Université Paris Diderot – Paris 7 10/01/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et F. Lemma

L3 Math/Info : Algèbre et géométrie 1, U1MC35

Un corrigé de l'examen du 10/01/2018

1) *Question de cours.*

a) Définir la notion de groupe.

Solution : Un groupe est un couple $(G, \star)$ *formé d'un ensemble* G *et d'une application*

$$\star : G \times G \to G\ ,\ (g,h) \mapsto gh$$

tels que

1. $\star$ *est associative, i.e. on a* $(gh)k = g(hk)$ *pour tous* $g, h, k \in G$,
2. $\star$ *admet un élément neutre* e*, i.e.* $ge = g = eg$ *pour tous* $g \in G$,
3. *tout élément* $g \in G$ *admet un inverse* $g' \in G$*, i.e.* $gg' = e = g'g$.

b) Définir la notion d'espace affine.

Solution : Un espace affine est un triplet $(\mathcal{E}, E, \varphi)$*, où* $\mathcal{E}$ *est un ensemble non vide,* E *un espace vectoriel et* $\varphi : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ *une action libre et transitive du groupe* $(E, +)$ *sur l'ensemble* $\mathcal{E}$.

c) Définir la notion de représentation d'un groupe fini.

Solution : Une représentation d'un groupe fini G *est un morphisme de groupes* $\rho : G \to Gl(V)$*, où* V *est un espace vectoriel complexe de dimension finie.*

d) Qu'est-ce qu'une représentation irréductible d'un groupe fini G ?

Solution : Soit $\rho : G \to Gl(V)$ *une représentation de* G*. Un sous-espace* G*-stable de* V *est un sous-espace* $W \subset V$ *tel que* $\rho(g)(W) \subset W$ *pour tous* $g \in G$*. La représentation* ρ *est irréductible si* V *est non nul et n'admet aucun sous-espace* G*-stable autre que* $\{0\}$ *et* V.

e) Soit $\rho : G \to Gl(V)$ une représentation irréductible d'un groupe fini G et soit $f : V \to V$ un morphisme de représentations. Montrer que f est une homothétie.

Solution : Comme f *est un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie,* f *admet une valeur propre* λ*. Alors* $f - \lambda Id_V$ *a un noyau non nul* W *et comme* $f - \lambda Id_V$ *est encore un morphisme de représentations,* W *est* G*-stable. Comme* ρ *est irréductible, on doit avoir* $W = V$ *et donc* $f = \lambda Id_V$.

2) Soient les permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Les permutations σ_1 et σ_2 sont-elles conjuguées ? Si oui, exhiber une permutation ρ telle que $\rho\sigma_1\rho^{-1} = \sigma_2$.

Solution : Nous avons les décompositions en produit de cycles à supports dijoints suivantes :

$$\sigma_1 = (135)(246)(78) \quad \textit{et} \quad \sigma_2 = (156)(247)(38).$$

D'après un théorème du cours, pour tout $\rho \in \mathfrak{S}_n$, nous avons

$$\rho\sigma_1\rho^{-1} = (\rho(1)\rho(3)\rho(5))\ (\rho(2)\rho(4)\rho(6))\ (\rho(7)\rho(8)).$$

Donc si nous choisissons

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

nous avons bien $\rho\sigma_1\rho^{-1} = \sigma_2$.

b) Déterminer l'ordre et la signature de σ_1 et σ_2.

Solution : L'ordre de σ_1 est le ppcm des longueurs des cycles dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. Donc l'ordre de σ_1 est 6. *La signature de σ_1 est égale à $(-1)^{3+1}(-1)^{3+1}(-1)^{2+1} = -1$. Comme σ_2 est conjugué de σ_1, son ordre et sa signature coïncident avec ceux de σ_1.*

3) Soient G_1 et G_2 deux groupes finis et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. On note $Cl(G_1)$ (resp. $Cl(G_2)$) l'ensemble des classes de conjugaison de G_1 (resp. G_2).

a) Montrer que l'image $\varphi(C)$ d'une classe de conjugaison C de G_1 est contenue dans une unique classe de conjugaison C' de G_2. On note $\tilde{\varphi}(C)$ cette classe de conjugaison.

Solution : Pour $g \in C$, $x \in G_1$, on a

$$\varphi(xgx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(g)\varphi(x)^{-1}$$

puisque φ est un morphisme de groupes. Il s'ensuit que si $\varphi(g)$ est contenu dans une classe de conjugaison C', alors les images de tous ses conjugués sont également contenues dans C'. On a donc $\varphi(C) \subset C'$ et, comme les classes de conjugaison sont disjointes 2 *à* 2*, la classe de conjugaison C' est unique.*

On suppose désormais que $\tilde{\varphi} : Cl(G_1) \to Cl(G_2)$ est une bijection. On se propose de montrer que φ est un isomorphisme.

b) Montrer que φ est injective. Notons H son image.

Solution : Le noyau $\ker(\varphi)$ *est la réunion des classes de conjugaison qui sont envoyées sur $\{e\}$ par $\tilde{\varphi}$. Par hypothèse, seule la classe de e est envoyée dans $\{e\}$. Donc* $\ker(\varphi) = \{e\}$ *et φ est injective.*

c) Montrer que G_2 est la réunion des conjugués gHg^{-1}, $g \in G_2$, de l'image H.

Solution : Par hypothèse, pour toute classe de conjugaison C' de G_2, il existe un élément x de G_1 tel que $\varphi(x) \in C'$. L'ensemble des conjugués $g\varphi(x)g^{-1}$ est donc égal à C'. Donc la réunion des conjugués gHg^{-1}, $g \in G$, contient toutes les classes de conjugaison de G_2. Elle est donc égale à G_2.

d) Quel est le nombre de sous-groupes de la forme gHg^{-1}, $g \in G_2$? Montrer que ce nombre est majoré par l'indice de H dans G_2.

Solution : On fait agir G_2 sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison. L'orbite de H est formée des sous-groupes gHg^{-1}, $g \in G_2$, et le stabilisateur de H est le normalisateur $N_{G_2}(H)$. Le cardinal de l'orbite est donc égal à l'indice $[G_2 : N_{G_2}(H)]$. Comme $N_{G_2}(H)$ contient H, l'indice $[G_2 : N_{G_2}(H)]$ est majoré par l'indice $[G_2 : H]$.

e) Montrer que si l'on a $[G_2 : H] > 1$, alors la réunion des sous-groupes conjugués gHg^{-1}, $g \in G_2$, est de cardinal strictement plus petit que l'ordre de G_2.

Solution : Tous les sous-groupes gHg^{-1}, $g \in G_2$, sont d'ordre $|H|$ et leur nombre est majoré par $[G_2 : H]$. Leur réunion est égale à la réunion de $\{e\}$ avec les ensembles $gHg^{-1} \setminus \{e\}$. Le cardinal de la réunion est donc majoré par

$$1 + [G_2 : H](|H| - 1) = 1 + |G_2| - [G_2 : H] < |G_2|$$

où la dernière inégalité vient de l'hypothèse que $[G_2 : H] > 1$.

f) En déduire que φ est surjective.

Solution : Si φ n'est pas surjective, alors $[G_2 : H] > 1$ et la réunion des conjugués gHg^{-1}, $g \in G_2$, est strictement plus petite que G_2, par e). Or cette réunion est égale à G_2 par c). Cette contradiction montre que φ est bien surjective.

4) Soit G un groupe d'ordre $2n$, où n est impair. On se propose de montrer que G admet un sous-groupe d'ordre n.

a) Montrer que G admet un élément τ d'ordre 2.

Solution : Le nombre 2 est un diviseur premier de l'ordre de G. Par le théorème de Cauchy, G contient un élément τ d'ordre 2.

b) On fait agir G sur lui-même par translations à gauche. Montrer que τ n'admet aucun point fixe dans cette action.

Solution : Si on a $\tau g = g$ pour un $g \in G$, on a $\tau = e$. Contradiction.

c) Déduire que toutes les orbites de $\langle \tau \rangle$ sont de cardinal 2.

Solution : Comme $\langle \tau \rangle$ est d'ordre 2, le cardinal d'une orbite sous $\langle \tau \rangle$ divise 2. Les orbites sont donc de cardinal 1 ou 2 et le cas d'une orbite de cardinal 1 est exclu pas b). Donc toutes les orbites sont de cardinal 2.

d) Déduire que τ agit sur G comme la composée de n transpositions.

Solution : Comme G est d'ordre $2n$ et que toutes les orbites sont de cardinal 2, le nombre d'orbites vaut n. Sur chaque orbite, τ agit en permutant les deux éléments de l'orbite. Donc τ agit sur G comme la composée de n transposition.

e) Soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}_G$ le morphisme associé à l'action par translations à gauche de G sur lui-même. Quelle est la signature de $\varphi(\tau)$?

Solution : Comme τ agit comme la composée de n transpositions, son image par la signature est $(-1)^n = -1$ car n est impair.

f) Déduire que la composée $\varepsilon \circ \varphi : G_2 \to \{1, -1\}$ est surjective, où ε désigne la signature.

Solution : On a $\varepsilon \circ \varphi(\tau) = -1$ par e). Donc $\varepsilon \circ \varphi$ est bien surjective.

g) Montrer que le noyau de $\varepsilon \circ \varphi$ est un sous-groupe d'ordre n dans G.

Solution : Comme $\psi = \varepsilon \circ \varphi$ est un morphisme de groupes surjectif, d'après le premier théorème d'isomorphisme, il induit un isomorphisme

$$G/\ker(\psi) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}.$$

Donc $\ker(\psi)$ est d'indice 2 dans G, et comme G est d'ordre $2n$, $\ker(\psi)$ est d'ordre n.

5) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

a) Soient $P_1, \ldots, P_n$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ est non nul. Montrer qu'il existe un unique point M dans $\mathcal{E}$ tel que pour tout point P_0 de $\mathcal{E}$, on ait

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; \overrightarrow{P_0P_i} \; .$$

On appelle M le *barycentre* des points $P_1, \ldots, P_n$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on le note $\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, \ldots, P_n, \lambda_n)$.

Solution : Soit P_0 un point de $\mathcal{E}$. On définit

$$M = P_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; \overrightarrow{P_0P_i} \; .$$

Soit P_0' un autre point de $\mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0'M} = \overrightarrow{P_0'P_0} + \overrightarrow{P_0M} &= \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{P_0'P_0} + \overrightarrow{P_0P_i}) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; \overrightarrow{P_0'P_i} \; . \end{aligned}$$

Cela montre bien que M vérifie la condition requise.

b) Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, P_2, \lambda_2, \ldots, P_n, \lambda_n) = \mathrm{bar}(P_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(n)}, \lambda_{\sigma(n)}).$$

Solution : Soit P_0 un point de $\mathcal{E}$. Posons

$$M = bar(P_1, \lambda_1, \ldots, P_n, \lambda_n) \text{ et } M' = bar(P_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(n)}, \lambda_{\sigma(n)}).$$

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0M'} &= \frac{1}{\lambda_{\sigma(1)}+\cdots+\lambda_{\sigma(n)}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{\sigma(i)}\ \overrightarrow{P_0P_{\sigma(i)}} \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ \overrightarrow{P_0P_i} \\ &= \overrightarrow{P_0M}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme d'espaces affines. Montrer que

$$f(\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, P_2, \lambda_2, \ldots, P_n, \lambda_n)) = \mathrm{bar}(f(P_1), \lambda_1, f(P_2), \lambda_2, \ldots, f(P_n), \lambda_n).$$

Solution : Soit P_0 un point de $\mathcal{E}$. Soient

$$M = bar(P_1, \lambda_1, \ldots, P_n, \lambda_n) \text{ et } M' = bar(f(P_1), \lambda_1, \ldots, f(P_n), \lambda_n)).$$

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(P_0)f(M)} &= \overrightarrow{f}\ (\overrightarrow{P_0M}) \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ \overrightarrow{f}\ (\overrightarrow{P_0P_i}) \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ \overrightarrow{f(P_0)f(P_i)}\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $f(M)$ est le barycentre des $f(P_i)$, $1 \le i \le n$, affectés des poids λ_i, $1 \le i \le n$.

d) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Montrer que pour tout point Q de $\mathcal{E}$, le point $\mathrm{bar}(Q, 1, f(Q), 1)$ est un point fixe de f.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}f(bar(Q, 1, f(Q)) &= bar(f(Q), 1, f^2(Q), 1) \\ &= bar(f(Q), 1, Q, 1) = bar(Q, 1, f(Q), 1)\ ,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé c) pour la première égalité, et b) pour la troisième.

e) Soit f un élément d'ordre 3 dans le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Montrer que f admet un point fixe dans $\mathcal{E}$.

Solution : Soit P un point de $\mathcal{E}$ et

$$M = bar(P, 1, f(P), 1, f^2(P), 1).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}f(M) &= f(bar(P, 1, f(P), 1, f^2(P), 1) = bar(f(P), 1, f^2(P), 1, f^3(P), 1)) \\ &= bar(P, 1, f(P), 1, f^2(P), 1) = M\ ,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé c) pour la deuxième égalité et b) pour la troisième.

f) Soit G un sous-groupe fini du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Montrer que G admet un point fixe M dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que $f(M) = M$ pour tout $f \in G$).

Solution : Soit P_1 un point de $\mathcal{E}$ et soient P_1, P_2, ..., P_n les points de l'orbite de P_1 sous l'action du groupe G. Soit M le barycentre des points P_i, $1 \leq i \leq n$, affectés du poids 1. Soit $f \in G$. On a

$$\begin{aligned} f(M) &= f(bar(P_1, 1, \ldots, P_n, 1)) \\ &= bar(f(P_1), 1, \ldots, f(P_n), 1) = bar(P_1, 1, \ldots, P_n, 1) = M \ , \end{aligned}$$

où nous avons utlisé c) pour la deuxième égalité et b) pour la troisième (f permute les points de l'orbite).