RAPPELS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

B. KELLER

1. Notions de base

1.1. **Suites exactes, foncteurs exacts.** Soit A un anneau (associatif et unitaire, non nécessairement commutatif). On note $A-\mathsf{Mod}$ la catégorie des A-modules (où 1_A agit par l'identité). Une suite de A-modules et de morphismes de A-modules

$$M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \ , \ n \geq 2 \, ,$$

est *exacte* si $\mathsf{im}(f_i) = \mathsf{ker}(f_{i-1})$ pour tout $1 < i \leq n$. Une *suite exacte courte* est une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \qquad (*).$$

On dit que M est une *extension de N par L*. Soit B un autre anneau. Un foncteur

$$F : A-\mathsf{Mod} \to B-\mathsf{Mod}$$

est *exact* (resp. *exact à droite*, resp. *exact à gauche*) si, pour toute suite exacte courte $(*)$, la suite

$$0 \longrightarrow FL \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FN \longrightarrow 0$$

est exacte (resp. la suite

$$FL \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FN \longrightarrow 0$$

est exacte, resp. la suite

$$0 \longrightarrow FL \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FN$$

est exacte).

1.2. **Complexes.** Un *complexe de cochaînes* est un diagramme de A-modules de la forme

$$M = (\cdots \longrightarrow M^p \xrightarrow{d^p} M^{p+1} \longrightarrow \cdots) \ , \ p \in \mathbf{Z} \, ,$$

tel que $d^{p+1}d^p = 0$ pour tous $p \in \mathbf{Z}$. Il est *borné* si $M^p{=}0$ pour presque tous p. Son *homologie en degré p* est

$$H^p(M) = \mathsf{ker}(d^p)/\,\mathsf{im}(d^{p-1}).$$

Le complexe M est *exact en degré p* si $H^p(M) = 0$. Il est *acyclique* s'il est exact en tout degré. Il est *contractile* s'il existe des morphismes $r^p : M^p \to M^{p-1}$ tels que

$$d^{p-1}r^p + r^{p+1}d^p = \mathbf{1}_{M^p}$$

pour tout p. Tout complexe contractile est acyclique. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un complexe borné V d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k est la somme alternée

$$\chi(V) = \sum_{p \in \mathbf{Z}} (-1)^p \dim_k V^p.$$

Date: 12/02/2004.

Elle s'annule si V est acyclique. Un *complexe de chaînes* ne se distingue d'un complexe de cochaînes que par la notation : les indices apparaissent en bas et sont décroissants

$$\cdots \longrightarrow L_p \xrightarrow{d_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \ , \ p \in \mathbf{Z}.$$

On définit l'homologie $H_p(L)$ .... Un *morphisme de complexes* $f : L \to M$ est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L^p & \xrightarrow{d^p} & L^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^p} & & \downarrow{\scriptstyle f^{p+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & M^p & \xrightarrow[d^p]{} & M^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

C'est un *quasi-isomorphisme* si les morphismes induits

$$H^p(f) : H^p(L) \to H^p(M)$$

sont inversibles pour tous $p \in \mathbf{Z}$. Soit M un A-module. Nous l'identifions avec un complexe concentré en degré 0. Une *résolution projective de* M est un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_p & \xrightarrow{d_p} & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

où les P_p sont projectifs. Soit N un A-module. Le *groupe* $\mathsf{Ext}^p_A(M, N)$ est l'homologie en degré p du complexe

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P_p, N) \xrightarrow{-d^*_{p+1}} \mathsf{Hom}_A(P_{p+1}, N) \longrightarrow \cdots$$

où $P \to M$ est une résolution projective quelconque de M.

2. Propriétés des groupes Ext

2.1. **Bifonctorialité et suites exactes longues.** Tout module admet une résolution projective. Elle n'est pas unique mais, à isomorphisme canonique près, le groupe $\mathsf{Ext}^p_A(M, N)$ ne dépend pas du choix de la résolution projective. On a

$$\mathsf{Ext}^0_A(M, N) = \mathsf{Hom}_A(M, N) \text{ et } \mathsf{Ext}^p_A(M, N) = 0 \text{ pour tous } p < 0.$$

Tout morphisme $f : N_1 \to N_2$ induit un morphisme

$$f_* : \mathsf{Ext}^p_A(M, N_1) \to \mathsf{Ext}^p_A(M, N_2)$$

et tout morphisme $g : M_1 \to M_2$ induit un morphisme

$$g^* : \mathsf{Ext}^p_A(M_2, N) \to \mathsf{Ext}^p_A(M_1, N).$$

Si

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte et U un module, on a des suites exactes longues (=complexes acycliques)

$$\ldots \to \mathsf{Ext}^{p-1}_A(U, N) \to \mathsf{Ext}^p_A(U, L) \to \mathsf{Ext}^p_A(U, M) \to \mathsf{Ext}^p_A(U, N) \to \mathsf{Ext}^{p+1}_A(U, L) \to \ldots$$

et

$$\ldots \to \mathsf{Ext}^{p-1}_A(L, U) \to \mathsf{Ext}^p_A(N, U) \to \mathsf{Ext}^p_A(M, U) \to \mathsf{Ext}^p_A(L, U) \to \mathsf{Ext}^{p+1}_A(N, U) \to \ldots \quad .$$

2.2. **Description en termes d'extensions (Yoneda).** Le groupe $\mathsf{Ext}^1_A(L,M)$ est en bijection fonctorielle avec l'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes courtes

$$\varepsilon : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\varepsilon \sim \varepsilon'$ s'il existe un morphisme de complexes

$$\begin{array}{lccccccc}
\varepsilon : & 0 \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}} & \\
\varepsilon' : & 0 \longrightarrow & M & \xrightarrow[i']{} & E' & \xrightarrow[p']{} & L & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Une suite

$$\varepsilon : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$$

correspond à l'élément nul de $\mathsf{Ext}^1_A(L,M)$ ssi p admet une section, *i.e.* un morphisme $s : L \to E$ tel que $ps = \mathbf{1}$, ssi i admet une rétraction, *i.e.* un morphisme $r : E \to L$ tel que $ri = \mathbf{1}$. On dit alors que ε est *scindable* (ou *scindée*).

Si $f : M_1 \to M_2$ est un morphisme, on construit l'image d'une suite exacte courte

$$\varepsilon : \qquad 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$$

par

$$f_* : \mathsf{Ext}^1_A(L,M_1) \to \mathsf{Ext}^1_A(L,M_2)$$

ainsi :

$$\begin{array}{lccccccc}
\varepsilon : & 0 \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{i} & L & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & (PO) & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}} & \\
f_*(\varepsilon) : & 0 \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow[i']{} & E' & \xrightarrow[p']{} & L & \longrightarrow 0
\end{array}$$

où E' est la somme amalgamée ("pushout") de (i,f), *i.e.*

$$E' = \mathsf{cok}(\ M \xrightarrow{[i,-f]^t} E \oplus M_2\ ).$$

On a $f_*(\varepsilon) = 0$ ssi $f = \tilde{f} i$ pour un $\tilde{f} : E \to M_2$. Dualement, si $g : L_1 \to L_2$ est un morphisme, on construit l'image d'une suite exacte courte

$$\varepsilon : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L_2 \longrightarrow 0$$

par

$$g^* : \mathsf{Ext}^1_A(L_2,M) \to \mathsf{Ext}^1_A(L_1,M)$$

ainsi

$$\begin{array}{lccccccc}
g^*(\varepsilon) : & 0 \longrightarrow & M & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & L_1 & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}} & & \downarrow & (PB) & \downarrow{\scriptstyle g} & \\
\varepsilon : & 0 \longrightarrow & M & \xrightarrow[i]{} & E & \xrightarrow[p]{} & L_2 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

où E' est le produit fibré ("pullback") de (g,p), *i.e.*

$$E' = \mathsf{ker}(\ E \oplus L_1 \xrightarrow{[g,-p]} L_2\ ).$$

On a $g^*(\varepsilon) = 0$ ssi $g = p \circ \tilde{g}$ pour un $\tilde{g} : L_1 \to E$.

3. Litérature

Le livre [1] est toujours d'actualité. La présentation de [3] est très pédagogique. Pour aller plus loin, on pourra consulter [4] et [2]. Il existe bien sûr un grand nombre d'autres livres excellents sur le sujet.

Références

1. Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
2. Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the 1988 Russian original.
3. P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997.
4. Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.