Université de Paris 7 **2003-2004**
CAPES: Ecrit

Algèbre linéaire I

Exercice I:

Calculer le rang des matrices suivantes (où m et α sont des paramètres complexes)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II:

On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels homogène à 3 équations et 5 inconnues.

1) Quelle peut être la dimension de l'espace des solutions ?

2) Donner un exemple de système d'équations pour chaque valeur possible de la dimension de l'espace des solutions.

Exercice III:

Mettre sous forme échelonnée par rapport aux lignes puis sous forme échelonnée réduite la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système

$$\begin{cases} 6x + 3y - z &= 2 \\ -4x + y - 6z &= 0 \\ x + 2y - 5z &= -1 \end{cases}$$

Exercice IV:

On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

1) Mettre B sous forme échelonnée par rapport aux lignes.

2) A quelle condition sur Y le système $BX = Y$ a-t-il une solution? En déduire une équation de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de B.

Exercice V:

Soit $S \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la dimension de S ? Combien d'équations faut-il pour caractériser S ? Donner un système d'équations homogène dont S est l'ensemble des solutions.

Exercice VI:

Ecrire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

Exercice VII:

Soit G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes diagonaux valent 1. Montrer que G est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$ engendré par les matrices élémentaires $T_{ij}(\lambda)$ où $i < j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice VIII:

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) $A \sim B \Rightarrow {}^tA \sim {}^tB$
2) $A \sim B \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda A \sim \lambda B$
3) $A \sim I_n \Rightarrow A$ est inversible
4) $A \sim B,\ A, B$ inversibles $\Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$
5) $A, B, A', B' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) : A \sim B,\ A' \sim B' \Rightarrow A + A' \sim B + B'$
6) $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ A', B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : A \sim B,\ A' \sim B' \Rightarrow AA' \sim BB'$
7) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$

Exercice IX:

Pour cet exercice, on rappelle que toute matrice de rang r est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer les affirmations suivantes :

1) Toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles.
2) $GL(n, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux.
4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \neq 0$ telle que $AB = BA = 0$.
5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible, $A \neq 0$. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice X:

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une fonction multiplicative (i.e. $\forall A, B,\ f(AB) = f(A)f(B)$). On suppose que f n'est ni la fonction nulle, ni la fonction constante égale à 1. On veut montrer que

$$f(A) = 0 \iff \det(A) = 0.$$

1) Déterminer $f(I_n)$ et $f(0_n)$.
2) Montrer que f est non nulle sur les matrices inversibles.
3) Soit $r \in \{0, \ldots, n-1\}$. On considère le produit de toutes les matrices diagonales ayant chacune r fois le nombre 1 et $n - r$ fois le nombre 0 sur la diagonale. Que vaut ce produit ? En déduire que f s'annule sur toutes les matrices de rang r. Conclure.