Université Paris Diderot – Paris 7 10/01/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et F. Lemma

L3 Math/Info : Algèbre et géométrie 1, U1MC35

Examen

1) *Question de cours.*
   a) Définir la notion de groupe.
   b) Définir la notion d'espace affine.
   c) Définir la notion de représentation d'un groupe fini.
   d) Qu'est-ce qu'une représentation irréductible d'un groupe fini G ?
   e) Soit $\rho : G \to Gl(V)$ une représentation irréductible d'un groupe fini G et soit $f : V \to V$ un morphisme de représentations. Montrer que f est une homothétie.

2) Soient les permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Les permutations σ_1 et σ_2 sont-elles conjuguées ? Si oui, exhiber une permutation ρ telle que $\rho\sigma_1\rho^{-1} = \sigma_2$.
   b) Déterminer l'ordre et la signature de σ_1 et σ_2.

3) Soient G_1 et G_2 deux groupes finis et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. On note $Cl(G_1)$ (resp. $Cl(G_2)$) l'ensemble des classes de conjugaison de G_1 (resp. G_2).
   a) Montrer que l'image $\varphi(C)$ d'une classe de conjugaison C de G_1 est contenue dans une unique classe de conjugaison C' de G_2. On note $\tilde{\varphi}(C)$ cette classe de conjugaison.
   On suppose désormais que $\tilde{\varphi} : Cl(G_1) \to Cl(G_2)$ est une bijection. On se propose de montrer que φ est un isomorphisme.
   b) Montrer que φ est injective. Notons H son image.
   c) Montrer que G_2 est la réunion des conjugués gHg^{-1}, $g \in G_2$, de l'image H.
   d) Quel est le nombre de sous-groupes de la forme gHg^{-1}, $g \in G_2$? Montrer que ce nombre est majoré par l'indice de H dans G_2.
   e) Montrer que si l'on a $[G_2 : H] > 1$, alors la réunion des sous-groupes conjugués gHg^{-1}, $g \in G_2$, est de cardinal strictement plus petit que l'ordre de G_2.
   f) En déduire que φ est surjective.

4) Soit G un groupe d'ordre $2n$, où n est impair. On se propose de montrer que G admet un sous-groupe d'ordre n.

a) Montrer que G admet un élément τ d'ordre 2.
b) On fait agir G sur lui-même par translations à gauche. Montrer que τ n'admet aucun point fixe dans cette action.
c) Déduire que toutes les orbites de $\langle \tau \rangle$ sont de cardinal 2.
d) Déduire que τ agit sur G comme la composée de n transpositions.
e) Soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}_G$ le morphisme associé à l'action par translations à gauche de G sur lui-même. Quelle est la signature de $\varphi(\tau)$?
f) Déduire que la composée $\varepsilon \circ \varphi : G \to \{1, -1\}$ est surjective, où ε désigne la signature.
g) Montrer que le noyau de $\varepsilon \circ \varphi$ est un sous-groupe d'ordre n dans G.

5) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

a) Soient $P_1, \ldots, P_n$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ est non nul. Montrer qu'il existe un unique point M dans $\mathcal{E}$ tel que pour tout point P_0 de $\mathcal{E}$, on ait

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} .$$

On appelle M le *barycentre* des points $P_1, \ldots, P_n$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on le note $\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, \ldots, P_n, \lambda_n)$.

b) Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, P_2, \lambda_2, \ldots, P_n, \lambda_n) = \mathrm{bar}(P_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(n)}, \lambda_{\sigma(n)}).$$

c) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme d'espaces affines. Montrer que

$$f(\mathrm{bar}(P_1, \lambda_1, P_2, \lambda_2, \ldots, P_n, \lambda_n)) = \mathrm{bar}(f(P_1), \lambda_1, f(P_2), \lambda_2, \ldots, f(P_n), \lambda_n).$$

d) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Montrer que pour tout point Q de $\mathcal{E}$, le point $\mathrm{bar}(Q, 1, f(Q), 1)$ est un point fixe de f.
e) Soit f un élément d'ordre 3 dans le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Montrer que f admet un point fixe dans $\mathcal{E}$.
f) Soit G un sous-groupe fini du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Montrer que G admet un point fixe M dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que $f(M) = M$ pour tout $f \in G$).