Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2003–04
Représentations de carquois
14/06/2004

Un corrigé de l'examen de juin 2004

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations de $\vec{D}_4$

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent D_4

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\varphi"'] \\ 0 & 2 \arrow[l] \\ & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?

Réponse — Le carquois Q n'a pas de cycles orientés. Donc l'idéal 0 de kQ est admissible et l'on sait que les kQ-modules indécomposables projectifs sont les $(kQ)e_i$, $i \in Q_0$, les indécomposables injectifs les $\mathrm{Hom}_k(e_i(kQ), k)$ et les simples les S_i tels que $S_i(j) = k$ pour $i = j$ et $S_i(j) = 0$ sinon. Ainsi, les représentations projectives indécomposables sont (à isomorphisme près) les représentations $P_0, \ldots, P_3$ données par

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \\ k & 0 \arrow[l] \\ & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "1"'] \\ k & 0 \arrow[l] \\ & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \\ k & k \arrow[l, "1"'] \\ & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \\ k & 0 \arrow[l] \\ & k. \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

Les représentations injectives indécomposables sont (à isomorphisme près) les représentations $I_0, \ldots, I_3$ données par

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "1"'] \\ k & k \arrow[l, "1"'] \\ & k \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & k \arrow[dl] \\ 0 & 0 \arrow[l] \\ & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \\ 0 & k \arrow[l] \\ & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \\ 0 & 0 \arrow[l] \\ & k\ . \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Les représentations simples sont (à isomorphisme près) les représentations $S_0 = P_0$, $S_1 = I_1$, $S_2 = I_2$ et $S_3 = I_3$.

2) Soit V une représentation de Q. Montrer que les applications $V_i \to V_0$, $i = 1, \ldots, 3$, sont injectives si V n'a pas de facteur direct simple injectif.

Réponse — Soit V_1' le noyau de V_φ et V_1'' un supplémentaire de V_1' dans V_1. Alors les sous-espaces $V_i' = 0$, $i \neq 1$, et V_1' définissent une sous-représentation de V. De même, les sous-espaces $V_i'' = V_i$, $i \neq 1$, et V_1'' définissent une sous-représentation de V. Clairement V est la somme directe de V' et V''. Or V' est isomorphe à une somme de copies de I_1. Donc $V' = 0$ par hypothèse ce qui montre que $V_\varphi : V_1 \to V_0$ est injective. On procède de même pour les applications $V_2 \to V_0$ et $V_3 \to V_0$.

3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten. Décrire la représentation indécomposable de vecteur dimension [2111].

Réponse — Comme Q est un carquois de Dynkin, on sait que le carquois d'Auslander-Reiten Γ_{kQ} est un sous-carquois plein stable par prédécesseurs de $\mathbf{N}(Q^{op})$ et que $Q^{op} \subset \mathbf{N}(Q^{op})$ s'identifie au sous-carquois formé des représentants des indécomposables projectifs. On connaît les vecteurs dimension des indécomposables projectifs et on obtient les autres par 'tricotage' jusqu'à ce qu'on arrive aux injectifs. On trouve le carquois suivant, dont la translation est donnée, pour les sommets non projectifs, par le décalage d'un cran vers la gauche (on a souligné les vecteurs dimension qui seront utiles à la question suivante et surligné leurs translatés)

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{[1100]} \arrow[dr] & & \underline{[1011]} \arrow[dr] & & {[0100]} \\
{[1000]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{[1010]} \arrow[r] & {[2111]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{[1101]} \arrow[r] & {[1111]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{[0010]} \\
 & \overline{[1001]} \arrow[ur] & & \underline{[1110]} \arrow[ur] & & {[0001]}
\end{tikzcd}$$

La représentation indécomposable de vecteur dimension [2111] *est donnée par un espace V_0 de dimension 2 et trois droites V_1, V_2, V_3 de V_0 distinctes deux à deux.*

4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W)$ s'annule si V et W sont des représentations indécomposables dont les vecteurs dimension sont parmi les suivants : [1010], [1011], [1110], [0010].

Réponse — La formule d'Auslander-Reiten exprime les espaces d'extensions en termes de duaux de quotients des espaces de morphismes :

$$D\underline{\mathrm{Hom}}_{kQ}(\tau^{-1}(W), V) = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W) = D\overline{\mathrm{Hom}}_{kQ}(W, \tau(V))$$

où D désigne le dual sur k, τ la translation d'Auslander-Reiten, $\underline{\mathrm{Hom}}$ *le quotient de* Hom *par l'espace des morphismes qui se factorisent par un projectif et* $\overline{\mathrm{Hom}}$ *le quotient de* Hom *par l'espace des morphismes qui se factorisent par un injectif. Pour montrer l'annulation des* Ext^1*, il suffit donc de montrer que* $\mathrm{Hom}_{kQ}(W, \tau(V))$ *s'annule pour les indécomposables en question. Comme Q est un carquois de Dynkin, Γ_{kQ} est standard et les morphismes entre indécomposables peuvent se calculer dans la catégorie des mailles de Γ_{kQ}. L'unique chemin d'un indécomposable W vers un indécomposable $\tau(V)$ est celui de longueur* 2 *qui mène de* [1010] *à* [1011]*. Or ce chemin est un relateur de maille. Donc les espaces d'extension s'annulent.*

5) Soit $v = [6372]$. Soit U l'ensemble des points de la variété des représentations de vecteur dimension v qui correspondent à des sommes d'indécomposables de vecteurs dimension du point précédent. Montrer que U est un ouvert non vide.

Réponse — On sait que la codimension de l'orbite d'un module M est égale à la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(M,M)$. Si M est somme de copies d'indécomposables de la question précédente, alors cette codimension s'annule (par l'additivité de Ext^1). Donc si U est non vide, alors U est de même dimension que $\mathrm{rep}(Q,v)$. Comme $\mathrm{rep}(Q,v)$ est irréductible, il s'ensuit que U est dense. Comme U est localement fermé (comme toute orbite), U est alors ouvert. Il reste à montrer que U est non vide. En effet, nous avons

$$[6372] = [1010] + 2 \times [1011] + 3 \times [1110] + [0010].$$

II. Une proposition d'Auslander

Soit A une algèbre associative de dimension finie. Soient L et M deux modules. On se propose de montrer que L et M sont isomorphes si l'on a

$$\dim \mathrm{Hom}_A(L,X) = \dim \mathrm{Hom}_A(M,X)$$

pour tout module X. Notons que la réciproque est triviale. Soit $A - \mathrm{ind}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables. Par le théorème de Krull-Schmidt, il existe des entiers $\mu_U(L)$ presque tous nuls, uniques, tels que

$$L \cong \bigoplus_{U \in A-\mathrm{ind}} U^{\mu_U(L)}.$$

Pour un A-module X, on définit

$$\lambda_X(L) = \dim \mathrm{Hom}_A(L,X).$$

1) Nous considérons la catégorie $\mathrm{Fun}(A)$ des foncteurs contravariants de type fini de la catégorie $A - \mathrm{mod}$ vers $k - \mathrm{mod}$. Rappeler la définition du foncteur simple S_U associé à U et vérifier que $\mu_U(L) = \dim S_U(L)$.

   Réponse — Le foncteur simple S_U est le quotient du foncteur représentable $\mathrm{Hom}_A(?,U)$ par son unique sous-foncteur maximal. Nous avons donc une suite exacte

   $$0 \to \mathcal{R}(?,U) \to \mathrm{Hom}_A(?,U) \to S_U \to 0\,,$$

   où $\mathcal{R}(?,U)$ est le radical de $\mathrm{Hom}_A(?,U)$. En outre, pour un indécomposable V, nous avons $S_U(V) = k$ si V est isomorphe à U et $S_U(V) = 0$ sinon. Comme S_U est additif, nous avons bien

   $$\mu_U(L) = \dim S_U(L).$$

2) Supposons que U est un indécomposable projectif. Soit R son radical. Montrer que

   $$\mu_U(L) = \lambda_U(L) - \lambda_R(L).$$

   Réponse — Si U est projectif, on sait que $\mathcal{R}(?,U)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(?,R)$ de façon qu'on a une suite exacte

   $$0 \to \mathrm{Hom}_A(?,R) \to \mathrm{Hom}_A(?,U) \to S_U \to 0.$$

   Il s'ensuit que

   $$\mu_U(L) = \dim \mathrm{Hom}_A(L,U) - \dim \mathrm{Hom}_A(L,R) = \lambda_U(L) - \lambda_R(L).$$

3) Supposons que U est un indécomposable non projectif. Soit

$$0 \to \tau U \to E \to U \to 0$$

la suite d'Auslander-Reiten qui se termine en U. Montrer que

$$\mu_U(L) = \lambda_U(L) - \lambda_E(L) + \lambda_{\tau U}(L).$$

Réponse — On sait que si U n'est pas projectif, alors la suite d'Auslander-Reiten qui se termine en U nous donne une résolution projective minimale

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(?, \tau U) \to \mathrm{Hom}_A(?, E) \to \mathrm{Hom}(?, U) \to S_U \to 0.$$

Il s'ensuit que

$$\mu_U(L) = \dim S_U(L) = \dim \mathrm{Hom}_A(L, U) - \dim \mathrm{Hom}_A(L, E) + \dim \mathrm{Hom}_A(L, \tau U).$$

4) Conclure.

Réponse — Par notre hypothèse, nous avons

$$\lambda_U(L) = \lambda_U(M)$$

pour tous les indécomposables U. Par (2) et (3), il s'ensuit que

$$\mu_U(L) = \mu_U(M)$$

pour tous les indécomposables U. Par la définition de μ_U, il s'ensuit que L est isomorphe à M.

III. Modules tubulaires simples sur $\widetilde{D}_4$

Soit Q un carquois fini connexe sans cycles orientés. Pour tout sommet i, notons S_i le module simple associée à i, P_i l'indécomposable projectif et I_i l'indécomposable injectif. Pour un module M, notons $\underline{\dim}\, M \in \mathbf{Z}^{Q_0}$ son vecteur dimension. Soit $\langle , \rangle$ la forme d'Euler, de façon qu'on a

$$\langle \underline{\dim}\, L, \underline{\dim}\, M \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(L, M) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(L, M).$$

1) Montrer que les $\underline{\dim}\, P_j$, $j \in Q_0$, forment une base de $\mathbf{Z}^{Q_0}$. Indication : on pourra considérer les coordonnées de ces vecteurs dans une base bien choisie de $\mathbf{Z}^{Q_0}$.

Réponse — Pour deux sommets i et j de Q, on définit

$$i \leq j \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe un chemin de } i \text{ à } j.$$

Comme Q n'admet pas de cycle orienté, on obtient bien un ordre partiel sur l'ensemble des sommets de Q. On le raffine en un ordre total et on choisit la suite des vecteurs e_i, $i \in Q_0$, comme base. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice des coordonnées des vecteurs $\underline{\dim}\, P_j$. Alors a_{ij} est le nombre de chemins de j à i dans Q. Donc $a_{ij} = 0$ si $i < j$ et $a_{ii} = 1$, par construction de l'ordre. Il s'ensuit que les $\underline{\dim}\, P_j$ forment une base de $\mathbf{Z}^{Q_0}$.

2) Montrer qu'il existe un automorphisme

$$c : \mathbf{Z}^{Q_0} \to \mathbf{Z}^{Q_0}$$

tel que $c(\underline{\dim}\, P_i) = -\underline{\dim}\, I_i$ pour tout sommet i de Q. On appelle c la *transformation de Coxeter.*

Réponse — Comme les $\underline{\dim}\, P_i$ *forment une base de* $\mathbf{Z}^{Q_0}$*, il existe une unique application* $\mathbf{Z}$*-linéaire* c *de* $\mathbf{Z}^{Q_0}$ *dans lui-même telle que* $c(\underline{\dim}\, P_i) = -\underline{\dim}\, I_i$, $i \in Q_0$. *Dans la base de (1), les coordonnées des vecteurs* $\underline{\dim}\, I_j$ *forment une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux valent tous* 1. *Donc les* $\underline{\dim}\, I_i$ *forment également une base et* c *est bien un automorphisme.*

3) Montrer que si P est projectif, on a $c(\underline{\dim}\, P) = -\underline{\dim}\, \nu(P)$, où ν est le foncteur de Nakayama.

Réponse — Comme les deux côtés de l'égalité sont additifs en P*, il suffit de la montrer quand* P *est un projectif indécomposable. Or, pour* $i \in Q_0$*, nous avons*

$$\underline{\dim}\, \nu(P_i) = \underline{\dim}\, I_i = -c(\underline{\dim}\, P_i).$$

4) Montrer que si M est un indécomposable non projectif, on a $c(\underline{\dim}\, M) = \underline{\dim}\, \tau(M)$. De même, si M est un indécomposable non injectif, alors on a $c^{-1}(\underline{\dim}\, M) = \underline{\dim}\, \tau^{-1}(M)$.

Réponse — Soit M *un indécomposable non projectif. Soit*

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

une résolution projective minimale de M *(comme* kQ *est de dimension finie et héréditaire, il existe bien une telle résolution). Le foncteur* $\mathrm{Hom}_{kQ}(?, kQ)$ *est exact à gauche, donc le foncteur* $\nu = D\mathrm{Hom}_{kQ}(?, kQ)$ *est exact à droite. Nous avons donc une suite exacte*

$$0 \to \tau(M) \to \nu(P_1) \to \nu(P_0) \to \nu M \to 0$$

où ν *est le foncteur de Nakayama. Je dis que* $\nu M = 0$. *En effet, si* $f : M \to kQ$ *est un morphisme d'image* I*, alors* I *projectif (en tant que sous-module de* kQ*) et donc un facteur direct de* M*. Or* M *est indécomposable non projectif et donc* $I = 0$. *Ainsi, la suite*

$$0 \to \tau(M) \to \nu(P_1) \to \nu(P_0) \to 0$$

est exacte et nous avons

$$\underline{\dim}\, \tau(M) = \underline{\dim}\, \nu(P_1) - \underline{\dim}\, \nu(P_0) = -c(\underline{\dim}\, P_1) + c(\underline{\dim}\, P_0) = c(\underline{\dim}\, M).$$

Si M *est un indécomposable non injectif, on a une résolution injective minimale*

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to 0$$

et une suite exacte

$$0 \to \nu^{-1} I_0 \to \nu^{-1} I_1 \to \tau^{-1} M \to 0$$

ce qui donne la deuxième affirmation.

5) Montrer que pour $v, w \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, on a

$$\langle v, w \rangle = -\langle w, c(v) \rangle = \langle c(v), c(w) \rangle.$$

Réponse — Il suffit de montrer l'affirmation quand v et w parcourent des systèmes de générateurs de $\mathbf{Z}^{Q_0}$. Or pour $i \in Q_0$ et $M \in kQ\,-\mathrm{mod}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \underline{\dim}\, P_i, \underline{\dim}\, M\rangle &= \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(P_i, M) = \dim M(i) = \dim DM(i) = \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(M, I_i) \\ &= \langle \underline{\dim}\, M, \underline{\dim}\, I_i\rangle = \langle \underline{\dim}\, M, -c(\underline{\dim}\, P_i)\rangle.\end{aligned}$$

On obtient la deuxième égalité en appliquant deux fois la première.

6) A partir de maintenant, supposons que Q est un carquois de Dynkin étendu. Notons δ sa plus petite racine imaginaire. Pour $v, w \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, notons $(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle$ et $q(v) = \langle v, v\rangle$. Rappelons que q est la forme de Tits associée à Q et $(,)$ sa forme bilinéaire associée.

   a) Montrer qu'un vecteur $v \in \mathbf{Z}^{Q_0}$ appartient au radical de q ssi $c(v) = v$.
   Réponse — Pour $w \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, nous avons

$$\langle w, v - c(v)\rangle = \langle w, v\rangle + \langle v, w\rangle = (v, w)$$

   ce qui montre que v est q-orthogonal sur tous les vecteurs w ssi $c(v) = v$.

   b) Montrer qu'il existe un entier $h \geq 1$ et une forme linéaire $\varphi : \mathbf{Z}^{Q_0} \to \mathbf{Z}$ tels que, pour tout vecteur $v \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, on ait

$$c^h(v) = v + \varphi(v)\delta$$

   (le plus petit entier h avec cette propreté s'appelle le *nombre de Coxeter de Q*). Indication : On pourra montrer que c induit un automorphisme de $\mathbf{Z}^{Q_0}/\mathbf{Z}\delta$ qui permute les éléments d'une partie finie génératrice.
   Réponse — D'après (5), l'automorphisme c préserve la forme d'Euler. Donc il préserve la forme de Tits et son radical, qui est égal à $\mathbf{Z}\delta$. Ainsi, c induit un automorphisme $\overline{c}$ de $\mathbf{Z}^{Q_0}/\mathbf{Z}\delta$ et cet automorphisme préserve la forme quadratique $\overline{q}$ induite par q dans le quotient. Soit R l'ensemble des éléments v du quotient tels que $\overline{q}(v) = 1$. Comme $\overline{q}$ est positive et non dégénérée, elle est définie positive. Donc R est fini. En outre, R engendre le quotient car R contient les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{Z}^{Q_0}$. Clairement R est stable par $\overline{c}$. Il s'ensuit que l'ordre de $\overline{c}$ est borné par l'ordre de la permutation qu'il induit dans R. Donc $\overline{c}$ est d'ordre fini h. Alors $c^h - Id$ est un endomorphisme de $\mathbf{Z}^{Q_0}$ dont l'image est contenue dans $\mathbf{Z}\delta$ ce qui implique clairement l'affirmation.

   c) Rappelons qu'un indécomposable V sur kQ est postprojectif ssi $\tau^n(V)$ est projectif pour un $n \geq 0$. Montrer que V est postprojectif si $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$.
   Réponse — Par récurrence, il résulte du point précédent, que nous avons $c^{hi}(\underline{\dim}\, V) = \underline{\dim}\,(V) + i\varphi(\underline{\dim}\, V)\delta$ pour tout $i \geq 0$. Pour $i \gg 0$, ce vecteur a des composantes négatives. Il s'ensuit que pour un $n \geq 0$, le module $\tau^n(V)$ est projectif, c'est-à-dire que V est postprojectif.

   d) Réciproquement, soit V un indécomposable postprojectif. Montrer que l'on a $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$.
   Réponse — Rappelons que la composante postprojective de Γ_{kQ} est isomorphe à $\mathbf{N}(Q^{op})$ et qu'un postprojectif est déterminé par son vecteur dimension. Donc les modules $\tau^{-n}V$, $n \geq 0$, sont postprojectifs et leurs vecteurs dimension sont positifs et deux à deux distincts. En particulier, pour $i \in \mathbf{N}$, les vecteurs

$$\underline{\dim}\, \tau^{-ih}V = c^{-ih}\underline{\dim}\, V = \underline{\dim}\, V - i\varphi(\underline{\dim}\, V)\delta$$

   sont positifs et deux à deux distincts. Comme δ est strictement positif, on doit avoir $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$.

e) Déduire qu'un indécomposable V est postprojectif (resp. préinjectif) ssi $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$ (resp. $\varphi(\underline{\dim}\, V) > 0$).

Réponse — L'affirmation résulte des deux points précédents et du principe de dualité.

7) On appelle *tubulaire* un module qui n'a aucun facteur direct postprojectif et aucun facteur direct préinjectif. Rappelons que sur une algèbre héréditaire de dimension finie A, l'équivalence $\tau : A - \underline{\mathrm{mod}} \to A - \overline{\mathrm{mod}}$ se relève en un foncteur *exact à gauche* noté encore $\tau : A - \mathrm{mod} \to A - \mathrm{mod}$.

a) Montrer que pour un module U, on a équivalence entre

(i) U est tubulaire;

(ii) on a $\varphi(\underline{\dim}\, U) = 0$ et $\varphi(\underline{\dim}\, V) \leq 0$ pour tout sous-module V de U;

(iii) on a $\varphi(\underline{\dim}\, U) = 0$ et $\varphi(\underline{\dim}\, W) \geq 0$ pour tout quotient W de U.

Réponse — Supposons que U est tubulaire. Il suffit de montrer (ii) pour les sous-modules indécomposables de U. Soit donc V un sous-module indécomposable. Supposons que $\varphi(\underline{\dim}\, V) > 0$. Comme τ est exact à gauche, $\tau^{ih}V$ est un sous-module de $\tau^{ih}U$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Donc $\underline{\dim}\, \tau^{ih}V \leq \underline{\dim}\, \tau^{ih}U$ pour tout n. Mais la suite des vecteurs dimension

$$\underline{\dim}\, \tau^{ih}V = \underline{\dim}\, V + i\, \varphi(\underline{\dim}\, V)\delta$$

tend vers l'infini alors que la suite

$$\underline{\dim}\, \tau^{ih}U = \underline{\dim}\, U$$

est constante. L'implication de (ii) vers (i) résulte du point précédent. L'équivalence entre (i) et (iii) résulte de celle entre (i) et (ii) et du principe de dualité.

b) Soit $f : V \to V'$ un morphisme entre modules tubulaires. Montrer que le noyau, l'image et le conoyau de f sont encore tubulaires.

Réponse — Soit I l'image de f. Comme I est un sous-module de V', on a $\varphi(\underline{\dim}\, I) \leq 0$. Comme I est un quotient de V, on a $\varphi(\underline{\dim}\, I) \geq 0$. Donc $\varphi(\underline{\dim}\, I) = 0$. Par les suites exactes,

$$0 \to \mathrm{ker} f \to V \to I \to 0 \quad \textit{et} \quad 0 \to I \to V' \to \mathrm{cok} f \to 0\,,$$

il en résulte que $\varphi(\underline{\dim}\, \mathrm{ker} f) = 0$ et $\varphi(\underline{\dim}\, \mathrm{cok} f) = 0$. Tout sous-module de I est un sous-module de V', tout quotient de $\mathrm{cok} f$ un quotient de V' et tout sous-module de $\mathrm{ker} f$ un sous-module de V. Il en résulte que I, $\mathrm{ker} f$ et $\mathrm{cok} f$ sont bien tubulaires.

8) On appelle *tubulaire simple* un module tubulaire non nul qui n'admet pas de sous-module tubulaire autre que 0 et lui-même. On se propose de classifier les modules tubulaires simples pour le carquois Q donné par

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \arrow[ddl] \\ & 2 \arrow[dl] \\ 0 & \\ & 3 \arrow[ul] \\ & 4 \arrow[uul] \end{tikzcd}$$

On note Q' le sous-carquois plein de sommets $0, \ldots, 3$.

a) Calculer les vecteurs dimension de $\tau^i I_j$ pour $0 \leq j \leq 4$ et $0 \leq i \leq 2$.
Réponse — Il s'agit de calculer une partie finale de la composante préinjective de Q. On obtient

$$
\begin{tikzcd}
 & {[22111]} \arrow[dr] & & {[10111]} \arrow[dr] & & {[01000]} \\
{[53333]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & {[21211]} \arrow[r] & {[32222]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & {[11011]} \arrow[r] & {[11111]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & {[00100]} \\
 & {[21121]} \arrow[ur] & & {[11101]} \arrow[ur] & & {[00010]} \\
 & {[21112]} \arrow[uur] & & {[11110]} \arrow[uur] & & {[00001]}
\end{tikzcd}
$$

b) Déduire du calcul précédent que l'on a $c^2(v) = v+\varphi(v)\delta$ où $\varphi(v) = -2v_0+v_1+v_2+v_3$.
Réponse — Il suffit de vérifier la formule indiquée sur les vecteurs dimension des indécomposables injectifs car ceux-ci forment une base de $\mathbf{Z}^{Q_0}$. Il s'agit des vecteurs dimension [11111], [01000], [00100], [00010] *et* [00001] *et nous avons $\delta = [21111]$. Le calcul est immédiat à partir du point précédent.*

c) Pour une partie I de $\{1, \ldots, 4\}$ formée de deux éléments, soit $V = V(I)$ la représentation de Q donnée par un espace vectoriel V_0 de dimension 1 et quatre sous-espaces V_i, $1 \leq i \leq 4$, tels que $V_i = V_0$ si $i \in I$ et $V_i = 0$ sinon. Montrer que V est tubulaire simple.

Réponse — Supposons que $I = \{1, 2\}$. Alors $\underline{\dim}\, V = [11100]$ et nous avons bien $\varphi(\underline{\dim}\, V) = 0$. Les vecteurs dimension v des sous-modules non nuls de V sont [11000] *et* [10100]*. Il vérifient $\varphi(v) = -1$. Cela montre que V est tubulaire et n'admet aucun sous-module tubulaire non trivial. Donc V est tubulaire simple. De même pour les autres choix de I.*

d) Soit V la représentation de Q donnée par un espace vectoriel V_0 de dimension 2 et quatre droites $V_1, \ldots, V_4$ distinctes deux à deux dans V_0. Montrer que V est tubulaire simple. Etablir une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme de ces représentations et les points de la droite projective sur k privée des trois points 0, 1, ∞. On note $V(x)$ la représentation qui correspond à un point x.

Réponse — Le vecteur dimension de V est [21111] *et on a bien $\varphi(\underline{\dim}\, V) = 0$. Soit $U \subset V$ une sous-representation non triviale. Si $\dim U_0 = 2$ on doit avoir $\dim U_i = 0$ pour un $1 \leq i \leq 4$ et $\varphi(\dim U) < 0$. Si $\dim U_0 = 1$, alors $U_i = U_0$ pour un unique $1 \leq i \leq 4$ et on a $\varphi(\dim U) = -1$. Cela montre que V est tubulaire et n'admet aucun sous-module tubulaire non trivial. Clairement les classes d'isomorphisme de ces représentations sont en bijection avec les orbites de $GL(V_0)$ dans son action naturelle sur les quadruplets de droites distinctes de V_0. On sait que le birapport*

$$(V_1, V_2, V_3, V_4) \mapsto b(V_1, V_2, V_3, V_4)$$

établit une bijection naturelle entre les orbites de tels quadruplets et la droite projective $P^1(k)$ privée de 0, 1 et ∞. Concrètement, si on choisit une base v_1, v_2 de V_0 telle que v_1 engendre V_1, v_2 engendre V_2 et v_1+v_2 engendre V_3, alors $b(V_1, V_2, V_3, V_4)$ est le point $(x_1 : x_2)$ défini par le fait que $x_1v_1 + x_2v_2$ appartienne à V_4.

e) Pour une représentation U de Q', notons U^0 son *extension par* 0 *à* Q, c'est-à-dire que $U^0_4 = 0$ et que la restriction de U^0 à Q' est U. Calculer (à l'aide de l'exercice I), pour chaque représentation indécomposable U de Q', les nombres $\varphi(\underline{\dim}\, U^0)$ et $\dim U_0$. Les indiquer aux sommets du carquois d'Auslander-Reiten de Q'.

Réponse — On trouve

$$\begin{tikzcd}
 & -1,1 \arrow[dr] & & 0,1 \arrow[dr] & & 1,0 \\
-2,1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & -1,1 \arrow[r] & -1,2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 0,1 \arrow[r] & 1,1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 1,0 \\
 & -1,1 \arrow[ur] & & 0,1 \arrow[ur] & & 1,0
\end{tikzcd}$$

f) Montrer que toute représentation tubulaire simple est isomorphe à l'une des représentations $V(x)$ ou $V(I)$ décrites ci-dessus.

Réponse — Soit S une représentation tubulaire simple. Considérons la restriction de S à Q'. Cette restriction se décompose en une somme de modules indécomposables $V(i)$, $1 \leq i \leq s$. Clairement, $V(i)^0$ est une sous-représentation de S pour tout $1 \leq i \leq s$. Il s'ensuit que $\varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) \leq 0$. D'après la question précédente, aucun $V(i)$ n'est donc injectif. En outre, si $V(i)$ est le translaté d'un injectif simple, alors $V(i)^0$ est tubulaire (de la forme $V(I)$) et donc $S = V(i)^0$. On peut donc supposer que $\varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) < 0$ pour tous i. Soit $W(i)$ une sous-représentation maximale de S telle que $W(i) \cap V(i)^0 = 0$ et $W(i)$ contient $V(j)^0$ pour $j \neq i$. Alors la restriction à Q' du quotient $\overline{V}(i) = S/W(i)$ est isomorphe à $V(i)$, on a

$$\dim \overline{V}(i)_4 \leq \dim \overline{V}(i)_0 = \dim V(i)_0\ ,$$

et

$$0 \leq \varphi(\dim \overline{V}(i)) = \varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) + \underline{\dim}\, \overline{V}(i)_4 \leq \varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) + \dim V(i)_0.$$

Si $\varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) + \dim V(i)_0 = 0$, alors $\overline{V}(i)$ est tubulaire et $S = \overline{V}(i)$. Ce cas se présente si $V(i)$ est l'un des trois projectifs non simples. On obtient alors les représentations $S = V(I)$, où I est une partie à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ qui contient 4. Il reste le cas où tous les $V(i)$ vérifient

$$\varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) < 0 \text{ et } 0 < \varphi(\underline{\dim}\, V(i)^0) + \dim V(i)_0.$$

D'après le point précédent, cela n'est possible que si tous les $V(i)$ sont isomorphes à l'indécomposable de vecteur dimension [2111]. Comme $\varphi(\underline{\dim}\, V) = 0$, on a $\dim S_4 = s$. Si on choisit des bases adaptées à la décomposition de la restriction de S à Q', la représentation S est donc donnée par quatre matrices du format $2s \times s$ de la forme

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

qui décrivent respectivement les inclusions de S_1, S_2, S_3 et S_4 dans S_0. Nous pouvons considérer la donnée du couple (A, B) comme celle d'une représentation de vecteur dimension $[s, s]$ du carquois de Kronecker. Une décomposition de (A, B) donnerait une décomposition de S. Donc (A, B) est indécomposable. Toute sous-représentation de (A, B) de vecteur dimension $[s', s']$ nous donne un sous-module tubulaire de S. Il s'ensuit que (A, B) ne peut admettre de telle sous-représentation.

L'inspection de la liste des représentations indécomposables du carquois de Kronecker montre que l'on doit avoir a $s = 1$. Finalement, si on avait $S_4 = S_1$ alors S admettrait une sous-représentation tubulaire de vecteur dimension [21001] *et serait égale à cette sous-représentation. De même, S_4 doit être distincte de S_2 et S_3. Finalement, on trouve que S est isomorphe à $V(x)$ pour un point $x \neq 0, 1, \infty$ de la droite projective.*

9) Question facultative : calculer les groupes d'extensions entre représentations tubulaires simples.

Réponse — On trouve

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V(x), V(x)) = k \text{ et } \mathrm{Ext}^1_{kQ}(V(I), V(J)) = k$$

pour tous x et pour I et J des parties complémentaires de $\{1, \ldots, 4\}$. Tous les autres groupes d'extensions s'annulent.

Remarque : La connaissance des représentations tubulaires simples et de leurs groupes d'extensions permet de montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$k[x, x^{-1}, (1-x)^{-1}] - \mathrm{mod} \times T_2 \times T_2 \times T_2 \to \mathcal{T}$$

où $\mathcal{T}$ est la sous-catégorie des représentations tubulaires et T_2 est la catégorie des mailles d'un tube de circonférence 2. Les modules $V(I)$ correspondent aux points de la bouche des tubes de circonférence 2 et les modules $V(x)$ aux modules simples sur $k[x, x^{-1}, (1-x)^{-1}]$.