpha \in \mathrm{Gal}(E|\mathbb{Q})$, et donc

$$j_{\varphi_1}(g) = \alpha^{-1} j_{\varphi_0}(g) \alpha, \quad \forall g \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}), \text{ voir (2)}.$$

Donc $j = j_{\varphi_0}$ est indépendant du choix de φ_0 à conjugaison près.

Finalement, si $\Omega \subset A$ est l'ens. des racines de P et $\bar{\Omega} \subset L$ l'ens. des racines de $\bar{P}$, alors φ_0 induit une bijection $\Omega \xrightarrow{\sim} \bar{\Omega}$ (voir la dém. de la Prop 5) et g et $j(g)$ laissent les ens. de racines stables. D'où des diagr. compatibles :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j(g)} & A \\ {\scriptstyle \varphi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} \\ L & \xrightarrow[g]{} & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow[\sim]{j(g)} & \Omega \\ {\scriptstyle \varphi_0}\downarrow{\scriptstyle \wr} & & \downarrow{\scriptstyle \wr}{\scriptstyle \varphi_0} \\ \bar{\Omega} & \xrightarrow[g]{\sim} & \bar{\Omega} \end{array}$$

Ceci achève la démonstration du thm 6.

Règle : Donc à chaque nombre premier p t.q. $\bar{P}$ est séparable, on a associé une classe de conjugaison

$$C_p = \text{classe de conj. de } j(Fr_p)$$

dans $G = Gal_{\mathbb{Q}}(P)$.

Question : Est-ce que toute classe est atteinte ? Et combien de fois ?

Réponse : Toute classe est atteinte une infinité de fois. Plus précisément, on a le théorème remarquable :

Thm 7 (Tchebotarev*, 1922) : Pour chaque classe de conjugaison C de G, (admis) la densité

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{p \text{ premier t.q. } \operatorname{disc}(P) < p \le n \text{ et } C_p = C\}}{\#\{p \text{ premier t.q. } p \le n\}}$$

existe et vaut $|C|/|G|$.

Exemples : 1) On a $C_p = \{e\}$ ssi Fr_p est l'identité ssi $\bar{P}$ se scinde dans $\mathbb{F}_p$. Par le théorème, cela arrive avec "probabilité" $1/161$.

2) Pour $P = X^4 - X - 1$, on a $Gal_{\mathbb{Q}}(P) \simeq \mathfrak{S}_4$. Donc les densités des p t.q. $\bar{P}$ se décompose en des facteurs irréductibles des degrés donnés sont :

décompos.	4	1,3	2,2	1,1,2	1,1,1,1
densité	1/4	1/3	1/8	1/4	1/24

* Николай Григорьевич Чеботарёв, 1894 (Kamenets-Podolsk) - 1947 (Moscou)

III Introduction à la géométrie algébrique

1. Un peu d'algèbre commutative

Convention : anneau = anneau commutatif avec 1
morphisme d'anneau = morph. compatible avec la multiplication et qui préserve 1.

Exemple : $A \longrightarrow A \times A$, $a \longmapsto (a, 0)$ est un morphisme d'anneaux ssi $A = 0$.

1.1 Radical de Jacobson, racine d'un idéal, nilradical

Soit A un anneau non nul.

Déf : Le radical de Jacobson de A est l'ensemble

$$\mathrm{Rad}A := \{x \in A \mid 1 + ax \text{ est inversible pour tout } a \in A\}.$$

Lemme 1 : a) $\mathrm{Rad}A$ est un idéal de A. On a $1 + \mathrm{Rad}A \subseteq A^*$ et $\mathrm{Rad}A$ est le plus grand idéal avec cette propriété.

b) $\mathrm{Rad}A$ est l'intersection des idéaux maximaux de A.

Dém. : a) Pour $x \in \mathrm{Rad}A$ et $a \in A$, on a $ax \in \mathrm{Rad}A$, par définition.

Soient $x, y \in \mathrm{Rad}A$. On a

$$1 + (x+y) = (1+x) + y \quad \text{et donc} \quad (1+x)^{-1}(1+x+y) = 1 + (1+x)^{-1}y$$

ce qui montre que $1 + x + y$ est inversible. Donc $\mathrm{Rad}A$ est un idéal.

Le reste est clair.

b) Montrons que le complémentaire de $\mathrm{Rad}A$ est égal au complémentaire de l'intersection des idéaux maximaux :

$y \notin \mathrm{Rad}A \Rightarrow \exists\, a \in A$ t.q. $1 + ay \notin A^* \Rightarrow A \cdot (1+ay) \neq A$

$\Rightarrow \exists\ m$ idéal max. t.q. $(1+ay)\cdot A \subseteq m$

$\Rightarrow 1+ay \in m \Rightarrow y \notin m$ (sinon, on aurait $1 \in m$).

$y \notin \bigcap_{m \text{ max.}} m \Rightarrow \exists\ m_0$ max. t.q. $y \notin m_0$

$\Rightarrow \exists\ a$ t.q. $1+ay \in m_0$ (car A/m_0 est un corps)

$\Rightarrow 1+ay$ n'est pas inversible

$\Rightarrow y \notin \mathrm{Rad}A$. ✓

Déf : Soit I un idéal de A. La racine de I (= "radical" de I) est l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{ a \in A \mid \exists\ n \geq 1 \text{ t.q. } a^n \in I \}$$

L'idéal I est radical si $I = \sqrt{I}$.

Lemma 2 : a) $\sqrt{I}$ est un idéal, c'est le plus petit idéal radical contenant I. Tout idéal premier est radical.

b) On a $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ pour tout idéal J.

c) $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux premiers contenant I.

Dém : a) Clairement si $x \in I$ et $a \in A$, alors $ax \in I$. Soient $x, y \in \sqrt{I}$ et $n, m \geq 1$ t.q. $x^n \in I$ et $x^m \in I$. Alors

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{p+q=n+m} \binom{p}{n+m} x^p y^q \in I$$

($\in I$ car $p \geq n$ ou $q \geq m$.)

Si $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, alors $x^n \in \sqrt{I}$ et $(x^n)^m \in I$ pour des $n, m \geq 1$. Donc $x \in \sqrt{I}$ et on a $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. Si $J \supseteq I$ est radical et $x^n \in I$, alors $x^n \in J$, donc $x \in J$. Donc $J \supseteq \sqrt{I}$. Si p est premier et $x^n \in p$, alors $x^n = 0$ dans A/p, qui est intègre. Donc $x = 0$ dans A/p et $x \in p$. b) Exercice !

c) Montrons que le complémentaire de $\sqrt{I}$ est égal au complémentaire de l'intersection des idéaux premiers contenant I. Si x n'est pas dans l'intersection, alors $x \notin \mathfrak{p}$ pour un premier $\mathfrak{p}$ contenant I. Donc $x^n \notin \mathfrak{p}$, $\forall n \geq 1$, et $x \notin \sqrt{I}$. Réciproquement, supposons que $x \notin \sqrt{I}$. Alors $x^n \notin I$, $\forall n \geq 1$. Considérons l'ens. ordonné $\mathcal{E}$ des idéaux J contenant I t.q. $x^n \notin J$, $\forall n \geq 1$. Alors $\mathcal{E}$ est non vide (car $I \in \mathcal{E}$) et toute famille non vide d'éléments de $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure (la réunion). Soit J_0 maximal dans $\mathcal{E}$ (Zorn). Montrons que J_0 est premier. Soient $a, b \in A$ t.q. $a \notin J_0$ et $b \notin J_0$. Alors il existe $n, m \geq 1$ t.q. $x^n \in (a) + J_0$ et $x^m \in (b) + J_0$, par la maximalité de J. Donc $x^{n+m} \in (ab) + J_0$ et $ab \notin J_0$ car $x^{n+m} \notin J_0$. On a montré que $x \notin \sqrt{I}$ implique que $x \notin J_0$ pour l'idéal premier J_0. ✓

Lemme 3 : Soit $S \subseteq A$ une partie multiplicative, i.e. $1 \in S$ et $SS \subseteq S$.
Si J_0 est maximal dans l'ens. ordonné des idéaux qui ne rencontrent pas S, alors J_0 est premier.

Déf : Le nilradical de A est l'ensemble des éléments nilpotents de A.

Rque : Le nilradical est donc égal à $\sqrt{(0)}$ et on a

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \mathfrak{p}$$

par le lemme 2. Notons que $\sqrt{(0)} \subseteq \mathrm{Rad}\, A$.