

Bernhard Keller  
*e-mail:* keller@math.jussieu.fr  
*tél.:* 01 44 27 54 60  
*fax:* 01 44 27 78 18

## Représentations de carquois

### Projet de cours de DEA au deuxième semestre 2004/2005

#### Sujet

Un *carquois* est un graphe orienté. Une *représentation* d'un carquois  $Q$  sur un corps  $k$  est un diagramme de  $k$ -espaces vectoriels qui a la forme indiquée par  $Q$ . Les représentations de carquois interviennent dans de nombreux problèmes d'algèbre linéaire et de théorie des représentations (voir [1], [8]). En particulier, ils ont des liens étroits avec la théorie des représentations des algèbres de Lie de dimension finie et infinie.

#### Programme

1. **Rappels et compléments de géométrie algébrique.** Variétés affines, groupes algébriques linéaires, actions de groupes réductifs sur des variétés affines.
2. **Le théorème de Gabriel.** [7] Carquois, carquois avec relations, représentations, groupes d'extensions, variétés de représentations, forme de Tits, racines, diagrammes de Dynkin et carquois de représentation finie.
3. **Le théorème de Kac.** [9] Carquois et matrices de Cartan, groupe de Weyl, racines réelles, racines imaginaires, démonstration du théorème principal en caractéristique finie puis en caractéristique nulle.
4. **Espaces de modules de représentations.** (d'après A. King [10]) Points stables et semistables, espaces de modules, fibrés universels.
5. **Représentations générales.** (d'après Schofield [11], Crawley-Boevey [2], [3]) Représentations générales, existence de sous-représentations de dimension donnée, morphismes entre représentations générales, caractérisation de l'existence de sous-représentations.
6. **Algèbres préprojectives.** Réduction symplectique, algèbres préprojectives, application au problème de Horn : Si  $A, B$  sont deux matrices hermitiennes, il s'agit de donner des estimations précises sur les valeurs propres de  $A + B$  en fonction de celles de  $A$  et de  $B$  (voir Fulton [6]). On suivra [5].

**Connaissances requises :** Connaissances générales de la maîtrise, notions de géométrie algébrique, notions sur les groupes algébriques.

## Bibliographie

- [1] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [2] W. Crawley-Boevey, *On homomorphisms from a fixed representation to a general representation of a quiver*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1909–1919.
- [3] W. Crawley-Boevey, *Subrepresentations of general representations of quivers*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), 363–366.
- [4] K. Erdmann, W. Crawley-Boevey, C. Geiss, *Summer School : Geometry of quiver representations and preprojective algebras*, Isle of Thorn, September 2000, <http://www.amsta.leeds.ac.uk/pmtwc/quiver/>
- [5] W. Crawley-Boevey, C. Geiss, *Horn's problem and semi-stability for quiver representations*, prépublication, avril 2000.
- [6] W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 209–249.
- [7] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Mathematica **6** (1972), 71–103.
- [8] P. Gabriel, A. V. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras*, Enc. of Math. Sci., 73, Algebra VIII, Springer 1992.
- [9] V. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.
- [10] A. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford **45** (1994), 515–530.
- [11] A. Schofield, *General representations of quivers*, Proc. London Math. Soc. **65** (1992), 46–64.