Université de Paris 7 **2002-2003**
CAPES: Ecrit

Géométrie affine II

Exercice I:

Soit ABC un triangle dans un plan affine $\mathcal{P}$ et M un point tel que les droites (AM), (BM) et (CM) rencontrent respectivement (CB), (AC) et (AB) en A', B' et C'. On note K le symétrique de A' par rapport à (AB) parallèlement à (CC'). Soit (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C).

1) Exprimer les coordonnées barycentriques de A', B' et C' puis celles de I et de K.

2) Que peut-on dire de K, C' et B'?

Exercice II:

(exercices du cours)

1) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère cartésien. Pour un point P, on note x_P, y_P ses coordonnées. Montrer que trois points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

2) Soit ABC un triangle d'un plan affine. Soient des points L, M, N qui se trouvent sur les droites $(AB), (BC), (CA)$ respectivement et sont distincts de A, B, C. Montrer que L, M, N sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Indication : introduire le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et utiliser l'exercice précédent.

3) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien. Soient $a_i x + b_i y + c_i = 0$ les équations de trois droites $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, 3$. Montrer que les trois droites sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice III:

(exercice du cours) On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine (A, B, C). Soit P, Q et R des points de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$, $(\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q)$ et $(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$. On définit *l'aire algébrique* du triangle PQR (éventuellement dégénéré) par l'égalité

$$\mathrm{Aire}\,(PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que, pour deux triangles PQR et $P'Q'R'$, le rapport $\frac{\mathrm{Aire}\,(PQR)}{\mathrm{Aire}\,(P'Q'R')}$ ne dépend pas du choix du repère (A, B, C).

2) Montrer que les coordonnées d'un point S dans un repère (P, Q, R) sont données par les rapports

$$\frac{\mathrm{Aire}\,(SQR)}{\mathrm{Aire}\,(PQR)}, \quad \frac{\mathrm{Aire}\,(PSR)}{\mathrm{Aire}\,(PQR)}, \quad \frac{\mathrm{Aire}\,(PQS)}{\mathrm{Aire}\,(PQR)}.$$

Exercice IV:

On considère une translation t et une homothétie h d'un espace affine. Identifier les applications $f_1 = t \circ h \circ t$, $f_2 = h^{-1} \circ t \circ h$ et $f_3 = t \circ h \circ t^{-1}$.

Exercice V:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Trouver toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telles que pour tout $u \in E$, $t_u \circ f = f \circ t_u$.

Exercice VI:

Montrer que l'ensemble composé des translations et des symétries centrales d'un espace affine est un groupe pour la composition. Est-il commutatif?

Exercice VII:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ qui est fixe pour tous les éléments de G.

Exercice VIII:

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E. On suppose que $E = F \oplus D$ avec D une droite vectorielle. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. Pour tout réel k, on définit $a_k(M) = p(M) + k(M - p(M))$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Montrer que a_k est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble de ses points fixes. (a_k est appelée l'*affinité de direction D, d'hyperplan $\mathcal{F}$ et de rapport k*)

Exercice IX:

Si E est un espace vectoriel de dimension 2, un endomorphisme de E est appelé *transvection vectorielle* s'il existe une base où sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un plan affine de direction E et O un point de $\mathcal{E}$. On définit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ par $f(M) = O + u(M - O)$ où u est une transvection vectorielle.

1) Montrer que f est une bijection affine (appelée *transvection affine*). Déterminer l'ensemble de ses points fixes.

2) Soit A, B, C, A' tels que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(A) = A'$. Que peut-on dire de la droite (AA')? Construire à la règle $f(M)$ quand M est un point quelconque du plan.

3) Montrer que la composée de deux symétries par rapport à une même droite est en général une transvection.

Exercice X:

Soit X et Y deux ensembles convexes d'un espace affine $\mathcal{E}$. Démontrer que l'ensemble Z des milieux des segments qui joignent un point de X à un point de Y est convexe.