Université Paris Diderot – Paris 7 07/11/2017
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et F. Lemma

L3 Math/Info : Algèbre et géométrie 1, U1MC35

TEST N° 4

NOM :

Prénom :

1) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué et K un sous-groupe. Montrer que HK est un sous-groupe et que HK/H est isomorphe à $K/K \cap H$.
2) Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué d'indice k. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g^k \in H$.

1) On a $e = e \cdot e \in HK$. Pour $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$, on a

$$h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 \underbrace{k_1 h_2 k_1^{-1}}_{\in H} k_1 k_2 \in HK.$$

Pour $h \in H$ et $k \in K$, on a

$$(hk)^{-1} = k^{-1} h^{-1} = \underbrace{k^{-1} h^{-1} k}_{\in H} k^{-1} \in HK.$$

Donc HK est bien un ss-groupe. La composée

$$K \longrightarrow HK \xrightarrow[\pi]{} HK/H$$

est un morphisme de groupe surjectif (car $\pi(hk) = \pi(k)$ pour tous $h \in H, k \in K$) et de noyau $K \cap \ker(\pi) = K \cap H$. Par le premier thm d'isomorphisme, elle induit un isomorphisme $K/K \cap H \xrightarrow{\sim} HK/H$.

2) Soit $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique. Pour $g \in G$, on a $\pi(g^k) = \pi(g)^k = e$ par le thm de Lagrange. Donc $g^k \in \ker(\pi) = H$.