

Bernhard Keller
e-mail: keller@math.jussieu.fr
tél.: 01 44 27 54 60
fax: 01 44 27 78 18

Représentations de carquois

Cours de DEA au deuxième semestre 2003/2004

cours spécialisé, niveau 2, deuxième semestre

Sujet

Un *carquois* est un graphe orienté. Une *représentation* d'un carquois Q sur un corps k est un diagramme de k -espaces vectoriels qui a la forme indiquée par Q . Les représentations de carquois interviennent dans de nombreux problèmes d'algèbre linéaire et de théorie des représentations (voir [2], [4]). En particulier, ils ont des liens étroits avec la théorie des représentations des algèbres de Lie de dimension finie et infinie. Dans ce cours, nous présenterons les théorèmes de Gabriel et de Kac, puis nous étudierons la théorie d'Auslander-Reiten et l'appliquerons à l'étude des représentations des carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin étendu.

Programme

1. **Rappels et compléments de géométrie algébrique.** Variétés affines, groupes algébriques linéaires, actions de groupes réductifs sur des variétés affines.
2. **Le théorème de Gabriel.** [3] Carquois, carquois avec relations, représentations, groupes d'extensions, variétés de représentations, forme de Tits, racines, diagrammes de Dynkin et carquois de représentation finie.
3. **Le théorème de Kac.** [5] Carquois et matrices de Cartan, groupe de Weyl, racines réelles, racines imaginaires, démonstration du théorème principal en caractéristique finie puis en caractéristique nulle.
4. **La théorie d'Auslander-Reiten.** [1], [4] Le point de vue fonctoriel, couvertures projectives de foncteurs de type fini, le théorème d'Auslander-Reiten, propriétés des suites presque scindées, la translation d'Auslander-Reiten, le carquois d'Auslander-Reiten.
5. **Représentations des carquois de Dynkin étendus** [4], [7] Composantes postprojectives, cas des algèbres de carquois, carquois de Dynkin, critère de finitude, catégories de mailles, comparaison avec la catégorie des indécomposables, carquois d'Auslander-Reiten des carquois de Dynkin étendus.

Connaissances requises : Connaissances générales de la maîtrise, notions de géométrie algébrique, notions sur les groupes et algèbres de Lie.

Bibliographie

- [1] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1997
- [2] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [3] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Mathematica **6** (1972), 71–103.
- [4] P. Gabriel, A. V. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras*, Enc. of Math. Sci., 73, Algebra VIII, Springer 1992.
- [5] V. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.
- [6] A. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford **45** (1994), 515–530.
- [7] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984.