Université Paris Diderot – Paris 7 04/11/2017
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et F. Lemma

L3 Math/Info : Algèbre et géométrie 1, U1MC35

Examen partiel

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits.

1) **Question de cours.**

   a) Définir la notion de groupe et celle d'action d'un groupe G sur un ensemble X.

   b) Soient G un groupe fini non trivial et p le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer qu'un sous-groupe d'indice p dans G est distingué.

2) Soient $\alpha : G \to H$ et $\beta : G \to H$ deux morphismes de groupes. Est-il vrai ou faux que la partie $L = \{g \in G \mid \alpha(g) = \beta(g)\}$ de G est un sous-groupe ? Justifier.

3) Soient les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 9 & 5 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 9 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints de $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

   b) Quel est l'ordre de ρ ? Quelle est sa signature ?

4) Soit G un groupe. Le *commutateur* de deux éléments x et y de G est défini par

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Le *sous-groupe dérivé de* G est par définition le sous-groupe $D(G)$ engendré par tous les commutateurs.

   a) Montrer que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ pour tout automorphisme φ de G et tous $x, y \in G$.

   b) Montrer que $D(G)$ est distingué dans G. *L'abélianisé de* G est le groupe quotient $G_{ab} = G/D(G)$.

   c) Montrer que G_{ab} est abélien.

   d) Montrer que pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$ vers un groupe abélien H, il existe un unique morphisms $\overline{f} : G_{ab} \to H$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$, où π désigne la surjection canonique $G \to G_{ab}$.

   e) Déterminer $D(G)$ et G_{ab} lorsque G est le groupe diédral D_3.

tourner s.v.p.

f) Supposons à partir de maintenant que G est le groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures 2×2 à coefficients réels. Soit U la partie de G formée des matrices dont les coefficents diagonaux valent 1. Montrer que U est un sous-groupe de G.

g) Montrer que tout commutateur d'éléments de G appartient à U.

h) Montrer que réciproquement, tous les éléments de U sont des commutateurs d'éléments de G. *Indication : on pourra considérer le commutateur de deux éléments de la forme*

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où a est un scalaire non nul et b un scalaire quelconque. Déduire que $D(G) = U$.

i) Montrer que G_{ab} est isomorphe au groupe produit $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.