Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2004–05
Représentations de carquois
19/05/2005

Un corrigé de l'examen de mai 2005

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations de $\vec{A}_4$

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent A_4

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4.$$

1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?

Réponse — Le carquois Q n'a pas de cycles orientés. Donc l'idéal 0 de kQ est admissible et l'on sait que les kQ-modules indécomposables projectifs sont les $(kQ)e_i$, $i \in Q_0$, les indécomposables injectifs les $\mathrm{Hom}_k(e_i(kQ), k)$ et les simples les S_i tels que $S_i(j) = k$ pour $i = j$ et $S_i(j) = 0$ sinon. Ainsi, les représentations projectives indécomposables sont (à isomorphisme près) les représentations $P_1, \ldots, P_4$ données par

$$k \xrightarrow{1} k \longleftarrow 0 \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow k \longleftarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow k \xleftarrow{1} k \xrightarrow{1} k \qquad 0 \longrightarrow 0 \longleftarrow 0 \longrightarrow k.$$

Les représentations injectives indécomposables sont (à isomorphisme près) les représentations $I_0, \ldots, I_3$ données par

$$k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0 \longrightarrow 0 \qquad k \longrightarrow k \longleftarrow k \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 0 \longleftarrow k \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow 0 \longleftarrow k \longrightarrow k.$$

Les représentations simples sont (à isomorphisme près) les représentations $S_1 = I_1$, $S_2 = P_2$, $S_3 = I_3$ et $S_4 = P_4$.

2) Soit V une représentation *projective* de Q dont le vecteur dimension est $v = [4, 9, 2, 3]$. Quelle peut être la décomposition de V en indécomposables ?

Réponse — On sait que toute représentation projective est somme directe de copies des P_i, $1 \leq i \leq 4$. On a donc

$$V \xrightarrow{\sim} P_1^{n_1} \oplus P_2^{n_2} \oplus P_3^{n_3} \oplus P_4^{n_4}$$

pour certains entiers positifs n_i. Il s'ensuit que

$$v = \sum_{i=1}^{4} n_i p_i \ ,$$

où l'on note p_i le vecteur dimension de P_i. Or les p_i, $1 \leq i \leq 4$, forment une base de $\mathbf{Z}^4$ (on le vérifie directement ou l'on le déduit du fait que Q n'a pas de cycles orientés). Donc les n_i sont uniques et on calcule aisément que

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (4, 3, 2, 1).$$

3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten.

   Réponse — Comme Q est un carquois de Dynkin, on sait que le carquois d'Auslander-Reiten Γ_{kQ} est un sous-carquois plein stable par prédécesseurs de $\mathbf{N}(Q^{op})$ et que $Q^{op} \subset \mathbf{N}(Q^{op})$ s'identifie au sous-carquois formé des représentants des indécomposables projectifs. On connaît les vecteurs dimension des indécomposables projectifs et on obtient les autres par 'tricot' jusqu'à ce qu'on arrive aux injectifs. On trouve le carquois suivant, dont la translation est donnée, pour les sommets non projectifs, par le décalage d'un cran vers la gauche.

$$\begin{tikzcd}
& {[1100]} \arrow[dr] & & {[0011]} \arrow[dr] & \\
{[0100]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[1111]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0010]} \\
& {[0111]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[1110]} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
{[0001]} \arrow[ur] & & {[0110]} \arrow[ur] & & {[1000]}
\end{tikzcd}$$

4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W)$ s'annule si V et W sont des représentations indécomposables dont les vecteurs dimension sont parmi les suivants : [0001], [0111], [1111], [0011].

   Réponse — La formule d'Auslander-Reiten exprime les espaces d'extensions en termes de duaux de quotients des espaces de morphismes :

$$D\underline{\mathrm{Hom}}_{kQ}(\tau^{-1}(W), V) = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W) = D\overline{\mathrm{Hom}}_{kQ}(W, \tau(V))$$

   où D désigne le dual sur k, τ la translation d'Auslander-Reiten, $\underline{\mathrm{Hom}}$ le quotient de Hom par l'espace des morphismes qui se factorisent par un projectif et $\overline{\mathrm{Hom}}$ le quotient de Hom par l'espace des morphismes qui se factorisent par un injectif. Pour montrer l'annulation des Ext^1, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Hom}_{kQ}(W, \tau(V))$ s'annule pour les indécomposables en question. Comme Q est un carquois de Dynkin, Γ_{kQ} est standard et les morphismes entre indécomposables peuvent se calculer dans la catégorie des mailles de Γ_{kQ}. Comme il n'existe pas de chemin d'un indécomposable W vers un indécomposable $\tau(V)$, les espaces d'extension s'annulent.

5) Soit $v \in \mathbf{N}^4$. Rappeler pourquoi $\mathrm{rep}(Q, v)$ contient une unique $GL(v)$-orbite ouverte dense. On appelle *générique* la représentation qui correspond aux points de cette orbite.

   Réponse — En tant que variété, $\mathrm{rep}(Q, v)$ est isomorphe à un espace affine. En particulier, $\mathrm{rep}(Q, v)$ est irréductible. Comme Q est de Dynkin, Q n'admet qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes d'indécomposables, et donc pour chaque vecteur dimension donné, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations *(éventuellement décomposables). Donc le nombre de $GL(v)$-orbites dans* $\mathrm{rep}(Q,v)$ *est fini. Or rep(Q,v) est la réunion des adhérences de ces orbites. Comme* $\mathrm{rep}(Q,v)$ *est irréductible, l'une des adhérences est égale à* $\mathrm{rep}(Q,v)$*, c'est-à-dire que l'une des orbites est dense. Comme toute orbite est localement fermée, cette orbite dense est aussi ouverte. Comme* $\mathrm{rep}(Q,v)$ *est irréductible, deux orbites ouvertes denses (donc non vides) se rencontrent toujours, donc coïncident.*

6) Quelle est la décomposition[1] en indécomposables de la représentation générique de vecteur dimension [1234] ?

   Réponse — On sait que la codimension de l'orbite d'un module M est égale à la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(M,M)$*. Si M est somme de copies d'indécomposables de la question précédente, alors cette codimension s'annule (par l'additivité de* Ext^1*). Il s'ensuit que la somme M des quatre indécomposables de vecteurs dimensions* [0001]*,* [0111]*,* [1111] *et* [0011] *est générique. En outre, elle a le vecteur dimension* [1234]*. Donc c'est la représentation recherchée.*

II. Représentations sur les réels

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les triplets (V_1, V_2, V_f), où V_1 est un espace vectoriel réel de dimension finie, V_2 un espace vectoriel complexe de dimension finie et

$$V_f : V_1 \to V_2|_{\mathbf{R}}$$

une application $\mathbf{R}$-linéaire de V_1 dans l'espace vectoriel réel $V_2|_{\mathbf{R}}$ sous-jacent à V_2. Un morphisme $V \to V'$ de $\mathcal{C}$ est donné par un couple (g_1, g_2) formé d'une application $\mathbf{R}$-linéaire $g_1 : V_1 \to V_1'$ et d'une application $\mathbf{C}$-linéaire $g_2 : V_2 \to V_2'$ telles que $V_{f'} g_1 = g_2 V_f$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations réelles de dimension finie de la $\mathbf{R}$-algèbre associative

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

   i.e. la sous-algèbre réelle de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix},$$

   telles que $a \in \mathbf{R}$, $b, c \in \mathbf{C}$. Déduire que $\mathcal{C}$ est additive et que tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à une somme finie d'objets indécomposables uniques à isomorphisme et permutation près.

   Réponse — Notons $A-$ mod *la catégorie des A-modules à gauche. Pour une représentation V, on définit FV comme le module d'espace sous-jacent $V_1 \oplus V_2$ et muni de l'action*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 \\ bV_f(v_1) + cv_2 \end{bmatrix}.$$

   On vérifie que FV est un module bien défini et que F est un foncteur. Pour un A-module M, on définit une représentation GM par $(GM)_1 = e_{11}M$, $(GM)_2 = e_{22}M$

[1] L'énoncé original, erroné, demandait la décomposition générique de [1232]. Cette dernière est donnée par la somme des indécommposables de vecteurs dimension [1111], [0110] et [0011].

et $(GM)_f$ comme l'application donnée par la multiplication par e_{21}. On vérifie que G est un foncteur et que F et G sont quasi-inverses l'un de l'autre. On sait que dans la catégorie des modules de dimension finie sur une algèbre de dimension finie sur un corps, tout objet est somme finie d'indécomposables uniques à isomorphisme et à permutation près. Clairement, cette propriété est préservée par les équivalences de catégories.

2) Calculer les anneaux d'endomorphismes des objets suivants de $\mathcal{C}$. Déduire qu'ils sont indécomposables. Lesquels parmi ces objets sont projectifs, resp. injectifs resp. simples ?

$$U = (\mathbf{R} \to 0)\,, \quad V = (0 \to \mathbf{C})\,, \quad W = (\mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbf{C})\,, \quad T = (\mathbf{R} \xrightarrow{incl} \mathbf{C}).$$

Réponse — Un calcul simple montre que les anneaux d'endomorphismes de U et T sont isomorphes à $\mathbf{R}$ et ceux de V et W isomorphes à $\mathbf{C}$. Si X est une représentation quelconque, on a

$$\mathrm{Hom}(X,U) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X_1,\mathbf{R})\,,\ \mathrm{Hom}(V,X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C},X_2)\,,$$
$$\mathrm{Hom}(X,W) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_2,\mathbf{C})\,,\ \mathrm{Hom}(T,X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R},X_1).$$

Il s'ensuit que U et W sont injectifs et V et T projectifs. On a des suites exactes naturelles

$$0 \to V \to T \oplus T \to W \to 0 \ \textit{et}\ 0 \to T \to W \to U \to 0$$

qui ne sont pas scindables car $\mathrm{Hom}(T,V) = 0$ *et* $\mathrm{Hom}(U,W) = 0$. *Il s'ensuit que W et U ne sont pas projectifs et V et T ne sont pas injectifs. Les objets U et V sont simples tandis que W et T admettent V comme sous-représentation non triviale.*

3) Montrer que les objets de la question précédente forment un système de représentants des classes d'isomorphisme des indécomposables de $\mathcal{C}$.

Réponse — Par la question 1), il suffit de montrer que tout objet X de $\mathcal{C}$ est somme directe des représentations de la question précédente. Soit $X_1 = \ker(X_f) \oplus Y_1$ une décomposition de X_1. Alors X est somme directe de $(\ker(X_f) \to 0)$ et $Y_1 \to X_2$. Clairement $(\ker(X_f) \to 0)$ est somme directe de copies de U. Donc on peut supposer que X_f est injectif. Soit $X_1' \subset X_1$ l'image réciproque de $X_f(X_1) \cap iX_f(X_1)$. Alors $X_1' \to X_f(X_1')$ est une sous-représentation isomorphe à une somme de copies de W. Comme W est injectif, cette sous-représentation est un facteur direct et on peut supposer que $X_f(X_1) \cap iX_f(X_1) = 0$. Alors $(X_1 \to X_f(X_1) \oplus iX_f(X_1))$ est un facteur direct de X isomorphe à une somme de copies de T et X est isomorphe à la somme de ce facteur et d'une somme de copies de V.

III. Relations de Serre dans les algèbres de Hall

1) Soit A un anneau. Un A-*module fini* est un A-module à gauche dont l'ensemble sous-jacent est fini. Si $X_1, \ldots, X_t$ et Z sont des A-modules finis, on définit $F^Z_{X_1,\ldots,X_t}$ comme le nombre de chaînes décroissantes

$$Z = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_{t-1} \supset Z_t = 0$$

de sous-modules de Z tels que Z_{i-1}/Z_i est isomorphe à X_i, pour $1 \leq i \leq t$. On suppose que pour tous A-modules finis X_1, X_2, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules finis Z tels que $F^Z_{X_1,X_2} \neq 0$. Soit $\mathcal{H}(A)$ le groupe abélien libre engendré par des symboles u_X indexés par les classes d'isomorphisme X de A-modules finis. On définit une loi $\mathbf{Z}$-bilinéaire sur $\mathcal{H}(A)$ par

$$u_X u_Y = \sum_Z F_{XY}^Z u_Z.$$

a) Montrer que la loi définie ci-dessus est associative. On appelle $\mathcal{H}(A)$ muni de cette loi *l'algèbre de Hall* associée à A.
Réponse — Si $X_1, \ldots, X_t$ et Z sont des A-modules finis, notons $\Phi^Z_{X_1,\ldots,X_t}$ l'ensemble des chaînes décroissantes

$$Z = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_{t-1} \supset Z_t = 0$$

de sous-modules de Z tels que Z_{i-1}/Z_i est isomorphe à X_i, pour $1 \leq i \leq t$. Fixons un système de représentants $\mathcal{V}$ des classes d'isomorphismes de A-modules fini, et pour chaque A-module fini S, fixons un isomorphisme $\varphi_S : S \to T$ avec le représentant de sa classe. Soit W un A-module fini. Nous obtenons une bijection

$$\Phi^W_{X,Y,Z} \xrightarrow{\sim} \coprod_{V \in \mathcal{V}} \Phi^W_{X,V} \times \Phi^V_{Y,Z}$$

en envoyant une chaîne (W_i) sur le couple formé de $W_0 \supset W_1 \supset 0$ et de $V = V_0 \supset \varphi_{W_1}(W_2) \supset \varphi_{W_1}(W_3) \supset 0$ où V est le représentant de la classe d'isomorphisme de W_1. Cette bijection montre que nous avons

$$F^W_{X,Y,Z} = \sum_V F^W_{X,V} F^V_{Y,Z}.$$

De même, on montre que

$$F^W_{X,Y,Z} = \sum_U F^U_{X,Y} F^W_{U,Z}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$(u_X u_Y) u_Z = (\sum_U F^U_{X,Y}) u_Z = \sum_W (\sum_U F^U_{X,Y} F^W_{U,Z}) u_W = \sum_W F^W_{X,Y,Z} u_W = u_X (u_Y u_Z).$$

b) Soient p un nombre premier, $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Montrer que dans $\mathcal{H}(A)$, on a

$$u_M u_M = (p+1)\, u_{M \oplus M} + u_{\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}}.$$

Réponse — Si $F^L_{M,M}$ est non nul, alors L est extension de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par lui-même. Donc L est ou bien isomorphe à $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ ou bien isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Le module $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ admet une unique chaîne aux sous-quotients M, M, car il admet un unique sous-module isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Donc $F^{\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}}_{M,M} = 1$. Le module $Z = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ admet $p+1$ sous-modules isomorphes à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui contient $p-1$ vecteurs non nuls et chaque droite contient $p^2 - 1$ vecteurs non nuls. Nous avons donc $F^M_{M,M} = p + 1$.

c) Soient k un corps à $q < \infty$ éléments, Q le carquois $1 \to 2$ et $u_i = u_{S_i}$, $i = 1, 2$. Montrer qu'on a

$$u_1 u_2^2 - (q+1)\, u_2 u_1 u_2 + q\, u_2^2 u_1 = 0$$

dans $\mathcal{H}(kQ)$. Indication : on pourra exprimer $u_1 u_2^2$, ... en termes de $u_{S_1^1 \oplus S_2^2}$ et $u_{I_2 \oplus S_2}$, où I_2 est l'injectif indécomposable de socle S_2.

Réponse — Tout module M admettant une filtration dont les sous-quotients sont S_1, S_2, S_2 (dans un ordre quelconque) a pour vecteur dimension $[1, 2]$. Les vecteurs dimension des indécomposables sont $[1, 0]$, $[1, 1]$ et $[0, 1]$. Donc on a ou bien $M \xrightarrow{\sim} S_1 \oplus I_2$ ou bien $M \xrightarrow{\sim} S_1 \oplus S_2^2$. Dans les deux cas, nous avons $F^M_{S_1, S_2, S_2} = q + 1$ car le choix d'une filtration de M à sous-quotients S_1, S_2, S_2 revient au choix d'une droite dans $S_2^2 = k^2$. Donc

$$u_1 u_2^2 = (q+1)(u_{S_1 \oplus S_2^2} + u_{I_2 \oplus S_2}).$$

Calculons $F^M_{S_2, S_1, S_2}$: si $M = S_1 \oplus S_2^2$, il existe $q + 1$ chaînes, car elles sont en bijection avec les droites dans S_2^2; si $M = I_2 \oplus S_2$, alors le cran M_1 d'une chaîne contient un générateur de I_2 et est donc égal à I_2. Il s'ensuit que M_2 est égal au socle de I_2. Donc il existe une unique filtration admissible et $F^M_{S_2, S_1, S_2} = 1$. Donc

$$u_2 u_1 u_2 = (q+1) u_{S_1 \oplus S_2^2} + u_{I_2 \oplus S_2}.$$

Calculons $F^M_{S_2, S_2, S_1}$: si $M = S_1 \oplus S_2^2$, nous trouvons à nouveau $q + 1$ filtrations admissibles, en bijection avec les droites dans S_2^2; si $M = I_2 \oplus S_2$, alors M n'admet aucun sous-module simple isomorphe à S_1 et donc il n'existe aucune filtration admissible. Donc

$$u_2^2 u_1 = (q+1) u_2^2 u_1.$$

Par combinaison linéaire des trois équations on obtient bien

$$u_1 u_2^2 - (q+1)\, u_2 u_1 u_2 + q\, u_2^2 u_1 = 0.$$

2) Soient Q un carquois fini sans cycle orienté et k un corps à $q < \infty$ éléments. Pour tout entier positif n, on définit le nombre quantique $[n]$ et le factoriel quantique $[n]!$ par

$$[n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{et} \quad [n]! = [1][2] \cdots [n]\,.$$

Pour tous entiers positifs n, t, on définit le coefficient binomial quantique

$$\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[t]!\,[n-t]!}\,.$$

Pour tout sommet i de Q, notons $u_i = u_{S_i}$. Soient i, j deux sommets de Q tels qu'il n'existe pas de flèche de i à j. Soient n' le nombre de flèches de j à i et $n = n' + 1$. On se propose de montrer[2] que dans $\mathcal{H}(kQ)$, on a la *relation de Serre*

$$\sum_{t=0}^{n} (-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} u_i^t u_j u_i^{n-t} = 0\,.$$

[2]suivant C. M. Ringel, Inv. Math. 101 (1990), 583-592

a) Soient $t \leq d$ des entiers positifs et V un k-espace vectoriel de dimension d. Quel est le nombre de droites dans V ? Soit $U \subset V$ un sous-espace de dimension d'. Quel est le nombre de droites dans V/U ? Montrer que le nombre de suites

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_t \subset V$$

de sous-espaces vectoriels telles que $\dim V_i = i$, $1 \leq i \leq t$, est égal à

$$[d][d-1]\cdots[d-t+1] = \frac{[d]!}{[d-t]!}\,.$$

Montrer que c'est également le nombre de suites de sous-espaces

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_t$$

tels que $\dim V_i = \dim V - i$, $1 \leq i \leq t$.

Réponse — Chaque droite de V contient $q-1$ vecteurs non nuls et le nombre total de vecteurs non nuls dans V est $q^d - 1$. Le nombre de droites est donc

$$\frac{q^d-1}{q-1} = [d].$$

Comme V/U est de dimension $d-d'$, le nombre de droites dans V/U est $[d-d']$. Pour obtenir une suite comme dans l'énoncé, on choisit successivement une droite V_1 dans V, puis une droite V_2/V_1 dans V/V_1, ... Le nombre de ces suites est donc bien égal à

$$[d][d-1]\cdots[d-t+1].$$

Comme les sous-espaces de codimension i de V sont en bijection avec les sous-espaces de dimension i de V^*, qui est encore de dimension d, on obtient la dernière affirmation.

b) Soit R le sous-carquois plein de Q dont les sommets sont i et j. Le carquois R comporte donc $n-1$ flèches $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ de j à i et aucune autre flèche. Soit M une représentation de R telle que $\dim M_i = n$ et $\dim M_j = 1$. Soit d la codimension de la somme des images des M_{α_l} dans M_i. Montrer que

$$\dim \operatorname{Hom}(M, S_i) = d.$$

Montrer que l'on a $M = N \oplus S_i^d$, où N est une représentation indécomposable telle que $\dim N_j = 1$. Calculer les espaces de morphismes

$$\operatorname{Hom}(N, S_i)\ ,\ \operatorname{Hom}(S_i, N)\ ,\ \operatorname{Hom}(N, S_j)\ ,\ \operatorname{Hom}(S_j, N).$$

Déduire du résultat que le plus grand quotient semi-simple de N est S_j et que le radical de N est isomorphe à S_i^{n-d}.

Réponse — Soit I la somme des images des M_{α_l}. Un couple (f_j, f_i) d'applications linéaires définit un morphisme de M vers S_i ssi $f_j = 0$ et f_i s'annule sur I. Donc $\operatorname{Hom}(M, S_i) = \operatorname{Hom}_k(M_j/I, k)$ est bien de dimension d. Soit N la sous-représentation avec $N_i = M_i$ et $N_j = I$. Soit $I' \subset M_i$ un supplémentaire de I. Alors I' définit une sous-représentation isomorphe à S_i^d et $M = I \oplus N$. Si $f : N \to N$ est un endomorphisme de composantes f_i, f_j, alors f_i est un multiple de l'identité et, comme N_j est engendré par les $M_{\alpha_l}(N_i)$, f_j est le même multiple de l'identité. Donc l'anneau des endomorphismes de N est réduit à k et N est indécomposable.

Comme N est engendré par N_j, on a $\mathrm{Hom}(N, S_i) = 0$. *Il est clair que* $\mathrm{Hom}(S_i, N) = k^{n-d}$. *Comme N_j est de dimension 1, on a* $\mathrm{Hom}(N, S_j) = k$. *Si certains M_{α_l} sont non nuls, on a* $\mathrm{Hom}(S_j, N) = 0$ *et sinon, on a* $\mathrm{Hom}(S_j, N) = k$.

Le morphisme de N vers son plus grand quotient semisimple est universel parmi les morphismes de N vers un module semisimple $S_i^{n_i} \oplus S_j^{n_j}$. Le calcul qui précède montre donc que le plus grand quotient de N est S_j. Le noyau de l'épimorphisme $N \to S_j$ est clairement la sous-représentation $(0, N_i)$, qui est isomorphe à S_i^{n-d} (notons que $n = d$ si tous les M_{α_l} s'annulent).

c) Soit M une représentation de Q. Notons $a_t(M)$ le coefficient de u_M dans $u_i^t u_j u_i^{n-t}$. Supposons que $a_t(M) > 0$.

Montrer que $M_l = 0$ pour $l \notin \{i, j\}$ de façon qu'on peut considérer M comme une représentation de R. Montrer que $\dim M_i = 1$ et $\dim M_j = n$. Montrer que dans les notations de la question précédente, on a $d \geq 1$ et $t \leq d$.

Réponse — Si $a_t(M)$ est non nul, alors M admet une série de composition avec n facteurs S_i et un facteur S_j. Donc le vecteur dimension de M s'annule sauf en i et j et on a $\dim M_i = n$ et $\dim M_j = 1$. Comme les images des M_{α_l} sont au plus de dimension 1 et comme il y a $n - 1$ flèches α_l, la dimension de la somme des images est $\leq n - 1$ et sa codimension d est ≥ 1. Comme N n'admet pas de quotient isomorphe à S_i, mais $M = N \oplus S_i^d$ admet un quotient isomorphe à S_i^t, on doit avoir $t \leq d$.

d) Sous les mêmes hypothèses sur M, soit

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t \supset M_{t+1} \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} = 0$$

une chaîne décroissante de sous-représentations telle que les sous-quotients M_{s-1}/M_s sont simples pour $1 \leq s \leq n+1$. Montrer qu'on a $M_{s-1}/M_s \xrightarrow{\sim} S_i$ pour $s \neq t+1$ et $M_t/M_{t+1} \xrightarrow{\sim} S_j$ ssi M_t contient N et que M_{t+1} est contenu dans $(\mathrm{rad} N) \oplus S_i^d$.

Réponse — Clairement M_{t+1} est contenu dans $\mathrm{rad} N \oplus S_i^d \xrightarrow{\sim} S_i^n$ ssi on a $M_{s-1}/M_s \xrightarrow{\sim} S_i$ pour tous $s > t+1$. De l'autre côté, M_t contient N ssi M/M_t n'a pas de facteur de composition isomorphe à S_j ssi $M_{s-1}/M_s \xrightarrow{\sim} S_i$ pour tous $s \leq t$.

e) Sous les mêmes hypothèses sur M, montrer qu'on a

$$a_t(M) = \frac{[d]!\,[n-t]!}{[d-t]!}\,.$$

Réponse — D'après la question précédente, pour obtenir une chaîne

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t \supset M_{t+1} \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} = 0$$

avec des quotients successifs S_i (t fois), S_j (une fois), S_i ($n - t$ fois), on doit

(1) choisir une chaîne de $n - t$ sous-espaces

$$M_{t+1} \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} = 0\,,$$

chacun de codimension 1 dans le suivant, dans $(\mathrm{rad} N) \oplus S_i^d \xrightarrow{\sim} S_i^n$;

(2) poser $M_t = M_{t+1} + N$;

(3) choisir une chaîne de t sous-espaces

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{t-1} \supset M_t$$

chacun de codimension 1 dans le suivant.

D'après la question a), le nombre de chaînes obtenues est de

$$[n-t]! \times 1 \times \frac{[d]!}{[d-t]!}\,.$$

f) Montrer que

$$\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} a_t(M) = [n]! \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}$$

Réponse — On a

$$\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} a_t(M) = \frac{[n]!}{[t]!\,[n-t]!}\frac{[n-t]!\,[d]!}{[d-t]!} = [n]! \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}.$$

g) Montrer que dans $\mathbf{Z}[X]$, on a

$$\sum_{t=0}^{d} \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} X^t = \prod_{i=0}^{d-1}(1+q^iX).$$

Déduire que pour $d \geq 1$, on a

$$\sum_{t=0}^{d}(-1)^t \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} = 0.$$

Réponse — On procède par récurrence sur $d \geq 1$. Pour $d = 1$, l'affirmation est tautologique. Passons de d à $d+1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{d}(1+q^iX) &= (1+q^dX)\sum_{t=0}^{d} \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} X^t \\
&= 1 + q^{\frac{d(d-1)}{2}+d} + \sum_{t=1}^{d}\left(\begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} + \begin{bmatrix} d \\ t-1 \end{bmatrix} q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}+d}\right) X^t\,,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence pour la première égalité. Ici, le coefficient de X^t se récrit

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} + \begin{bmatrix} d \\ t-1 \end{bmatrix} q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}+d} &= q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}}\left(\frac{q^{t-1}\,[d]!}{[t]!\,[d-t]!} + \frac{q^d\,[d]!}{[t-1]!\,[d-t+1]!}\right) \\
&= q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}} \frac{[d]!}{[t-1]!\,[d-t]!}\left(\frac{q^{t-1}}{[t]} + \frac{q^d}{[d-t+1]}\right) \\
&= q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}} \frac{[d]!}{[t]!\,[d-t+1]!}(q^{t-1}\,[d-t+1] + q^d\,[t]) \\
&= q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}} \frac{[d]!}{[t]!\,[d-t+1]!}\frac{q^{t-1}(q^{d-t+1}-1) + q^d(q^t-1)}{q-1} \\
&= q^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}} \frac{[d]!}{[t]!\,[d-t+1]!}\frac{q^{t-1}\,(q^{d+1}-1)}{q-1} \\
&= q^{\frac{t(t-1)}{2}} \frac{[d+1]!}{[t]!\,[d-t+1]!} = q^{\frac{t(t-1)}{2}} \begin{bmatrix} d+1 \\ t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{d}(1+q^iX) &= 1+q^{\frac{d(d-1)}{2}+d}+\sum_{t=1}^{d} q^{\frac{t(t-1)}{2}} \begin{bmatrix} d+1 \\ t \end{bmatrix} X^t \\
&= 1+q^{\frac{(d+1)d}{2}}+\sum_{t=1}^{d} q^{\frac{t(t-1)}{2}} \begin{bmatrix} d+1 \\ t \end{bmatrix} X^t \\
&= \sum_{t=0}^{d+1} q^{\frac{t(t-1)}{2}} \begin{bmatrix} d+1 \\ t \end{bmatrix} X^t.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de la première égalité. Nous obtenons la deuxième en spécialisant la première à $X=-1$.

h) Montrer que

$$\sum_{t=0}^{d}(-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} a_t(M) = 0$$

et conclure.

Réponse — Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{d}(-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} a_t(M) &= \sum_{t=0}^{d}(-1)^t q^{\frac{t(t-1)}{2}} [n]! \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} \\
&= [n]! \sum_{t=0}^{d}(-1)^t q^{\frac{t(t-1)}{2}} \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé d'abord f) puis g). On obtient l'affirmation car l'expression que nous venons de calculer est le coefficient de u_M dans le développement du relateur de Serre

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} u_i^t u_j u_i^{n-t}\,.$$